Feuille de T. D. B10
Dimension

Exercices de cours

1 Soit $E=\mathbb{R}^3$, $F=\mathrm{Vect}\,(u_1,u_2)$ avec :

$$u_1=(3,10,10) \qquad u_2=(6,7,-6)$$

Enfin soit $G=\{\,(x,y,z)\in E \mid 10x-6y+3z=0\}$.

a. Donner la dimension de F est démontrer qu'il est inclus dans G.

b. Justifier que G ne peut être de dimension 3 et en déduire que $F=G$.

2 Soit $E=\mathbb{R}^4$. Déterminer le rang des familles de vecteurs suivantes :

$\mathcal{F}_1=((1,0,0,0),(0,0,1,1),(0,0,0,1))$
$\mathcal{F}_2=((1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(0,1,1,0))$
$\mathcal{F}_3=\varnothing$
$\mathcal{F}_4=((1,0,0,0),(2,0,0,0),\dots,(n,0,0,0)) \quad n\in\mathbb{N}^*$
$\mathcal{F}_5=((1,0,0,0),(2,1,0,0),(3,2,1,0),(4,3,2,1),(5,4,3,2))$

3 Démontrer qu'il existe une unique forme linéaire $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ telle que :

$$\varphi(1,1,1)=3 \quad \varphi(1,2,3)=5 \quad \varphi(1,3,6)=-2$$

Calculer $\varphi(u)$ pour tout élément $u=(x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$.

4 Soit f l'application linéaire définie par

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (3x+3y+3z+3t, \\ & & 3x-3y+z+t, \\ & & 2x+2y+z+t) \end{array}$$

Calculer le noyau de f et démontrer que f est surjective.

Travaux dirigés

1 Dans l'espace vectoriel $E=\mathbb{R}^4$ on considère les sous-espaces vectoriels :

$$F=\{\,(x,y,z,t)\in E \mid 3x-y-z=2y+t=0\}$$

$$G=\mathrm{Vect}\,(v_1,v_2,v_3) \quad \text{où} \quad v_1=(1,-1,2,2),\ v_2=(2,1,4,-2),\ v_3=(1,2,2,-4)$$

Donner une base et la dimension des sous-espaces vectoriels F, G, $F\cap G$, et $F+G$.

2 Dans $E=\mathbb{R}^3$ on note F le sous-espace vectoriel engendré par $u_1=(7,5,0)$ et $u_2=(6,10,5)$.

a. Démontrer que F est le plan vectoriel d'équation $5x-7y+8z=0$.

b. Soit G la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u_3=(8,9,3)$. Démontrer que G est un supplémentaire de F dans E.

3 Dans l'espace vectoriel $E=\mathbb{R}^4$ on considère la famille $\mathcal{F}$ composée des vecteurs :

$$u_1=(1,-1,-1,-1) \qquad u_2=(2,0,2,0) \qquad u_3=(-1,-1,2,-1)$$

a. Démontrer que cette famille est libre.

b. Soit G l'ensemble des vecteurs (x,y,z,t) tels que $y=t$. Démontrer que $\mathrm{Vect}\,\mathcal{F}=G$ par inclusion puis en raisonnant sur la dimension.

c. Compléter $\mathcal{F}$ en une base de E.

4 Soit $E=\mathbb{R}^4$ et F, G, H les sous-ensembles de E d'équations respectives :

$$F: x-2y+2t=3y+z=0$$
$$G: 4x-2y+z=2x+z+2t=0$$
$$H: x+t=x-y-z=0$$

a. Justifier que F, G, H sont des sous-espaces vectoriels de E et donner leurs dimensions.

b. Calculer $F\cap G$ et $F\cap H$.

c. En déduire que $F+G=E$, puis démontrer que $F+H$ est le sous-ensemble de E d'équation $x+y+z+2t=0$.

5 Soit $E=\mathbb{R}^4$ puis :

$$F=\{\,(x,y,z,t)\in E \mid x-y+z-t=0\}$$

a. Déterminer la dimension de F.

Soit G le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $u_1=(1,2,3,4)$ et $u_2=(4,3,2,1)$.

b. Démontrer que $F+G=E$. En déduire la dimension de $F\cap G$.

c. Déterminer une base d'un supplémentaire de $F\cap G$ dans F.

6 Soit $E=\mathbb{K}^n$ avec $n\geqslant 2$ et $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de E. Soit F l'ensemble des n-uplets $(x_1,\dots,x_n)$ de E tels que :

$$\forall k=2,\dots,n-1 \qquad 2x_k=x_{k-1}+x_{k+1}$$

a. Prouver que F est un sous-espace vectoriel de E.

b. Démontrer que les vecteurs $u_1=(1,\dots,1)$ et $u_2=(1,2,\dots,n)$ appartiennent à F.

c. On note $G=\mathrm{Vect}\,(e_3,\dots e_n)$. Démontrer que $F\cap G=\{0_E\}$.

d. Que peut-on en déduire sur la dimension de F ?

7 Soit H et H' deux hyperplans distincts d'un espace vectoriel E de dimension n.

Déterminer $H+H'$ et en déduire la dimension de $H\cap H'$.

8 Soit $E=\mathbb{R}_n[X]$ avec $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ puis :
$$F=\{\,P\in E \mid P(1)=P(2)=0\}$$

a. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E et en donner une base.

b. Démontrer que $\mathbb{R}_1[X]$ est un supplémentaire de F dans E.

9 Soit n un entier naturel. On note $\mathcal{M}=\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, puis $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}$ contenant les matrices respectivement triangulaires supérieures et triangulaires inférieures.

a. Déterminer les sous-espaces $\mathcal{T}+\mathcal{T}'$ et $\mathcal{T}\cap\mathcal{T}'$, donner leurs dimensions.

b. Démontrer que l'application $M\mapsto {}^tM$ est un automorphisme de $\mathcal{M}$.
Quelle est l'image de $\mathcal{T}$ par cet automorphisme ?

c. Déduire des deux questions précédentes la dimension de $\mathcal{T}$ et de $\mathcal{T}'$.

d. Retrouver ce résultat directement en exhibant des bases de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$.

10 Pour tout $k\in\mathbb{N}$ on définit sur $\mathbb{R}$:
$$f_k : t\mapsto \cos^k t \quad \text{et} \quad g_k : t\mapsto \cos(kt)$$

a. Démontrer que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.

b. Démontrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$f_n\in \operatorname{Vect}(g_0,\dots,g_n)$$

c. Déduire des questions précédentes que la famille $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.

11 Déterminer si chacune des applications linéaires f ci-dessous est injective ou surjective.

a. $f:\begin{array}{rcl}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x-y+z,x+z)\end{array}$

b. $f:\begin{array}{rcl}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (x,y) & \longmapsto & (3x-12y,0,-2x+8y)\end{array}$

c. $f:\begin{array}{rcl}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z,x+y+2z,x+2y+2z)\end{array}$

d. $f:\begin{array}{rcl}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4\\ (x,y,z) & \longmapsto & (4y-z,3x+2y+z,\\ & & -3x+2y-2z,x-6y+z)\end{array}$

e. $f:\begin{array}{rcl}\mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4\\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (3y+2z+t,3x+z-t,\\ & & 5x-y+z-2t,4x+y+2z-t)\end{array}$

f. $f:\begin{array}{rcl}\mathbb{R}^5 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4\\ (x_1,\dots,x_5) & \longmapsto & (x_1+2x_2,x_1-2x_2-2x_3\\ & & x_2+x_3-x_4,2x_2-2x_4+x_5)\end{array}$

12 Soit n un entier positif non-nul et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par :
$$f(x_1,\dots,x_n)=(x_2,x_3,\dots,x_n,x_1)$$
Déterminer le rang de f puis de celui de $g=\mathrm{Id}-f$.

13 Pour tout $y\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ on note :
$$\varphi(y)=y''-4y'+20y$$

a. Justifier que φ est une application linéaire de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

b. Déterminer le noyau de φ.

c. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ fixé. On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n, et $\psi:\begin{array}{rcl}E & \longrightarrow & E\\ y & \longmapsto & \varphi(y).\end{array}$
Démontrer que ψ est bien définie puis que c'est un automorphisme.

14 On note f l'application :
$$f:\begin{array}{rcl}\mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ P & \longmapsto & (P(1),P(2),P(3))\end{array}$$

a. Justifier que f est linéaire.

b. Démontrer que f est un isomorphisme.

c. Justifier qu'il existe un unique polynôme P de degré au plus deux dont la courbe passe par les points de coordonnées $(1,-1)$, $(2,-2)$ et $(3,1)$.

d. On pose : $P_1=\frac{1}{2}(X-2)(X-3)$

$P_2=-(X-1)(X-3)$

$P_3=\frac{1}{2}(X-1)(X-2)$

Démontrer que la famille $\mathcal{B}=(P_1,P_2,P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
Donner l'image de cette base par f.

e. Déterminer le polynôme P dont l'existence et l'unicité ont été démontrées ci-dessus.

15 Soit n un entier naturel. On considère $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}=\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contenant les matrices respectivement symétriques et antisymétriques. On définit l'application :
$$f:\begin{array}{rcl}\mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{M}\\ M & \longmapsto & \frac{1}{2}(M+{}^tM)\end{array}$$

a. Démontrer que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont l'image et le noyau de f.

b. Démontrer que f est un projecteur.
Que peut-on en déduire au sujet de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$?
Quelle est la symétrie associée ?

c. Déterminer les dimensions de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{A}$. Vérifier que leur somme donne le résultat attendu.

16 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f\in\mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{rg} f=\operatorname{rg} f\circ f$.

a. Démontrer que $\operatorname{im} f=\operatorname{im} f\circ f$ et $\ker f=\ker f\circ f$.

b. Démontrer que $E=\operatorname{im} f\oplus\ker f$.

c. Réciproquement, démontrer que si $\operatorname{im} f$ et $\ker f$ sont supplémentaires dans E alors $\operatorname{rg} f=\operatorname{rg} f\circ f$.

17 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f, g deux endomorphismes de E tels que $f+g$ est bijectif.

a. Démontrer que :
$$\operatorname{im} f + \operatorname{im} g = E \quad \text{et} \quad \ker f \cap \ker g = \{0_E\}$$

b. On suppose de plus que $f \circ g = 0$.
Démontrer que $\operatorname{im} g = \ker f$, et que $\ker g$ et $\operatorname{im} f$ en sont deux supplémentaires.

18 Soit f et g deux endomorphismes de E, espace vectoriel de dimension finie n, tels que $f \circ f = 0$ et $f \circ g + g \circ f = \mathrm{Id}_E$. Démontrer que n est pair.

19 Soit n et p deux entiers tels que $1 \leqslant p \leqslant n$, et B un polynôme fixé de degré p. On définit :
$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}_{n-p}[X] \times \mathbb{K}_{p-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ (Q,R) & \longmapsto & BQ+R \end{array}$$

a. Démontrer que f est bien définie et linéaire.

b. Exprimer le degré de $f(Q,R)$ en fonction de ceux de Q et de R. En déduire le noyau de f.

c. Démontrer que f est un isomorphisme.
Quel théorème retrouve-t-on ?

20 Soit E, F, G trois espaces vectoriels de dimensions finies. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$ et $h \in \mathcal{L}(E,G)$.

a. Démontrer que si $h = g \circ f$ alors $\operatorname{im} h \subseteq \operatorname{im} g$ et $\ker f \subseteq \ker h$.

On suppose que $\operatorname{im} h \subseteq \operatorname{im} g$. Le but de la suite est de démontrer qu'il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ tel que $h = g \circ \varphi$.

b. Soit $(w_1, \ldots, w_m)$ une base de $\operatorname{im} h$. Démontrer que chaque w_i possède un antécédent u_i par h et v_i par g.

c. Soit $E_1 = \operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_m)$. Démontrer que E_1 est un supplémentaire de $\ker h$ dans E.

d. Construire une application linéaire $\varphi : E \to F$ vérifiant $h = g \circ \varphi$.

On suppose maintenant que $\ker f \subseteq \ker h$.

e. Construire une application linéaire $\psi : F \to G$ telle que $h = \psi \circ f$.

21 Soit n et m deux entiers avec $0 \leqslant m \leqslant n$.

Soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ une famille de m formes linéaires non-nulles de E, espace vectoriel de dimension n.

Pour tout $k = 1, \ldots, m$ on note $H_k = \ker \varphi_k$.

Soit $F = H_1 \cap \cdots \cap H_m$.

Le but de cet exercice est de démontrer que F est de dimension $n-m$ si et seulement si la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ est libre.

On définit l'application
$$f : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^m \\ u & \longmapsto & (\varphi_1(u), \ldots, \varphi_m(u)) \end{array}$$

a. Justifier que f est linéaire, déterminer son noyau.
Minorer la dimension de ce noyau.

b. Justifier que si $\dim F = n-m$ alors pour tout $k = 1, \ldots, m$, le vecteur e_k de $\mathbb{K}^m$ possède un antécédent u_k par f.
En déduire que la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ est libre.

c. Démontrer que si $\operatorname{rg} f < m$ alors $\operatorname{im} f$ est inclus dans un hyperplan H de $\mathbb{K}^m$. En déduire que la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ est liée.

d. Conclure.