

Feuille de T. D. B10
Dimension

Exercices de cours

- ① Soit $E = \mathbb{R}^3$, $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$ avec :
- $$u_1 = (3, 10, 10) \quad u_2 = (6, 7, -6)$$
- Enfin soit $G = \{(x, y, z) \in E \mid 10x - 6y + 3z = 0\}$.
- Donner la dimension de F et démontrer qu'il est inclus dans G .
 - Justifier que G ne peut être de dimension 3 et en déduire que $F = G$.
- ② Soit $E = \mathbb{R}^4$. Déterminer le rang des familles de vecteurs suivantes :
- $$\mathcal{F}_1 = ((1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1))$$
- $$\mathcal{F}_2 = ((1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 0))$$
- $$\mathcal{F}_3 = \emptyset$$
- $$\mathcal{F}_4 = ((1, 0, 0, 0), (2, 0, 0, 0), \dots, (n, 0, 0, 0)) \quad n \in \mathbb{N}^*$$
- $$\mathcal{F}_5 = ((1, 0, 0, 0), (2, 1, 0, 0), (3, 2, 1, 0), (4, 3, 2, 1), (5, 4, 3, 2))$$

- ③ Démontrer qu'il existe une unique forme linéaire $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :
- $$\varphi(1, 1, 1) = 3 \quad \varphi(1, 2, 3) = 5 \quad \varphi(1, 3, 6) = -2$$
- Calculer $\varphi(u)$ pour tout élément $u = (x, y, z)$ de \mathbb{R}^3 .
- ④ Soit f l'application linéaire définie par
- $$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
- $$(x, y, z, t) \longmapsto (3x + 3y + 3z + 3t, 3x - 3y + z + t, 2x + 2y + z + t)$$

Calculer le noyau de f et démontrer que f est surjective.

Travaux dirigés

- ① Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ on considère les sous-espaces vectoriels :
- $$F = \{(x, y, z, t) \in E \mid 3x - y - z = 2y + t = 0\}$$
- $$G = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3) \quad \text{où } v_1 = (1, -1, 2, 2)$$
- $$v_2 = (2, 1, 4, -2)$$
- $$v_3 = (1, 2, 2, -4)$$
- Donner une base et la dimension des sous-espaces vectoriels F , G , $F \cap G$, et $F + G$.
- ② Dans $E = \mathbb{R}^3$ on note F le sous-espace vectoriel engendré par $u_1 = (7, 5, 0)$ et $u_2 = (6, 10, 5)$.
- Démontrer que F est le plan vectoriel d'équation $5x - 7y + 8z = 0$.
 - Soit G la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u_3 = (8, 9, 3)$. Démontrer que G est un supplémentaire de F dans E .

- ③ Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ on considère la famille \mathcal{F} composée des vecteurs :

$$u_1 = (1, -1, -1, -1)$$

$$u_2 = (2, 0, 2, 0)$$

$$u_3 = (-1, -1, 2, -1)$$

- Démontrer que cette famille est libre.
- Soit G l'ensemble des vecteurs (x, y, z, t) tels que $y = t$. Démontrer que $\text{Vect } \mathcal{F} = G$ par inclusion puis en raisonnant sur la dimension.
- Compléter \mathcal{F} en une base de E .

- ④ Soit $E = \mathbb{R}^4$ et F, G, H les sous-ensembles de E d'équations respectives :

$$F : x - 2y + 2t = 3y + z = 0$$

$$G : 4x - 2y + z = 2x + z + 2t = 0$$

$$H : x + t = x - y - z = 0$$

- Justifier que F, G, H sont des sous-espaces vectoriels de E et donner leurs dimensions.
- Calculer $F \cap G$ et $F \cap H$.
- En déduire que $F + G = E$, puis démontrer que $F + H$ est le sous-ensemble de E d'équation $x + y + z + 2t = 0$.

- ⑤ Soit $E = \mathbb{R}^4$ puis :
- $$F = \{(x, y, z, t) \in E \mid x - y + z - t = 0\}$$

- Déterminer la dimension de F .
- Soit G le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $u_1 = (1, 2, 3, 4)$ et $u_2 = (4, 3, 2, 1)$.
- Démontrer que $F + G = E$. En déduire la dimension de $F \cap G$.
 - Déterminer une base d'un supplémentaire de $F \cap G$ dans F .

- ⑥ Soit $E = \mathbb{K}^n$ avec $n \geq 2$ et (e_1, \dots, e_n) la base canonique de E . Soit F l'ensemble des n -uplets (x_1, \dots, x_n) de E tels que :

$$\forall k = 2, \dots, n-1 \quad 2x_k = x_{k-1} + x_{k+1}$$

- Prouver que F est un sous-espace vectoriel de E .
- Démontrer que les vecteurs $u_1 = (1, \dots, 1)$ et $u_2 = (1, 2, \dots, n)$ appartiennent à F .
- On note $G = \text{Vect}(e_3, \dots, e_n)$. Démontrer que $F \cap G = \{0_E\}$.
- Que peut-on en déduire sur la dimension de F ?

- ⑦ Soit H et H' deux hyperplans distincts d'un espace vectoriel E de dimension n . Déterminer $H + H'$ et en déduire la dimension de $H \cap H'$.

8 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ puis :

$$F = \{P \in E \mid P(1) = P(2) = 0\}$$

- Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E et en donner une base.
- Démontrer que $\mathbb{R}_1[X]$ est un supplémentaire de F dans E .

9 Soit n un entier naturel. On note $\mathcal{M} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, puis \mathcal{T} et \mathcal{T}' les sous-espaces vectoriels de \mathcal{M} contenant les matrices respectivement triangulaires supérieures et triangulaires inférieures.

- Déterminer les sous-espaces $\mathcal{T} + \mathcal{T}'$ et $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}'$, donner leurs dimensions.
- Démontrer que l'application $M \mapsto {}^t M$ est un automorphisme de \mathcal{M} .

Quelle est l'image de \mathcal{T} par cet automorphisme ?

- Déduire des deux questions précédentes la dimension de \mathcal{T} et de \mathcal{T}' .
- Retrouver ce résultat directement en exhibant des bases de \mathcal{T} et \mathcal{T}' .

10 Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on définit sur \mathbb{R} :

$$f_k : t \mapsto \cos^k t \quad \text{et} \quad g_k : t \mapsto \cos(kt)$$

- Démontrer que la famille $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre.
- Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n \in \text{Vect}(g_0, \dots, g_n)$$
- Déduire des questions précédentes que la famille $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre.

11 Déterminer si chacune des applications linéaires f ci-dessous est injective ou surjective.

- $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y, z) \mapsto (2x - y + z, x + z)$
- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y) \mapsto (3x - 12y, 0, -2x + 8y)$
- $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y, z) \mapsto (x + y + z, x + y + 2z, x + 2y + 2z)$
- $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$
 $(x, y, z) \mapsto (4y - z, 3x + 2y + z, -3x + 2y - 2z, x - 6y + z)$
- $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$
 $(x, y, z, t) \mapsto (3y + 2z + t, 3x + z - t, 5x - y + z - 2t, 4x + y + 2z - t)$
- $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$
 $(x_1, \dots, x_5) \mapsto (x_1 + 2x_2, x_1 - 2x_2 - 2x_3, x_2 + x_3 - x_4, 2x_2 - 2x_4 + x_5)$

12 Soit n un entier positif non-nul et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^n défini par :

$$f(x_1, \dots, x_n) = (x_2, x_3, \dots, x_n, x_1)$$

Déterminer le rang de f puis de celui de $g = \text{Id} - f$.

13 Pour tout $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ on note :

$$\varphi(y) = y'' - 4y' + 20y$$

- Justifier que φ est une application linéaire de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.
- Déterminer le noyau de φ .
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n , et $\psi : E \rightarrow E$
 $y \mapsto \varphi(y)$.
 Démontrer que ψ est bien définie puis que c'est un automorphisme.

14 On note f l'application :

$$f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ P \mapsto (P(1), P(2), P(3))$$

- Justifier que f est linéaire.
- Démontrer que f est un isomorphisme.
- Justifier qu'il existe un unique polynôme P de degré au plus deux dont la courbe passe par les points de coordonnées $(1, -1)$, $(2, -2)$ et $(3, 1)$.
- On pose : $P_1 = \frac{1}{2}(X - 2)(X - 3)$

$$P_2 = -(X - 1)(X - 3)$$

$$P_3 = \frac{1}{2}(X - 1)(X - 2)$$

Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Donner l'image de cette base par f .

- Déterminer le polynôme P dont l'existence et l'unicité ont été démontrées ci-dessus.

15 Soit n un entier naturel. On considère \mathcal{S} et \mathcal{A} les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contenant les matrices respectivement symétriques et antisymétriques. On définit l'application :

$$f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \\ M \mapsto \frac{1}{2}(M + {}^t M)$$

- Démontrer que \mathcal{S} et \mathcal{A} sont l'image et le noyau de f .
- Démontrer que f est un projecteur.
 Que peut-on en déduire au sujet de \mathcal{S} et \mathcal{A} ?
 Quelle est la symétrie associée ?
- Déterminer les dimensions de \mathcal{S} et de \mathcal{A} . Vérifier que leur somme donne le résultat attendu.

16 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{rg } f = \text{rg } f \circ f$.

- Démontrer que $\text{im } f = \text{im } f \circ f$ et $\text{ker } f = \text{ker } f \circ f$.
- Démontrer que $E = \text{im } f \oplus \text{ker } f$.
- Réciproquement, démontrer que si $\text{im } f$ et $\text{ker } f$ sont supplémentaires dans E alors $\text{rg } f = \text{rg } f \circ f$.

17 Soit f et g deux endomorphismes de E , espace vectoriel de dimension finie n , tels que $f \circ f = 0$ et $f \circ g + g \circ f = \text{Id}_E$. Démontrer que n est pair.

18 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f, g deux endomorphismes de E tels que $f + g$ est bijectif.

a. Démontrer que :

$$\operatorname{im} f + \operatorname{im} g = E \quad \text{et} \quad \ker f \cap \ker g = \{0_E\}$$

b. On suppose de plus que $f \circ g = 0$.

Démontrer que $\operatorname{im} g = \ker f$, et que $\ker g$ et $\operatorname{im} f$ en sont deux supplémentaires.

19 Soit n et p deux entiers tels que $1 \leq p \leq n$, et B un polynôme fixé de degré p . On définit :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}_{n-p}[X] \times \mathbb{K}_{p-1}[X] &\longrightarrow \mathbb{K}_n[X] \\ (Q, R) &\longmapsto BQ + R \end{aligned}$$

a. Démontrer que f est bien définie et linéaire.

b. Exprimer le degré de $f(Q, R)$ en fonction de ceux de Q et de R . En déduire le noyau de f .

c. Démontrer que f est un isomorphisme.

Quel théorème retrouve-t-on ?

20 Soit $\Delta : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$
 $P \longmapsto P(X) - P(X - 1)$.

a. Démontrer que Δ est linéaire.

b. Déterminer son noyau.

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et Δ_n la restriction de Δ à $\mathbb{K}_n[X]$.

Démontrer que $\operatorname{im} \Delta_n = \mathbb{K}_{n-1}[X]$.

d. En déduire que Δ est surjective.

21 Soit E, F, G trois espaces vectoriels de dimensions finies. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$ et $h \in \mathcal{L}(E, G)$.

a. Démontrer que si $h = g \circ f$ alors $\operatorname{im} h \subseteq \operatorname{im} g$ et $\ker f \subseteq \ker h$.

On suppose que $\operatorname{im} h \subseteq \operatorname{im} g$. Le but de la suite est de démontrer qu'il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $h = g \circ \varphi$.

b. Soit (w_1, \dots, w_m) une base de $\operatorname{im} h$. Démontrer que chaque w_i possède un antécédent u_i par h et v_i par g .

c. Soit $E_1 = \operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_m)$. Démontrer que E_1 est un supplémentaire de $\ker h$ dans E .

d. Construire une application linéaire $\varphi : E \rightarrow F$ vérifiant $h = g \circ \varphi$.

On suppose maintenant que $\ker f \subseteq \ker h$.

e. Construire une application linéaire $\psi : F \rightarrow G$ telle que $h = \psi \circ f$.

22 Soit n et m deux entiers avec $0 \leq m \leq n$.

Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ une famille de m formes linéaires non-nulles de E , espace vectoriel de dimension n .

Pour tout $k = 1, \dots, m$ on note $H_k = \ker \varphi_k$.

Soit $F = H_1 \cap \dots \cap H_m$.

Le but de cet exercice est de démontrer que F est de dimension $n - m$ si et seulement si la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ est libre.

On définit l'application

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow \mathbb{K}^m \\ u &\longmapsto (\varphi_1(u), \dots, \varphi_m(u)) \end{aligned}$$

a. Justifier que f est linéaire, déterminer son noyau. Minorer la dimension de ce noyau.

b. Justifier que si $\dim F = n - m$ alors pour tout $k = 1, \dots, m$, le vecteur e_k de \mathbb{K}^m possède un antécédent u_k par f .

En déduire que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ est libre.

c. Démontrer que si $\operatorname{rg} f < m$ alors $\operatorname{im} f$ est inclus dans un hyperplan H de \mathbb{K}^m . En déduire que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ est liée.

d. Conclure.