Corrigé partiel du T. D. A9
Dérivation

1 Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

$f_1 : x \mapsto x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ $\qquad f_2 : x \mapsto \arccos\sqrt{1-x^2}$

$f_3 : x \mapsto \ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$ $\qquad f_4 : x \mapsto \arctan \operatorname{sh} x$ $\qquad f_5 : x \mapsto \arccos\frac{1}{\operatorname{ch} x}$

$f_6 : x \mapsto \ln|\tan x|$ $\qquad f_7 : x \mapsto 2\arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \arcsin\sqrt{1-x^2}$

$f_1'(x) = \arctan x$ $\qquad f_2'(x) = \frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad f_3'(x) = -\frac{1}{\sin x}$

$f_4'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$ $\qquad f_5'(x) = \frac{x}{|x|\operatorname{ch} x}$ $\qquad f_6'(x) = \tan x + \cot x$

$f_7'(x) = \left(1+\frac{|x|}{x}\right)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2 Déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivabilité et la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes.

$f_3 : \ x \mapsto \ln(x+\sqrt{x^2-1})$ $\qquad f_5 : \ x \mapsto \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

$f_8 : \ x \mapsto \arcsin(1-x^2)$ $\qquad f_9 : \ x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$

$f_3 : x \mapsto \ln(x+\sqrt{x^2-1})$

Le réel $\sqrt{x^2-1}$ est défini si et seulement si $x^2-1 \geqslant 0$, donc si et seulement si $x \in \,]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$.
Si $x \geqslant 1$ alors $x+\sqrt{x^2-1}$ est strictement positif, donc $f_3(x)$ est défini.
Si $x \leqslant -1$ alors $x+\sqrt{x^2-1} < x+\sqrt{x^2} = x+|x|$, comme x est négatif alors $x+\sqrt{x^2-1} < 0$ donc $f_3(x)$ n'est pas défini.
Finalement f_3 est définie sur $\mathcal{D}_3 = [1,+\infty[$.

Si $x > 1$ alors $x^2-1>0$. La fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction ln est dérivable sur son ensemble de définition, donc par composition la fonction f_3 est dérivable sur $]1,+\infty[$.

Étudions la dérivabilité de f_3 en 1.

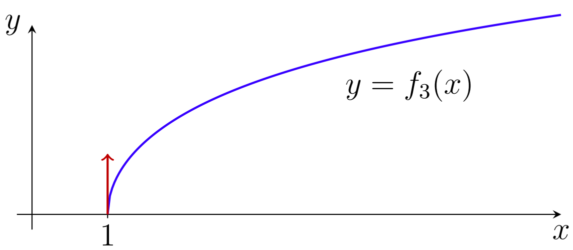
On écrit pour tout $x > 1$:

$$\frac{f_3(x)-f_3(1)}{x-1} = \frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x-1}$$

On sait que
$$\ln(u) \underset{(1)}{\sim} u-1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 1}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=1$$
donc par composition de limites :
$$\frac{f_3(x)-f_3(1)}{x-1} \underset{(1)}{\sim} \frac{x+\sqrt{x^2-1}-1}{x-1} = 1+\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$$
Ceci donne :
$$\lim_{x\to 1}\frac{f_3(x)-f_3(1)}{x-1}=+\infty$$
La fonction f_3 n'est donc pas dérivable en 1.

Finalement f_3 est dérivable sur $]1,+\infty[$ et on calcule :
$$\forall x\in\,]1,+\infty[\qquad f_3'(x)=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

On peut démontrer de plus que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln x$, et tracer la courbe suivante :



$f_5 : x \mapsto \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

La fonction f_5 est définie si $\cos x \neq 1$ et si $\frac{1+\cos x}{1-\cos x} \geqslant 0$. La première condition est valide si et seulement si x n'est pas multiple de 2π, la première est toujours valide, car : $\forall x\in\mathbb{R} \quad -1\leqslant \cos x\leqslant 1$

La fonction f_5 est donc définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

Si $x\neq \pi+2k\pi$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$ alors $\frac{1+\cos x}{1-\cos x}>0$.

Donc par quotient et composition la fonction f_5 est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

On calcule, pour tout x dans cet ensemble :
$$\begin{aligned} f_5'(x) &= -\frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = -\frac{\sin x}{1-\cos x}\sqrt{\frac{1}{(1-\cos x)(1+\cos x)}} \\ &= -\frac{\sin x}{|\sin x|}\frac{1}{1-\cos x} \end{aligned}$$

On étudie maintenant la dérivabilité en $\pi+2k\pi$.

Comme la fonction est 2π-périodique, il suffit d'étudier sa dérivabilité en π.

On peut utiliser le théorème de limite de la dérivée, ou revenir à la définition de la dérivabilité, ce que nous faisons ci-dessous.

Le taux d'accroissement de f_5 en π est :

$$\frac{f_5(x)-f_5(\pi)}{x-\pi}=\frac{1}{x-\pi}\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$$

On pose $h=x-\pi$. Alors :

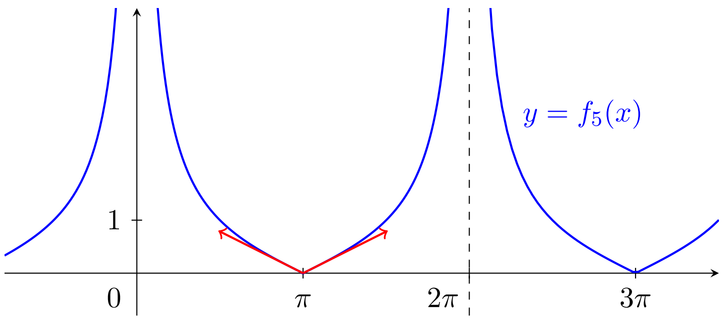
$$\frac{f_5(x)-f_5(\pi)}{x-\pi}=\frac{1}{h}\sqrt{\frac{1-\cos h}{1+\cos h}}\underset{(h\to 0)}{\sim}\frac{1}{h}\sqrt{\frac{h^2}{4}}=\frac{|h|}{2h}$$

On en déduit :

$$\lim_{\substack{x\to\pi\\<}}\frac{f_5(x)-f_5(\pi)}{x-\pi}=-\frac{1}{2}\qquad\lim_{\substack{x\to\pi\\<}}\frac{f_5(x)-f_5(\pi)}{x-\pi}=\frac{1}{2}$$

Ainsi f_5 est dérivable à gauche et à droite en π, de dérivées $f_g'(\pi)=-\frac{1}{2}$ et $f_d'(\pi)=\frac{1}{2}$. Elle n'est donc pas dérivable en π.

La courbe de f_5 est la suivante :



On peut ajouter qu'il est possible de simplifier l'expression de f_5 dès le départ, en multipliant par une quantité conjuguée ou en utilisant les formules en $t=\tan\frac{x}{2}$:

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}\qquad f_5(x)=\frac{|\sin x|}{1-\cos x}=\left|\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\right|$$

Cette dernière expression en particulier explique bien l'aspect de la courbe.

$f_8 : x\mapsto\arcsin(1-x^2)$

La fonction arc-sinus est définie et continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$.

On calcule :

$$\begin{array}{ccccc}-1\leqslant 1-x^2\leqslant 1 & \iff & 0\leqslant x^2\leqslant 2 & \iff & -\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}\\ -1<1-x^2<1 & \iff & 0<x^2<2 & \iff & -\sqrt{2}<x<0\\ & & & & \text{ou}\quad 0<x<\sqrt{2}\end{array}$$

Ainsi, par composition, la fonction f_8 est définie et continue sur $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$ et dérivable sur $\left]-\sqrt{2},0\right[\cup\left]0,\sqrt{2}\right[$.

Pour tout $x\in\left]-\sqrt{2},0\right[\cup\left]0,\sqrt{2}\right[$ on calcule :

$$f_8'(x)=\frac{-2x}{\sqrt{1-(1-x^2)^2}}=\frac{-2x}{|x|\sqrt{2-x^2}}$$

Pour la dérivabilité de f_8 en $\pm\sqrt{2}$ on utilise le théorème de limite de la dérivée :

- la fonction f_8 est continue sur $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$
- la fonction f_8 est dérivable sur $\left]-\sqrt{2}, 0\right[\cup \left]0, \sqrt{2}\right[$
- les limites de f_8' sont :

$$\lim_{x\to-\sqrt{2}} f_8'(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to\sqrt{2}} f_8'(x) = -\infty$$

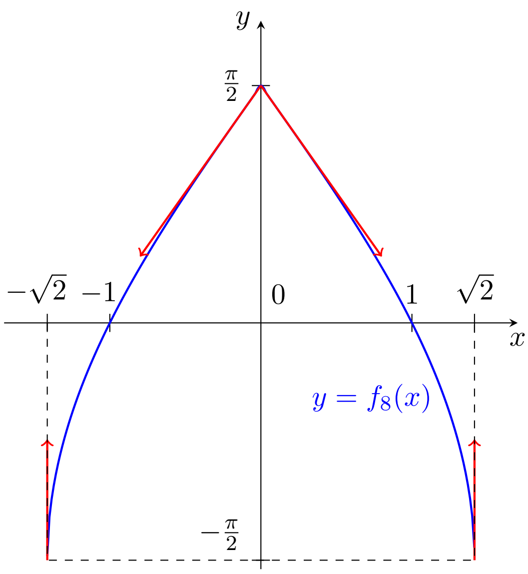
Par le théorème de limite de la dérivée f_8 n'est pas dérivable en $\sqrt{2}$ ni en $-\sqrt{2}$.

Pour la dérivabilité en 0 :

- la fonction f_8 est continue sur $\left[0, \sqrt{2}\right]$
- la fonction f_8 est dérivable sur $\left]0, \sqrt{2}\right[$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f_8'(x) = -\sqrt{2}$.

Par le théorème de limite de la dérivée f_8 est dérivable à droite en 0, de dérivée $-\sqrt{2}$.
De même on montre que f_8 est dérivable à gauche en 0, de dérivée $\sqrt{2}$.
Ainsi f est dérivable à gauche et à droite en 0, mais ses dérivées ne sont pas égales. Donc elle n'est pas dérivable en 0.

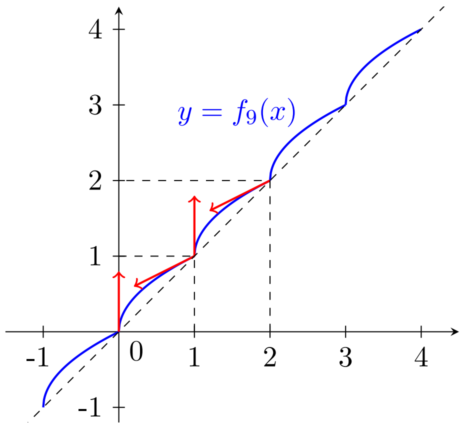
On obtient une courbe comme la suivante :



$f_9 : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$

Cette fonction a été étudiée dans l'exercice 6 de la feuille de TD A8.

Nous avons vu qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$, et que sa courbe est la suivante :



La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, de dérivée nulle. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, comme $x - \lfloor x \rfloor > 0$ alors par composition f_9 est dérivable en x.

Ainsi f_9 est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \qquad f_9'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x - \lfloor x \rfloor}}$$

Pour la dérivabilité en un point n entier on calcule les limites à gauche et à droite du taux d'accroissement. On rappelle :

$$\begin{aligned} &\forall x \in [n-1, n[\qquad f_9(x) = n - 1 + \sqrt{x - n + 1} \\ &\forall x \in [n, n+1[\qquad f_9(x) = n + \sqrt{x - n} \end{aligned}$$

Donc :

$$\lim_{\substack{x \to n \\ <}} \frac{f_9(x) - f_9(n)}{x - n} = \lim_{\substack{x \to n \\ <}} \frac{\sqrt{x - n + 1} - 1}{x - n} = \lim_{\substack{x \to n \\ <}} \frac{1}{\sqrt{x - n + 1} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{x \to n \\ >}} \frac{f_9(x) - f_9(n)}{x - n} = \lim_{\substack{x \to n \\ >}} \frac{\sqrt{x - n}}{x - n} = \lim_{\substack{x \to n \\ >}} \frac{1}{\sqrt{x - n}} = +\infty$$

On en déduit que f_9 est dérivable à droite en n,de dérivée $f_d'(n) = \frac{1}{2}$, mais qu'elle n'est pas dérivable à gauche.

3 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes.
Étudier leurs prolongements par continuité et la dérivabilité de ceux-ci.

$$f_1 : x \mapsto x \sin \frac{1}{x} \qquad\qquad f_2 : x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$$

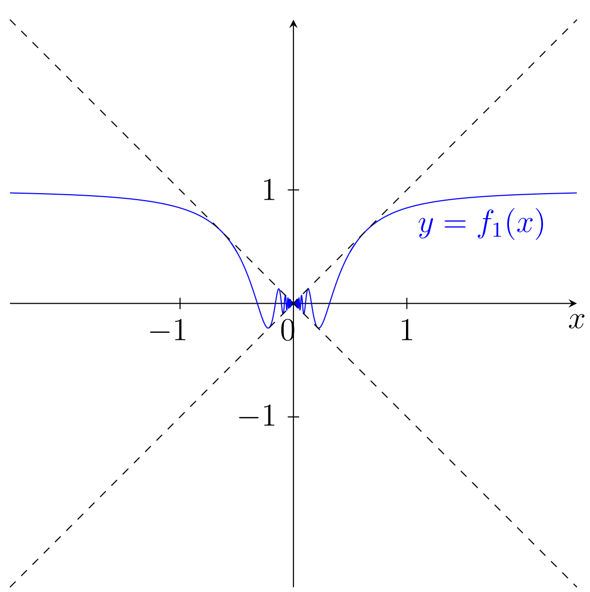
Les fonctions f_1 et f_2 sont définies sur $\mathbb{R}^*$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ par composition.
Comme la fonction $|\sin|$ est majorée par 1 alors :

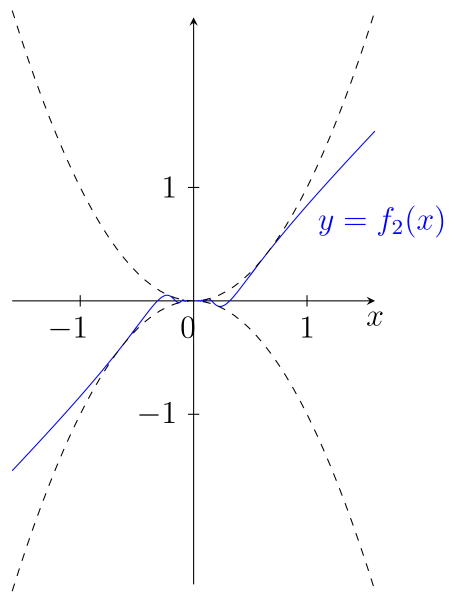
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad |f_1(x)| \leqslant |x| \qquad \text{et} \qquad |f_2(x)| \leqslant \left|x^2\right|$$

Par théorème d'encadrement, les deux fonctions tendent vers 0 lorsque x tend vers 0.
On peut donc les prolonger par continuité en posant $f_1(0) = f_2(0) = 0$.
Étudions maintenant leur dérivabilité en 0, grâce à leurs taux d'accroissement.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad \frac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = \sin \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad \frac{f_2(x) - f_1(0)}{x - 0} = x \sin \frac{1}{x} = f_1(x)$$

Nous avons vu que la fonction $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ n'admet pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$. Donc la fonction f_1 n'est pas dérivable en 0. Par contre la fonction f_2 est dérivable en 0, de dérivée $f_2(0) = 0$.
Voici l'allure des courbes de ces fonctions :





La fonction f_2 est un exemple de fonction dérivable dont la dérivée n'est pas continue. En effet, on a démontré qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, que sa dérivée en 0 est 0, et on calcule :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_2'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

La fonction $x \mapsto 2x \sin \frac{1}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, mais la fonction $x \mapsto \cos \frac{1}{x}$ n'admet pas de limite lorsque x tend vers 0. On le démontre de la même façon que pour $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$.

Donc $f_2'(x)$ n'admet pas de limite lorsque x tend vers 0. En particulier elle ne tend pas vers $f_2'(0)$, et donc elle n'est pas continue.

Ainsi la fonction f_2 est dérivable mais sa dérivée n'est pas continue.

4 Établir les égalités suivantes.

a. $\forall x \in [-1,1] \qquad \arcsin\left(2x^2-1\right) = 2\arcsin|x| - \dfrac{\pi}{2}$

a. On pose : $\quad f(x) = \arcsin(2x^2-1) - 2\arcsin|x|$

On utilise les équivalences :

$$\begin{array}{lllll} \forall x \in \mathbb{R} & -1 \leqslant 2x^2-1 \leqslant 1 & \iff & -1 \leqslant x \leqslant 1 & \\ & -1 < 2x^2-1 < 1 & \iff & -1 < x < 0 & \text{ou} \quad 0 < x < 1 \\ & -1 \leqslant |x| \leqslant 1 & \iff & -1 \leqslant x \leqslant 1 & \\ & -1 < |x| < 1 & \iff & -1 < x < 1 & \end{array}$$

La fonction $x \mapsto 2x^2-1$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction arcsin est définie et continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$.

La fonction $x \mapsto |x|$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Par composition et soustraction, la fonction f est définie et continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,0[\,\cup\,]0,1[$.

Sa dérivée est :

$$\begin{aligned} \forall x \in\,]-1,0[\,\cup\,]0,1[\qquad f'(x) &= \frac{4x}{\sqrt{1-(2x^2-1)^2}} - 2\frac{x}{|x|}\frac{1}{\sqrt{1-|x|^2}} \\ &= \frac{4x}{2|x|\sqrt{1-x^2}} - \frac{2x}{|x|\sqrt{1-x^2}} = 0 \end{aligned}$$

Comme sa dérivée est nulle alors f est constante sur tout intervalle. Elle est donc constante sur $]-1,0[$ et $]0,1[$.

Par continuité, f est constante sur $[-1,0]$ et $[0,1]$, donc sur $[-1,1]$.

En effet, si K est la valeur de f sur $]0,1[$:

$$\forall x \in\,]0,1[\qquad f(x) = K$$

Alors :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = K$$

Or comme f est continue en 0 et en 1 alors :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

On en déduit que $f(0) = f(1) = K$, donc f est constante sur $[0,1]$ égale à K.

On procède de même sur $[-1,0]$, donc finalement f est constante sur $[-1,1]$.

On calcule que $f(0) = -\frac{\pi}{2}$ donc f est constante égale à $-\frac{\pi}{2}$ sur $[-1,1]$, ce qui donne le résultat demandé.

5 Étudier les fonctions suivantes.

$$f_2 : x \mapsto \arccos \frac{2\sqrt{x}}{x+1} \qquad\qquad f_3 : x \mapsto \arccos \operatorname{th} x + \arcsin \frac{1}{\operatorname{ch} x}$$

$f_2 : x \mapsto \arccos \frac{2\sqrt{x}}{x+1}$

On étudie d'abord la fonction $g : x \mapsto \frac{2\sqrt{x}}{x+1}$

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_+$, par quotient elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad g'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{x}(x+1)^2}$$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Pour la limite en $+\infty$ on a utilisé l'équivalence : $g(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} \longrightarrow 0$

La fonction arccos est définie et continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $]-1, 1[$.

Par composition et d'après le tableau de variations ci-dessus, la fonction f_2 est définie est continue sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

Sa dérivée est :

$$\forall x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[\qquad f_2'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}(x+1)|x-1|}$$

Pour la dérivabilité en 0 et en 1 on applique trois fois le théorème de limite de la dérivée :

- la fonction f_2 est continue sur $[0, +\infty[$
- la fonction f_2 est dérivable sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$
- les limites de f_2' sont :

$$\lim_{x \to 0} f_2'(x) = +\infty \qquad\qquad \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f_2'(x) = -\frac{1}{2} \qquad\qquad \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f_2'(x) = \frac{1}{2}$$

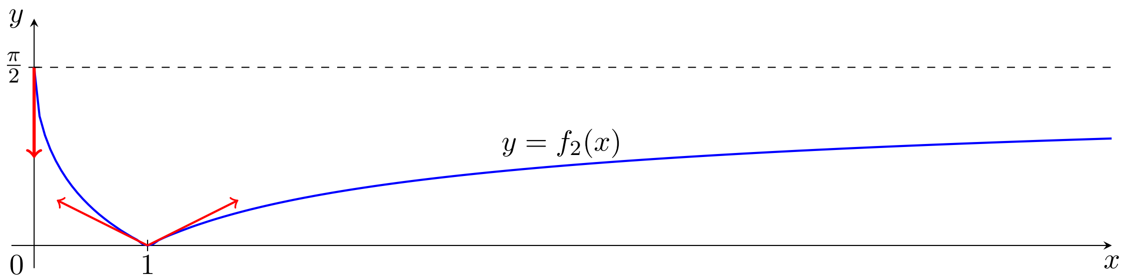
D'après le théorème de limite de la dérivée f_2 n'est pas dérivable en 0, elle est dérivable à gauche en 1 de dérivée $-\frac{1}{2}$ et à droite en 1 de dérivée $\frac{1}{2}$.

Ces deux dernières dérivées sont différentes donc f_2 n'est pas dérivable en 1.

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0			1		$+\infty$
$f_2'(x)$	$\|\|$	$-\infty$	$-$	$-\frac{1}{2}$ $\|\|$ $\frac{1}{2}$	$+$	
$f_2(x)$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$		0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

Puis la courbe :



$f_3 : x \mapsto \arccos \operatorname{th} x + \arcsin \frac{1}{\operatorname{ch} x}$

Les fonctions hyperboliques sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{ch} x \geqslant 1 \qquad \text{et} \qquad (\operatorname{ch} x = 1 \iff x = 0)$$

Ceci montre que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \frac{1}{\operatorname{ch} x} \in \left]0, 1\right] \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{1}{\operatorname{ch} x} = 1 \iff x = 0\right)$$

La fonction arcsin est définie et continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$.

Par composition la fonction $x \mapsto \arcsin \frac{1}{\operatorname{ch} x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

La fonction arccos est définie et continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$. Or on sait que la fonction th est dérivable et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad -1 < \operatorname{th} x < 1$$

Par composition la fonction $x \mapsto \arccos \operatorname{th} x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Par somme la fonction f_3 est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Sa dérivée est :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad f_3'(x) = -\frac{1}{\operatorname{ch} x} - \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x |\operatorname{sh} x|}$$

Comme $\operatorname{sh} x$ est du signe de x alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad f_3'(x) = -\frac{1}{\operatorname{ch} x}\left(1 + \frac{x}{|x|}\right)$$

Ceci donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad f_3'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{\operatorname{ch} x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En particulier, comme $\mathbb{R}_-$ est un intervalle alors la fonction f_3 est constante sur $\mathbb{R}_-$.

Pour la dérivabilité en 0 on utilise le théorème de limite de la dérivée :

- la fonction f_3 est continue sur $\mathbb{R}$
- la fonction f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$
- les limites de f_3' sont :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f_3'(x) = 0 \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f_3'(x) = -2$$

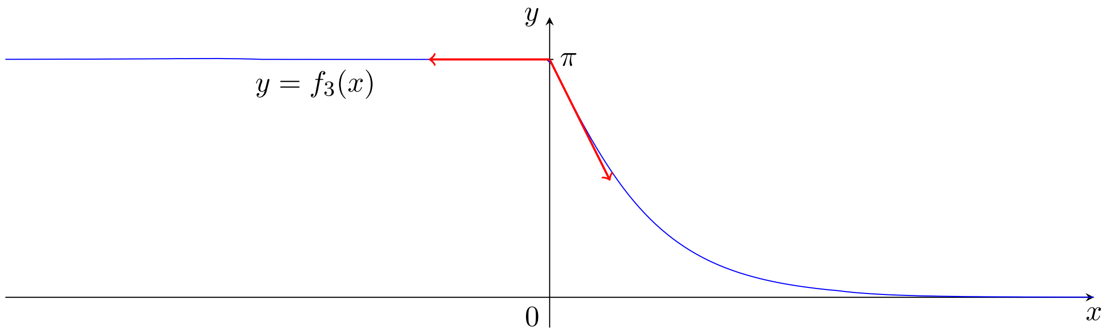
D'après le théorème de limite de la dérivée la fonction f_3 est dérivable à gauche en 0 de dérivée 0 et à droite de dérivée -2.

Ces deux dérivées ne sont pas égales donc la fonction f_3 n'est pas dérivable en 0.

On obtient le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_3'(x)$		0	$\Vert$	-2 $\quad -$	
$f_3(x)$	π	$\nearrow$	π	$\searrow$	0

Puis la courbe :



6 Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable. Démontrer que la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{u(t)} \end{array}$$

est dérivable et donner sa dérivée.

On note x et y les parties réelles et imaginaires de u. Alors x et y sont deux fonctions réelles, et pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\quad u(t) = x(t) + iy(t)$

On en déduit :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad e^{u(t)} = e^{x(t)}e^{iy(t)} = e^{x(t)}\cos y(t) + ie^{x(t)}\sin y(t)$$

Comme la fonction u est dérivable alors par propriété ses parties réelles et imaginaires sont dérivables, donc x et y sont dérivables.

Les fonction exponentielle, cosinus et sinus sont dérivables, donc par composition et produit les fonctions $t \mapsto e^{x(t)}\cos y(t)$ et $t \mapsto e^{x(t)}\sin y(t)$ sont dérivables.

Or ces fonctions sont les parties réelles et imaginaires de la fonction $t \mapsto e^{u(t)}$, donc par propriété cette fonction est dérivable.

On calcule sa dérivée :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R} \qquad f'(t) &= \big(x'(t)e^{x(t)}\cos y(t) - y'(t)e^{x(t)}\sin y(t)\big) \\ &\qquad\qquad + i\big(x'(t)e^{x(t)}\sin y(t) + y'(t)e^{x(t)}\cos y(t)\big) \\ &= e^{x(t)}((x'(t)+iy'(t))\cos y(t) + i(x'(t)+iy'(t))\sin y(t)) \\ &= e^{x(t)}(x'(t)+iy'(t))(\cos y(t) + i\sin y(t)) \\ &= e^{x(t)}u'(t)e^{iy(t)} = u'(t)e^{u(t)}\end{aligned}$$

On a démontré que la formule $(e^u)' = u'e^u$ est valable aussi si u est une fonction complexe.

7 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et a un point intérieur de I. On définit :

$$m : h \longmapsto \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

a. Démontrer que si f est dérivable en a alors m admet une limite finie en 0.

b. La réciproque est-elle vraie ?

a. On peut écrire :

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \frac{1}{2}\left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{f(a-h) - f(a)}{-h}\right)$$

Si f est dérivable en a alors :

$$\lim_{u \to 0} \frac{f(a+u) - f(a)}{u} = f'(a)$$

On en déduit par composition de limites :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \frac{1}{2}(f'(a) + f'(a)) = f'(a)$$

b. La réciproque et fausse : il est possible que m admette une limite en 0 alors que f n'est pas dérivable en a.

Par exemple si f est la fonction valeur absolue et $a = 0$, alors f n'est pas dérivable en 0, mais :

$$\forall h \neq 0 \qquad m(h) = \frac{|h| - |-h|}{2h} = \frac{|h| - |h|}{2h} = 0$$

La fonction m admet une limite en 0 alors que f n'est pas dérivable en a.

On peut ajouter que si f est dérivable à gauche et à droite en a alors la limite de m en 0 est la moyenne entre les dérivées à gauche et à droite de f en a.

8 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Soit f une fonction vérifiant la relation ci-dessus.
On fixe $y \in \mathbb{R}$. Comme f est dérivable alors en dérivant par rapport à x on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x + y) = f'(x)$$

Ceci est valable pour tout $y \in \mathbb{R}$, et en particulier pour $x = 0$:

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad f'(y) = f'(0)$$

Posons $a = f'(0)$. Alors $f' = a$. Comme f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est un intervalle alors il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = ax + b$
Réciproquement, si f est une fonction de la forme $f(x) = ax + b$, alors la relation de l'énoncé équivaut à :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad a(x + y) + b = ax + b + ay + b$$

Elle est vraie si et seulement si $b = 0$.
En conclusion les fonctions dérivables vérifiant la relation $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sont les fonctions linéaires $x \mapsto ax$ où a est un réel quelconque.

9 Démontrer que l'équation différentielle

$$ty' - y = 0 \qquad y(1) = 1$$

possède une unique solution dérivable sur $\mathbb{R}$.

Sur l'ensemble $\mathbb{R}^*$ l'équation équivaut à :

$$y' - \frac{1}{t}y = 0 \tag{1}$$

Le théorème de résolution des équations différentielles de ce type donne les solutions sur un intervalle.
Ici $\mathbb{R}^*$ est l'union des deux intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
Soit $a(t) = \frac{1}{t}$, puis $A(t) = \ln |t|$. Alors A est une primitive de a.
Comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle alors les solutions de l'équation (1) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $y(t) = \lambda e^{A(t)} = \lambda t$, où λ est une constante réelle.
Comme $\mathbb{R}_-^*$ est un intervalle alors les solutions de l'équation (1) sur $\mathbb{R}_-^*$ sont les fonctions $y(t) = \mu e^{A(t)} = -\mu t$, où μ est une constante réelle.
Quitte à remplacer μ par $-\mu$ on peut écrire $y(t) = \mu t$ sur $\mathbb{R}_-^*$.
Sur l'ensemble $\{0\}$ l'équation de départ admet une unique solution : $y(0) = 0$.
Les solutions de l'équation de départ sont par restrictions solutions sur $\mathbb{R}_+^*$, sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\{0\}$, donc ce sont les fonctions :

$$y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto \begin{cases} \lambda t & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ \mu t & \text{si } t < 0 \end{cases} \qquad \text{avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ constantes réelles}$$

On remarque que cette fonction est dérivable à gauche et à droite en 0, de dérivées $f'_g(0) = \mu$ et $f'_d(0) = \lambda$.

Or une solution de l'équation différentielle de départ sur $\mathbb{R}$ est supposée dérivable, donc en particulier dérivable en 0. Ses dérivées à gauche et à droite sont donc égales, ce qui impose $\lambda = \mu$.

La condition initiale $y(1) = 1$ donne $\lambda = 1$, donc finalement la fonction $y : t \mapsto t$ est la solution unique de l'équation proposée.

10 Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables telles que $f(a) = g(a)$ et $f(b) = g(b)$. Démontrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = g'(c)$.

Soit $h = f - g$.

La fonction h est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et $h(a) = h(b) = 0$.

D'après le théorème de Rolle il existe $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$.

Comme $h = f - g$ alors $h' = f' - g'$ donc $h'(c) = f'(c) - g'(c)$, ce qui donne $f'(c) = g'(c)$.

Il existe donc bien $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = g'(c)$.

11 Soit $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

a. On suppose que f est dérivable en a et que $f'(a) > 0$.
   Démontrer qu'il existe $x \in]a, b]$ tel que $f(x) > f(a)$.

b. On suppose que f est deux fois dérivable sur $[a, b]$, que $f(a) = f(b)$, et que $f'(a) > 0$, $f'(b) > 0$. Démontrer que f'' s'annule sur $]a, b[$.

a. On raisonne par contraposée en supposant que pour tout $x \in]a, b]$: $f(x) \leqslant f(a)$.

   Alors pour tout $x > a$: $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0$.

   Cette fonction de x admet $f'(a)$ pour limite lorsque x tend vers a par valeurs supérieures, car f est dérivable an a.

   On en déduit donc $f'(a) \leqslant 0$ par théorème de comparaison.

   Par contraposée si $f'(a) > 0$ alors il existe $x \in]a, b]$ tel que $f(x) > f(a)$.

b. D'après la question précédente il existe $c_1 \in]a, b]$ tel que $f(c_1) > 0$.

   De même, comme $f'(b) > 0$ alors il existe $c_2 \in [a, b[$ tel que $f(c_2) < 0$.

   Par théorème des valeurs intermédiaires, f étant continue, il existe d entre c_1 et c_2 tel que $f(d) = 0$. On a alors $d \in]a, b[$, ceci car c_1 ne peut valoir b et c_2 ne peut valoir a.

   On applique le théorème de Rolle sur les intervalles $[c_1, d]$ et $[d, c_2]$ (ou $[d, c_1]$ et $[c_2, d]$).

   Il existe e_1 strictement entre c_1 et c, e_2 strictement entre c_2 et d, tels que $f'(e_1) = f'(e_2) = 0$.

   Alors $e_1 \neq e_2$. On applique le théorème de Rolle à la fonction f', qui est bien dérivable, sur le segment $[e_1, e_2]$ ou $[e_2, e_1]$. Il montre que f'' s'annule sur ce segment.

$\boxed{\mathbf{13}}$ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique de classe C^1.

a. Démontrer que f' est périodique.

b. Démontrer que f' s'annule en un nombre infini de points.

c. Démontrer que f est lipschitzienne.

a. Soit T une période de f. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x+T) = f(x)$$

La dérivée de la fonction $x \mapsto x+T$ est la fonction $x \mapsto 1$, donc en dérivant on obtient par composition :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x+T) = f'(x)$$

La fonction f' est donc périodique de période T.

b. Comme la fonction f est T-périodique alors $f(0) = f(T)$.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$, donc elle est continue sur $[0, T]$ et dérivable sur $]0, T[$.

D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]0, T[$ tel que $f'(c) = 0$.

Comme la fonction f' est T-périodique alors $f'(c+nT) = 0$ pour tout entier n, ce qui montre que f' s'annule en un nombre infini de points.

c. Comme la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ alors la fonction f' est continue.

Une fonction continue sur un segment est bornée, donc la fonction f' est bornée sur le segment $[0, T]$.

Comme elle est T-périodique alors elle est bornée sur $\mathbb{R}$ tout entier.

En effet la périodicité montre que pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $\quad f([nT, (n+1)T]) = f([0, T])$, et comme $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [nT, (n+1)T]$ alors :

$$f(\mathbb{R}) = f\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [nT, (n+1)T]\right) = f([0, T])$$

Soit M un majorant de $|f'|$.

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et la fonction $|f'|$ est majorée par M donc par inégalité des accroissements finis la fonction f est M-lipschitzienne.

14 Soit P un polynôme scindé de $\mathbb{R}[X]$.

On note $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ ses racines, rangées dans l'ordre strictement croissant.

a. Démontrer qu'il existe des racines $\beta_1, \dots, \beta_{k-1}$ de P' telles que :

$$\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \cdots < \beta_{k-1} < \alpha_k$$

b. Démontrer que P' est scindé.

a. On applique le théorème de Rolle sur chaque intervalle $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$, pour i allant de 1 à $k-1$.

b. On note m_i la multiplicité de α_i. Alors la somme des m_i est égal à n, le degré de P.

Par propriété des polynômes chaque α_i est racine de P' de multiplicité $m_i - 1$.

La somme des multiplicités des racines $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \dots, \beta_{k-1}, \alpha_k$ dans le polynôme P' est donc au minimum :

$$\sum_{i=1}^{k} (m_i - 1) + \sum_{i=1}^{k-1} 1 = n - k + k - = n - 1$$

Comme le polynôme P' est de degré $n-1$ alors il n'admet pas d'autres racines, et donc il est scindé.

15 Soient $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable.

On suppose que $f(a) \neq f(b)$.

On note A et B les points d'affixes $f(a)$ et $f(b)$, et pour tout $t \in [a,b]$, $v(t)$ le vecteur d'affixe $f'(t)$.

Soit $x = \operatorname{Re} f$ et $y = \operatorname{im} f$ la partie réelle et la partie imaginaire de f.

a. Donner en fonction de x et y les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $v(t)$.

b. Démontrer qu'il existe $c \in \,]a,b[$ tel que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $v(c)$ sont colinéaires.

a. Comme $x = \operatorname{Re} f$ et $y = \operatorname{Im} f$ alors pour tout $t \in [a,b]$: $\quad f(t) = x(t) + iy(t)$

Les points A et B ont pour affixes $f(a) = x(a) + iy(a)$ et $f(b) = x(b) + iy(b)$, donc leurs coordonnées sont $(x(a), y(a))$ et $(x(b), y(b))$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ admet donc pour coordonnées $(x(b) - x(a), y(b) - y(a))$.

De plus, par propriété $f'(t) = x'(t) + iy'(t)$, donc le vecteur $v(t)$ d'affixe $f'(t)$ admet pour coordonnées $(x'(t), y'(t))$.

b. Deux vecteurs du plan sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

Le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $v(t)$ est :

$$\det\Big(\overrightarrow{AB}, v(t)\Big) = \begin{vmatrix} x(b) - x(a) & x'(t) \\ y(b) - y(a) & y'(t) \end{vmatrix} = \Big(x(b) - x(a)\Big)y'(t) - x'(t)\Big(y(b) - y(a)\Big)$$

On définit la fonction h par :

$$\forall t \in [a,b] \qquad h(t) = \Big(x(b) - y(a)\Big)y(t) - x(t)\Big(y(b) - y(a)\Big)$$

Cette fonction est combinaison linéaire des fonctions x et y donc elle est continue sur $[a,b]$ et dérivable que $]a,b[$.
On vérifie que $h(a)=h(b)$. En effet :

$$\begin{aligned} h(a)-h(b) &= \Big(\big(x(b)-y(a)\big)y(a)-x(a)\big(y(b)-y(a)\big)\Big) \\ &\quad -\Big(\big(x(b)-y(a)\big)y(b)-x(b)\big(y(b)-y(a)\big)\Big) \\ &= \big(x(b)-y(a)\big)\big(y(a)-y(b)\big)-\big(x(a)-y(b)\big)\big(y(b)-y(a)\big)=0 \end{aligned}$$

D'après le théorème de Rolle il existe $c\in\,]a,b[$ tel que $h'(c)=0$. On calcule :

$$\forall t\in[a,b] \qquad h'(t)=(x(b)-x(a))y'(t)-x'(t)(y(b)-y(a))$$

Il existe donc $c\in\,]a,b[$ tel que $h'(c)=0$, *i.e.*, $\det\big(\overrightarrow{AB},v(c)\big)=0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $v(c)$ sont colinéaires.

16 Démontrer que pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$: $\left|e^{ib}-e^{ia}\right|\leqslant|b-a|$

On peut inverser a et b sans perdre de généralité, donc on suppose $a\leqslant b$.

Méthode 1. La fonction complexe $f: t\mapsto e^{it}$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
Sa dérivée est :

$$\forall t\in\mathbb{R} \qquad f'(t)=ie^{it}$$

Celle-ci est de module 1 donc :

$$\forall t\in\,]a,b[\qquad |f'(t)|\leqslant 1$$

D'après l'inégalité des accroissements finis pour les fonctions complexes ceci implique que :

$$|f(a)-f(b)|\leqslant|a-b|$$

C'est exactement le résultat souhaité.

Méthode 2. On utilise l'angle moyen :

$$e^{ia}-e^{ib}=e^{i\frac{a+b}{2}}\Big(e^{i\frac{a-b}{2}}-e^{-i\frac{a-b}{2}}\Big)=e^{i\frac{a+b}{2}}2i\sin\frac{a-b}{2}$$

On sait que :

$$\forall t\in\mathbb{R} \qquad |\sin t|\leqslant|t|$$

On en déduit

$$\left|e^{ia}-e^{ib}\right|=\left|e^{i\frac{a+b}{2}}\right|2\left|\sin\frac{a-b}{2}\right|\leqslant 2\left|\frac{a-b}{2}\right|=|a-b|$$

Le résultat est démontré.

17 À l'aide du théorème des accroissements finis, déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty}((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}})$

On pose : $\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad f(t) = te^{\frac{1}{t}}$

La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par composition et produit. On calcule :

$$\forall t \in \mathbb{R}^* \qquad f'(t) = \left(1 - \frac{1}{t}\right)e^{\frac{1}{t}}$$

Notons maintenant x un réel strictement positif.

La fonction f est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$ donc d'après le théorème des accroissements finis il existe $c_x \in\ ]x, x+1[$ tel que :

$$f'(c_x) = f(x+1) - f(x)$$

Comme $c_x \in\ ]x, x+1[$ alors par théorème de comparaison c_x tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. Or on constate que :

$$\lim_{t\to+\infty} f'(t) = \lim_{t\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right)e^{\frac{1}{t}} = 1$$

Par composition de limites

$$\lim_{x\to+\infty} f'(c_x) = 1$$

puis par définition de c_x :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}\right) = 1}$$

Remarque. Il est possible de calculer cette limite directement, grâce au changement de variable $h = \frac{1}{x}$.

18 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I. Soit x un point de I, et h un réel non-nul tel que $x + h$ appartient à I.

a. Démontrer qu'il existe un réel $\theta \in\ ]0, 1[$ tel que :
$$f(x+h) = f(x) + hf'(x + \theta h)$$

b. Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, calculer un tel réel θ. Donner une interprétation géométrique de ce dernier résultat.

a. On applique le théorème des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[x, x+h]$ (ou $[x+h, x]$ si h est négatif).

   On supposera dans la suite que h est positif pour simplifier, mais les résultats sont similaires sinon.

   Par énoncé x et $x + h$ sont éléments de I, lequel est un intervalle, donc l'intervalle $[x, x+h]$ est inclus dans I.

   Or f est dérivable sur I, donc elle est continue sur $[x, x+h]$ et dérivable sur $]x, x+h[$.

D'après le théorème des accroissements finis il existe un élément c de $]x, x+h[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Par équivalences :

$$x < c < x+h \iff 0 < c - x < h \iff 0 < \frac{c-x}{h} < 1$$

On pose : $\theta = \frac{c-x}{h}$
Alors $c = x + \theta h$ et donc il existe $\theta \in]0,1[$ tel que $f'(x+\theta h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, ce qui donne :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h)$$

b. Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ alors l'égalité ci-dessus s'écrit :

$$a(x+h)^2 + b(x+h) + c = ax^2 + bx + c + 2h[a(x+\theta h) + b]$$

Ceci équivaut à $\theta = \frac{1}{2}$.
On en déduit que sur une parabole, si on trace une corde reliant deux points A et B d'abscisses a et b, alors la tangente à la parabole parallèle à cette corde est la tangente au point d'abscisse $\frac{a+b}{2}$.

19 On fixe un entier m et on note :

$$I_m = \left]m\pi - \frac{\pi}{2}, m\pi + \frac{\pi}{2}\right[$$

a. Démontrer qu'il existe un unique $\alpha_m \in I_m$ tel que : $\tan \alpha_m = \alpha_m$
b. Déterminer α_0, puis α_{-m} en fonction de α_m.

On suppose dorénavant que m est strictement positif et on pose : $h_m(x) = m\pi + \arctan x$

c. Démontrer que I_m est stable par h_m, et que h_m admet α_m pour unique point fixe.
d. Démontrer que h_m est *contractante* sur I_m, *i.e.,* k-lipschitzienne avec $|k| < 1$.
e. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = m\pi$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = h_m(u_n)$
Démontrer que (u_n) converge vers α_m.

a. La fonction $f_m : x \mapsto \tan x - x$ est continue, strictement croissante sur I_m, de limites $\pm\infty$, donc bijective de I_m dans $\mathbb{R}$.
b. On démontre que $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_{-m} = -\alpha_m$ car $-I_m = I_{-m}$.
c. Comme $\arctan x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors I_m est stable par h_m.
On démontre que $h_m(x) = x$ équivaut à $\tan x = x$, donc x est point fixe de h_m si et seulement si $x = \alpha_m$.
d. $h'_m(x) = \frac{1}{1+x^2}$, majorée par $k_m = \frac{4}{4+\pi^2}$ sur I_m.
On applique l'inégalité des accroissements finis.

e. On démontre par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |u_{n+1} - \alpha_m| \leqslant k_m^n |u_0 - \alpha_m|$$

On applique ensuite le théorème d'encadrement.

20 Soit a et b deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I et (E) l'équation différentielle :

$$y'(t) - a(t)y(t) = b(t)$$

a. Justifier que (E) possède des solutions.

b. Démontrer que ces solutions sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

a. Il s'agit du problème de Cauchy. Comme les fonctions a et b sont continues (car de classe $\mathcal{C}^\infty$), et I est un intervalle, alors l'équation différentielle (E) admet une solution.

Celle-ci serait uniquement déterminée si l'on adjoignait une condition initiale à l'équation différentielle.

b. Soit f une solution de l'équation (E). Ceci signifie que f est une fonction dérivable telle que : $\forall t \in I \quad f'(t) = a(t)f(t) + b(t)$

On démontre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction f est n fois dérivable.

Initialisation. La fonction f est dérivable car elle est solution de (E).

Hérédité. Supposons que f est dérivable n fois pour un entier $n > 0$.

Les fonctions a et b sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. En conséquence les fonctions f, a et b sont dérivables n fois, donc par produit et somme la fonction $t \mapsto a(t)f(t)+b(t)$ est dérivable n fois.

Ainsi f' est dérivable n fois, donc f est dérivable $n+1$ fois. Ceci prouve l'hérédité.

Conclusion. Par récurrence, la fonction f est dérivable n fois pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Ceci signifie exactement que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

21 Calculer les dérivées successives des fonctions suivantes.

$$f_5(x) = \cos 2x \sin 3x \qquad f_6(x) = \ln(2-3x) \qquad f_8(x) = x(x-2)^p \qquad (p \in \mathbb{N})$$

$f_5(x) = \cos 2x \sin 3x$

Par linéarisation : $f_5(x) = \frac{1}{2}(\sin 5x + \sin x)$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f_5^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\Big(5^n \sin(5x + n\frac{\pi}{2}) + \sin(x + n\frac{\pi}{2})\Big)$$

$f_6(x) = \ln(2-3x)$

On démontre par récurrence la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad f_6^{(n)}(x) = -\frac{3^n(n-1)!}{(2-3x)^n}$$

$f_8(x) = x(x-2)^p \quad$ avec $\quad p \in \mathbb{N}$

On pose $g(x) = x$ et $h(x) = (x-2)^p$. La formule de Leibniz donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f_8^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x)$$

Les dérivées successives de g sont $g^{(0)}(x) = x$, $g^{(1)}(x) = 1$, puis $g^{(k)}(x) = 0$ pour $k \geqslant 2$. On en déduit que si $n \geqslant 1$ alors :

$$f_8^{(n)}(x) = x h^{(n)}(x) + n h^{(n-1)}(x)$$

Si $1 \leqslant n \leqslant p$ alors :

$$\begin{aligned} f_8^{(n)}(x) &= x \frac{p!}{(p-n)!}(x-2)^{p-n} + n \frac{p!}{(p-n+1)!}(x-2)^{p-n+1} \\ &= \frac{p!}{(p-n+1)!}(x-2)^{p-n}[(p-n+1)x + n(x-2)] \\ &= \frac{p!}{(p-n+1)!}(x-2)^{p-n}[(p+1)x - 2n] \end{aligned}$$

Si $n = p+1$ alors :

$$f_8^{(n)}(x) = 0 + (p+1) \times p! = (p+1)!$$

Enfin si $n > p+1$ alors $f_8^{(n)}(x) = 0$.

On constate que la formule obtenue pour $n = 1, \ldots, p$ est valable aussi pour $n = 0$ et $n = p+1$, donc finalement :

$$f_8^{(n)}(x) = \begin{cases} \dfrac{p!}{(p-n+1)!}(x-2)^{p-n}[(p+1)x - 2n] & \text{si } 0 \leqslant n \leqslant p+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

22 Calculer les dérivées successives de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x \cos x \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x \sin x. \end{array}$

On pose $h = f + ig$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad h(x) = e^{(1+i)x}$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad h^{(n)}(x) = (1+i)^n e^{(1+i)x}$$

Puis :

$$h^{(n)}(x) = \left(\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n e^{(1+i)x} = 2^{\frac{n}{2}} e^{i\frac{n\pi}{4}} e^{(1+i)x} = 2^{\frac{n}{2}} e^x e^{i\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f^{(n)}(x) = 2^{\frac{n}{2}} e^x \cos\left(x + n\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{et} \quad g^{(n)}(x) = 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)$$

$\boxed{\textbf{23}}$ Déterminer les classes des fonctions suivantes, toutes définies sur $\mathbb{R}$.

$$f_1 : x \mapsto \begin{cases} \ln(x+1) & \text{si } x \geqslant 0 \\ \frac{x}{1-x} & \text{sinon} \end{cases} \qquad f_2 : x \mapsto |x|^3$$

$$f_3 : x \mapsto \begin{cases} x^3 \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad f_4 : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$g_\alpha : x \mapsto \begin{cases} x^\alpha & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

$f_1 : x \mapsto \begin{cases} \ln(x+1) & \text{si } x \geqslant 0 \\ \frac{x}{1-x} & \text{sinon} \end{cases}$

Par composition et quotient cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

Ses premières dérivées sont :

$$f_1^{(1)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{(x-1)^2} & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad f_1^{(2)}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \\ \frac{2}{(1-x)^3} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Étudions maintenant la classe de f_1 en 0.

Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f_1(x) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f_1(x) = 0$ et $f_1(0) = 0$ alors f_1 est continue en 0.

Ceci implique que f_1 est continue sur $\mathbb{R}$, *i.e.*, elle est de classe $\mathcal{C}^0$.

Pour la dérivabilité on constate que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f_1'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f_1'(x) = 1$. Ainsi :

- f_1 est continue sur $\mathbb{R}$,
- f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$,
- $\lim\limits_{x \to 0} f_1'(x) = 1$,

D'après le théorème de limite de la dérivée f_1 est dérivable en 0, de dérivée $f_1'(0) = 1$.

De plus $\lim\limits_{x \to 0} f_1'(x) = f_1'(0)$ donc f_1' est continue en 0.

Ainsi f_1 est de classe $\mathcal{C}^1$.

Pour la dérivabilité seconde, on calcule $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f_1''(x) = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f_1''(x) = 2$.

Ceci montre que f_1' n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ en 0. En fait d'après le théorème de limite de la dérivée elle est dérivable à gauche et à droite, mais de dérivées secondes différentes, donc elle n'est pas dérivable en 0.

En conclusion, f_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ mais pas de classe $\mathcal{C}^2$.

$f_2 : x \mapsto |x|^3$

La fonction valeur absolue est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ donc par produit la fonction f_2 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

La dérivée de la fonction $x \mapsto |x|$ est $x \mapsto \frac{x}{|x|}$. On calcule alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad f_2'(x) = 3x|x| \qquad f_2''(x) = 6|x| \qquad f_2'''(x) = 6\frac{x}{|x|} \qquad f_2^{(4)}(x) = 0$$

Comme la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ alors la fonction f_2 est continue sur $\mathbb{R}$.

Le théorème de limite de la dérivée montre qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec $f_2'(0) = 0$.

Le théorème de limite de la dérivée appliqué à f_2' montre que f_2 est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, avec $f_2''(0) = 0$.

La fonction f_2'' n'est pas dérivable en 0 donc f_2 n'est pas de classe $\mathcal{C}^3$.

Finalement la fonction f_2 est de classe $\mathcal{C}^2$ mais pas de classe $\mathcal{C}^3$.

$f_3 : x \mapsto \begin{cases} x^3 \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Par produit cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. Ses premières dérivées sur cet ensemble sont :

$$f_3^{(0)}(x) = \begin{cases} x^3 \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad f_3^{(1)}(x) = \begin{cases} 3x^2 \ln x + x^2 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$f_3^{(2)}(x) = \begin{cases} 6x \ln x + 5x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad f_3^{(3)}(x) = \begin{cases} 6 \ln x + 11 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On sait par croissances comparées que pour tout $\alpha > 0$: $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha \ln x = 0$

On en déduit :

$$\lim_{x \to 0} f_3^{(0)}(x) = \lim_{x \to 0} f_3^{(1)}(x) = \lim_{x \to 0} f_3^{(2)}(x) = 0$$

On montre que la fonction f_3 est continue en 0 (car $f_3(0) = 0$), puis grâce au théorème de limite de la dérivée qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0 avec $f_3'(0) = 0$, puis qu'elle est de classe $\mathcal{C}^2$ en 0 avec $f_3''(0) = 0$, et enfin qu'elle n'est pas de classe $\mathcal{C}^3$.

Pour ce dernier point on peut aussi appliquer la définition de la dérivabilité :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f_3^{(2)}(x) - f_3^{(2)}(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} (6 \ln x + 5) = -\infty$$

Donc $f_3^{(2)}$ n'est pas dérivable à droite en 0, et *a fortiori* $f_3^{(2)}$ n'est pas dérivable.

En conséquence f_3 n'est pas trois fois dérivable, et donc f_3 est de classe $\mathcal{C}^2$.

$f_4 : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^0$ et dérivable, mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Par composition et produit f_4 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

Démontrons qu'elle est dérivable en 0 :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad \frac{f_4(x) - f_4(0)}{x - 0} = x \sin \frac{1}{x}$$

La fonction $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ est bornée et la fonction $x \mapsto x$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, donc le produit $x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0. On en déduit que f_4 est dérivable en 0, de dérivée $f_4'(0) = 0$.

Ainsi f_4 est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est :

$$f_4' : x \mapsto \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette dérivée n'est pas continue en 0. En effet, si on pose $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ alors : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f_4'(x_n) = -1$

On a donc

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} f_4'(x_n) = -1 \neq f_4'(0)$$

La fonction f_4' n'est pas continue en 0.

Finalement nous avons démontré que la fonction f_4 est de classe $\mathcal{C}^0$, mais pas de classe $\mathcal{C}^1$, bien qu'elle soit dérivable.

Elle fournit donc un exemple de fonction dérivable à dérivée non continue.

$$g_\alpha : x \mapsto \begin{cases} x^\alpha & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^{\lceil \alpha \rceil - 1}$ si α est strictement positif, aucune sinon.

Tout d'abord g_α est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, car la fonction $x \mapsto 0$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, ceci car : $\forall x > 0 \quad x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$

Cette dernière formule permet aussi de retrouver la limite de g_α à droite en 0. On obtient :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} g_\alpha(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} g_\alpha(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

On en déduit que g_α est continue en 0 si et seulement si $\alpha > 0$.

On suppose dorénavant $\alpha > 0$ et on détermine la classe de g_α en 0.

Il est clair qu'elle est dérivable à gauche, de dérivée nulle. Pour la dérivée à droite :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{g_\alpha(x) - g_\alpha(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^{\alpha - 1}$$

Ainsi f est dérivable à droite en 0 si et seulement si $\alpha \geqslant 1$. Si $\alpha = 1$ alors cette dérivée à droite est égale à 1, donc différente de celle à gauche. Si $\alpha > 1$ alors la dérivée à droite est nulle, donc g_α est dérivable en 0, de dérivée nulle.

Ainsi g_α est dérivable en 0 si et seulement si $\alpha > 1$.

On démontre par récurrence la propriété suivante, définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathcal{P}_n : \quad \text{Si } \lceil \alpha \rceil = n \text{ alors } g_\alpha \text{ est de classe } \mathcal{C}^{n-1} \text{ mais pas de classe } \mathcal{C}^n.$$

Initialisation. Supposons que $\lceil \alpha \rceil = 1$, *i.e.*, $\alpha \in]0, 1]$. D'après ce qui précède g_α est continue, donc de classe $\mathcal{C}^0$, mais elle n'est pas dérivable en 0, donc pas de classe $\mathcal{C}^1$.

La propriété est vraie au rang $n = 1$.

Hérédité. Supposons que la propriété est établie au rang n pour un entier $n \geqslant 1$.

Soit α un réel tel que $\lceil \alpha \rceil = n+1$, *i.e.*, $n < \alpha \leqslant n+1$.

Alors $\alpha > 1$ donc g_α est dérivable. Sa dérivée est :

$$g'_\alpha : x \mapsto \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi $g'_\alpha = \alpha g_{\alpha-1}$. Comme $\lceil \alpha \rceil = n+1$ alors $\lceil \alpha - 1 \rceil = n$, donc par hypothèse de récurrence $g_{\alpha-1}$ est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ mais pas de classe $\mathcal{C}^n$.

Ainsi g_α est dérivable, de dérivée de classe $\mathcal{C}^{n-1}$, donc g_α est de classe $\mathcal{C}^n$.

Comme g'_α n'est pas de classe $\mathcal{C}^n$ alors g_α n'est pas de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

L'hérédité est démontrée.

Conclusion. Par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Ceci montre que g_α est de classe $\mathcal{C}^{\lceil \alpha \rceil - 1}$ si $\alpha > 0$, mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^0$ sinon.

24 Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & xe^{x^2} \end{array}$

a. Démontrer que f est bijective.

b. Justifier que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

a. Par composition et produit la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et *a fortiori* elle est dérivable. On obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = (2x^2+1)e^{x^2}$$

Cette dérivée est strictement positive donc f est strictement croissante.

Par théorème, f est continue et strictement croissante donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R})$.

Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Ceci montre que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

b. Par théorème, comme f est dérivable alors f^{-1} est dérivable sur l'ensemble :

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \mid f'(f^{-1}(x)) \neq 0 \right\}$$

La fonction f' étant strictement positive, f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Par théorème du cours, comme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ alors sa réciproque f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de dérivabilité, et donc f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On peut démontrer que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sans utiliser le théorème, de la façon suivante :

Le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque affirme que la dérivée de f^{-1} est :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : f^{-1} est n fois dérivable.

On démontre par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation. Nous avons vu ci-dessus que f^{-1} est dérivable.

Hérédité. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ on sait que f^{-1} est n fois dérivable.

On sait que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc f' est n fois dérivable, puis par composition $f' \circ f^{-1}$ est n fois dérivable.

La fonction inverse est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc la fonction $\frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ est n fois dérivable.

Ceci montre que $(f^{-1})'$ est n fois dérivable.

Ainsi f^{-1} est $n+1$ fois dérivable. L'hérédité est établie.

Conclusion. Par récurrence f^{-1} est n fois dérivable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui montre que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

25 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

a. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

b. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x < 0 \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{\frac{1}{x}}$$

c. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

a. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ car :

- la fonction $x \mapsto 0$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$
- par composition la fonction $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_-^*$.

b. Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x < 0 \qquad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{\frac{1}{x}}$$

On démontre par récurrence que cette proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. La proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie avec $P_0 = 1$. En effet, pour tout $x > 0$:

$$f^{(0)}(x) = e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^0} e^{\frac{1}{x}}$$

Hérédité. Supposons que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x < 0 \qquad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{\frac{1}{x}}$$

Par produit et quotient la fonction $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$. On calcule sa dérivée :

$$\forall x > 0 \qquad f^{(n+1)}(x) = \frac{x^2 P_n'(x) - (2nx+1) P_n(x)}{x^{2(n+1)}} e^{\frac{1}{x}}$$

Posons

$$P_{n+1} = X^2 P_n' - (2nX + 1)P_n$$

Comme P_n est un polynôme alors P_{n+1} est un polynôme et :

$$\forall x < 0 \qquad f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{x^{2(n+1)}} e^{\frac{1}{x}}$$

La proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est démontrée.

Ceci prouve que la proposition $\mathcal{P}_n$ est héréditaire.

<u>Conclusion.</u> Par récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. On sait déjà que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, démontrons que f est également de classe $\mathcal{C}^\infty$ en 0.

Pour ceci on considère la proposition :

$$\mathcal{P}_n : f \text{ est de classe } \mathcal{C}^n \text{ en } 0 \text{ et } f^{(n)}(0) = 0$$

On démontre par récurrence que cette proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

<u>Initialisation.</u> Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} e^{\frac{1}{x}} = 0$ alors $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$, ce qui montre que f est continue en 0. La proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie.

<u>Hérédité.</u> Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie. Alors la fonction $f^{(n)}$ est définie en 0 et $f^{(n)}(0) = 0$. De plus $f^{(n)}$ est continue en 0.

Démontrons que la fonction $f^{(n+1)}$ admet 0 pour limite en 0.

Tout d'abord $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f^{(n+1)}(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} 0 = 0$.

Ensuite d'après la question précédente il existe un polynôme P_{n+1} tel que :

$$\forall x < 0 \qquad f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{x^{2(n+1)}} e^{\frac{1}{x}}$$

En posant $y = \frac{1}{x}$ on obtient

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{x^{2(n+1)}} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \to -\infty} y^{2(n+1)} e^y$$

Par croissances comparées cette limite est nulle. Comme $x \mapsto P_{n+1}(x)$ est une fonction polynomiale alors elle admet une limite finie en 0 et donc :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{P_{n+1}(x)}{x^{2(n+1)}} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

Finalement :

$$\lim_{x \to 0} f^{(n+1)}(x) = 0$$

Ainsi on sait que :

- $f^{(n)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ — par hypothèse de récurrence
- $f^{(n+1)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ — car f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$

- $\lim_{x \to 0} f^{(n+1)}(x) = 0$

  D'après le théorème de limite de la dérivée $f^{(n)}$ est dérivable en 0 et $f^{(n+1)}(0) = 0$.
  La fonction $f^{(n+1)}$ est continue en 0 car $\lim_{x \to 0} f^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(0)$, donc f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ en 0. La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est démontrée.
  Ainsi la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie au rang $n+1$ si elle l'est au rang n.
  Conclusion. Par récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  Ceci implique que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en 0, et finalement f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

26 Soit I un intervalle non réduit à un point. Déterminer les fonctions convexes et concaves sur I.

Soit a un point de I. Comme f est convexe et concave alors la fonction pente p_a est croissante et décroissante, donc constante.
Soit α sa valeur. Alors :

$$\forall x \in I \setminus \{a\} \qquad f(x) = f(a) + \alpha(x-a)$$

On remarque que cette égalité est valable aussi pour $x = a$.
Elle montre que f est affine : en posant $\beta = f(a) - \alpha a$ on obtient :

$$\forall x \in I \qquad f(x) = \alpha x + \beta$$

Réciproquement, si la fonction f est affine, *i.e.*, de la forme $f(x) = \alpha x + \beta$ alors toutes ses fonctions pentes s'écrivent $p_a(x) = \alpha$, elles sont constantes donc croissantes et décroissantes, et ainsi f est convexe et concave.
On a démontré que les fonctions convexes et concaves sont les fonctions affines, *i.e.*, les fonctions donc les courbes sont des droites.

27 Démontrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe majorée est constante.

Soit M un majorant de f. On peut alors majorer la fonction pente en 0 :

$$\forall x > 0 \qquad p_0(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} \leqslant \frac{M - f(0)}{x}$$
$$\forall x < 0 \qquad p_0(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} \geqslant \frac{M - f(0)}{x}$$

Comme f est convexe alors la fonction p_0 est croissante. D'après le théorème de la limite monotone elle admet des limites en $-\infty$ et $+\infty$.
Comme $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{M - f(0)}{x} = 0$ alors par théorème de comparaison :

$$\lim_{x \to +\infty} p_0(x) \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} p_0(x) \geqslant 0$$

De plus la limite de p_0 en $-\infty$ est sa borne inférieure et sa limite en $+\infty$ est sa borne supérieure, donc $\operatorname{Sup} p_0 \leqslant 0$ et $\operatorname{Inf} p_0 \geqslant 0$, ce qui montre que $\operatorname{Inf} p_0 = \operatorname{Sup} p_0 = 0$, donc p_0 est nulle sur $\mathbb{R}^*$.
On obtient : $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = f(0)$
Cette égalité est vraie aussi pour $x = 0$, donc f est constante.

28 Soit f une fonction convexe sur un intervalle I non réduit à un point.

a. Soit a et b deux points de I avec $a < b$.

Démontrer que la courbe de f est au-dessus de la corde reliant les points d'affixes a et b sur les intervalles $I \cap]-\infty, a]$ et $I \cap [b, +\infty[$.

b. On suppose que I est borné. Démontrer que f est minorée.

a. La fonction pente en a est croissante sur $I \setminus \{a\}$, donc :

$$\forall x \in I \setminus \{a\} \qquad \begin{aligned} x \leqslant b &\implies p_a(x) \leqslant p_a(b) \\ x \geqslant b &\implies p_a(x) \geqslant p_a(b) \end{aligned}$$

Si $x < a$ alors $x \leqslant b$ et $x - a < 0$ donc : $f(x) \geqslant p_a(b)(x-a) + f(a)$.

Si $x \geqslant b$ alors $x > a$ puis $x - a > 0$ donc : $f(x) \geqslant p_a(b)(x-a) + f(a)$.

Ceci donne :

$$\forall x \in I \setminus \{a\} \qquad \begin{aligned} x < a &\implies f(x) \geqslant p_a(b)(x-a) + f(a) \\ x \geqslant b &\implies f(x) \geqslant p_a(b)(x-a) + f(a) \end{aligned}$$

La corde reliant les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ admet pour équation $y = p_a(b)(x-a) + f(a)$, donc nous venons de démontrer que la courbe de f est au-dessus de cette corde sur les intervalles $I \cap]-\infty, a[$ et $I \cap]b, +\infty[$.

b. Soit a, b, c trois points de I avec $a < b < c$.

Soit $\mathcal{D}_1$ la corde reliant les points d'abscisses a et b,
$\mathcal{D}_2$ la corde reliant les points d'abscisses b et c.

D'après la question précédente la courbe de f est au-dessus de la droite $\mathcal{D}_1$ sur l'intervalle $I \cap [b, +\infty[$ et au-dessus de la droite $\mathcal{D}_2$ sur l'intervalle $I \cap]-\infty, b]$.

Les fonctions affines sont bornées sur un intervalle borné, donc f est minorée sur $I \cap [b, +\infty[$ et sur $I \cap]-\infty, b]$, et ainsi f est minorée sur I.

29 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tous réels strictement positifs $x_1, \dots, x_n$ on définit :

$$A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad G = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \qquad H = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)^{-1}$$

a. Démontrer que $H \leqslant G \leqslant A$.

b. Démontrer que pour tout $(x, y, z) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$:

$$x^3 + y^3 + z^3 \geqslant 3xyz \qquad \text{et} \qquad (x + y + z)^3 \geqslant 27xyz$$

c. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sqrt[n]{n!} \leqslant \frac{n+1}{2}$$

a. On sait que la fonction ln est concave. En effet elle est deux fois dérivable, de dérivée seconde $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2}$, cette dérivée seconde est négative donc la fonction est concave. On applique l'inégalité de Jensen aux réels $x_1, \dots, x_n$, avec les poids $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}$. Ces poids sont bien compris entre 0 et 1, de somme égale à 1. On obtient :

$$\ln\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n}\lambda_k \ln(x_k)$$

Par application de la fonction exponentielle, croissante, on obtient :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \geqslant e^{\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln(x_k)\right)} = \prod_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n}\ln x_k} = \prod_{k=1}^{n} x_k^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}$$

Ceci donne exactement $G \leqslant A$.

En remplaçant les x_i par $\frac{1}{x_i}$, lesquels sont bien des réels strictement positifs, on obtient :

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1 \cdots x_n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}$$

Ceci donne $\frac{1}{G} \leqslant \frac{1}{H}$, donc $H \leqslant G$.

b. Pour $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ puis $(x_1, x_2, x_3) = (x^3, y^3, z^3)$ l'inégalité $G \leqslant A$ donne :

$$\sqrt[3]{xyz} \leqslant \tfrac{1}{3}(x + y + z) \qquad \text{et} \qquad xyz \leqslant \tfrac{1}{3}\left(x^3 + y^3 + z^3\right)$$

On en déduit :

$$(x + y + z)^3 \geqslant 27xyz \qquad \text{et} \qquad x^3 + y^3 + z^3 \geqslant 3xyz$$

c. Pour $(x_1, \dots, x_n) = (1, 2, \dots, n)$ l'inégalité $G \leqslant A$ donne exactement :

$$\sqrt[n]{n!} \leqslant \frac{n+1}{2}$$

La formule de Stirling donne quant à elle : $\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}$

30 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ convexe dérivable. Démontrer que :

$$f(\tfrac{1}{2}) \leqslant \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \tfrac{f(0)+f(1)}{2}$$

La fonction f est convexe dérivable donc sa courbe située au-dessus de sa tangente en $\frac{1}{2}$ et en dessous de sa corde. Ceci s'écrit :

$$\forall t \in [0,1] \qquad f'(\tfrac{1}{2})(t-\tfrac{1}{2}) + f(\tfrac{1}{2}) \leqslant f(t) \leqslant (f(1)-f(0))t + f(0)$$

Par croissance de l'intégrale :

$$f'(\tfrac{1}{2})\int_0^1 \left(t-\tfrac{1}{2}\right)\mathrm{d}t + \int_0^1 f(\tfrac{1}{2})\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant (f(1)-f(0))\int_0^1 t\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f(0)\,\mathrm{d}t$$

Or :

$$\int_0^1 (t-\tfrac{1}{2})\mathrm{d}t = \left[\frac{(t-\frac{1}{2})^2}{2}\mathrm{d}t\right]_0^1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Ceci donne comme demandé : $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leqslant \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt \leqslant \dfrac{f(0)+f(1)}{2}$.

31 Soit $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $f(a) = f(b) = 0$.

a. Justifier que $|f''|$ admet une borne supérieure M.

b. Démontrer que :

$$\forall x \in [a,b] \qquad |f(x)| \leqslant \frac{M}{2}(x-a)(b-x)$$

On étudiera $f \pm g$ où $g(x) = \frac{M}{2}(x-a)(b-x)$.

a. Comme la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ alors sa dérivée seconde f'' est continue.

Par théorème, une fonction continue sur un segment est bornée, donc la fonction f'' est bornée sur le segment $[a,b]$, et ainsi la fonction $|f''|$ admet une borne supérieure sur ce segment, laquelle est atteinte.

b. Posons $g(x) = \frac{M}{2}(x-a)(b-x)$.

Cette fonction est deux fois dérivable, de dérivée seconde $g''(x) = -M$.

Les fonctions $h = f - g$ et $k = f + g$ sont deux fois dérivables, de dérivées secondes $h''(x) = f''(x) + M$ et $k''(x) = f''(x) - M$.

Or par définition de M on a $-M \leqslant f''(x) \leqslant M$ pour tout $x \in [a,b]$, donc $h''(x) \geqslant 0$ et $k''(x) \leqslant 0$.

La fonction h est donc convexe alors que la fonction k est concave.

Or $h(a) = h(b) = k(a) = k(b)$, donc la corde reliant les points d'abscisses a et b est l'axe des abscisses. Comme h est convexe alors la corde est au-dessus de sa courbe, comme k est concave alors la corde est en-dessous de sa courbe.

On en déduit : $\forall x \in [a,b] \quad h(x) \leqslant 0 \leqslant k(x)$

Puis : $\forall x \in [a,b] \quad -g(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$

Enfin : $\forall x \in [a,b] \quad |f(x)| \leqslant g(x)$

Ceci est le résultat demandé.

32 Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction convexe sur $]a, b[$ et continue en a.
Démontrer que f est convexe sur $[a, b[$.

On utilise la définition de la convexité.
On démontre que pour tout $(x, y) \in [a, b[^2$ et $\lambda \in [0, 1]$:

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Comme f est convexe sur $]a, b[$ alors ce résultat est valable si $(x, y) \in]a, b[^2$. Il reste à le démontrer si $x = a$.
Soit $y \in]a, b[$ et $\lambda \in]0, 1[$ fixé. Démontrons que :

$$f((1-\lambda)a + \lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(a) + \lambda f(y).$$

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $]a, b[$ convergeant vers a.
Comme f est convexe sur $]a, b[$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f((1-\lambda)a_n + \lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(a_n) + \lambda f(y).$$

Comme f est continue en a alors : $\quad f(a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$.
De plus $(1-\lambda)a_n + \lambda y \xrightarrow[n\to+\infty]{} (1-\lambda)a + \lambda y$. Comme f est convexe sur $]a, b[$ qui est ouvert alors f est continue sur $]a, b[$, donc par composition de limites :

$$f((1-\lambda)a_n + \lambda y) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f((1-\lambda)a + \lambda y).$$

Par théorème de comparaison :

$$f((1-\lambda)a + \lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(a) + \lambda f(y).$$

On en déduit que f est convexe sur $[a, b[$.

33 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable. Démontrer que si

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad f(b) = 0$$

alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

On définit la propriété :

$$\mathcal{P}_k : \qquad \exists b_k \in]a, b] \quad f^{(k)}(b_k) = 0$$

On démontre par récurrence finie que cette propriété est vraie pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$
<u>Initialisation.</u> On pose $b_0 = b$. Alors $f(b_0) = 0$ donc la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.
<u>Hérédité.</u> Supposons que pour un certain $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ la propriété $\mathcal{P}_k$ est vraie, *i.e.*, il existe un entier $b_k \in]a, b]$ tel que $f^{(k)}(b_k) = 0$.
On applique le théorème de Rolle à la fonction $f^{(k)}$ sur l'intervalle $[a, b_k]$.
Par énoncé la fonction f est n fois dérivable sur l'intervalle $[a, b]$. Comme $k < n$ alors $f^{(k)}$ est dérivable sur $[a, b]$. Or $[a, b_k] \subseteq [a, b]$, donc par restriction :

- La fonction $f^{(k)}$ est continue sur $[a, b_k]$.
- La fonction $f^{(k)}$ est dérivable sur $]a, b_k[$.
- $f^{(k)}(a) = 0$ par énoncé, car $k \leqslant n-1$, et $f^{(k)}(b_k) = 0$ par hypothèse de récurrence. Donc $f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b_k)$.

D'après le théorème de Rolle il existe $b_{k+1} \in \,]a, b_k[$ tel que $f^{(k+1)}(b_{k+1}) = 0$.

Ainsi la Propriété $\mathcal{P}_{k+1}$ est valide si la propriété $\mathcal{P}_k$ l'est. L'hérédité est prouvée.

Conclusion. Par récurrence finie la propriété $\mathcal{P}_k$ est vraie pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$.

De plus on a démontré que $a < b_n < b_{n-1} < \cdots < b_1 < b_0 = b$, donc $b_n \in \,]a, b[$.

La propriété $\mathcal{P}_n$ étant vraie, en notant $c = b_n$ on obtient qu'il existe $c \in \,]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

$\boxed{34}$ Une généralisation du théorème de Rolle

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable, de limites $+\infty$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

a. Démontrer qu'il existe deux réels A et B tels que $A < B$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x \notin [A, B] \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geqslant f(0) + 1.$$

b. En déduire qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

a. Comme $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ et $f(0) + 1 \in \mathbb{R}$ alors par définition il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad x \geqslant B \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geqslant f(0) + 1.$$

Comme $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$ et $f(0) + 1 \in \mathbb{R}$ alors par définition il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad x \leqslant A \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geqslant f(0) + 1.$$

On ne peut avoir $0 \geqslant B$ car sinon on aurait $f(0) \geqslant f(0) + 1$, ce qui est faux. Ainsi $0 < B$.

De même $0 > A$. donc $A < 0 < B$, et ainsi $A < B$.

Si x n'appartient pas au segment $[A, B]$ alors $x < A$ ou $x > B$, dans les deux cas on a $f(x) \geqslant f(0) + 1$.

b. D'après le théorème des valeurs extrêmes une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Or f est continue sur le segment $[A, B]$, donc f admet un minimum m sur $[A, B]$, atteint en un point c :

$$\exists c \in [A, B] \quad f(c) = m = \operatorname*{Min}_{[A,B]} f$$

Comme $0 \in [A, B]$ alors $m \leqslant f(0)$. Par construction $f(A) > f(0)$ et $f(B) > f(0)$, donc $f(A) \neq m$ et $f(B) \neq m$. Ainsi $f(c) \neq f(A)$ et $f(c) \neq f(B)$, donc $c \neq A$ et $c \neq B$.

Or $c \in [A, B]$, donc $c \in \,]A, B[$, *i.e.,* c est un point intérieur à $[A, B]$.

Donc f présente un minimum local en c, et par théorème $f'(c) = 0$.

Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

35 Soit I un intervalle, a un point de I, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

a. Démontrer que pour tout $x \in I$ il existe un réel c compris entre a et x tel que :
$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(c)$$
On souhaite généraliser ce résultat à l'ordre 2.

b. Démontrer que pour tout $x \in I$ il existe un réel A tel que :
$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}A$$
c. En utilisant la fonction $\varphi_x : I \to \mathbb{R}$ définie par
$$\varphi_x(t) = f(x) - f(t) - (x-t)f'(t) - \frac{(x-t)^2}{2}A$$
démontrer qu'il existe un réel c strictement compris entre a et x tel que :
$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(c)$$

a. Il suffit d'appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[a, x]$ si $a \leqslant x$ ou $[x, a]$ si $x < a$.

On suppose dans la suite que $a < x$, les résultats sont semblables si $x < a$.

Comme x et a appartiennent à I et comme celui-ci est un intervalle alors il contient l'intervalle $[a, x]$.

La fonction f est dérivable sur I donc elle est continue sur $[a, x]$ et dérivable sur $]a, x[$. D'après le théorème des accroissements finis il existe $c \in]a, x[$ tel que $f'(c) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, ce qui donne comme demandé :
$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(c)$$

b. On souhaite justifier qu'il existe un réel A tel que :
$$f(x) - f(a) - (x-a)f'(a) = \frac{(x-a)^2}{2}A$$
Si $x = a$ alors cette équation donne $0 = 0$, elle est valable pour tout réel A.

Sinon il suffit de poser : $A = \frac{2}{(x-a)^2}(f(x) - f(a) - (x-a)f'(a))$

c. Comme la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ alors la fonction f' est dérivable, et donc par combinaison linéaire la fonction φ_x est dérivable sur I.

On remarque que $\varphi_x(x) = 0$, et $\varphi_x(a) = 0$ par définition de A. Ainsi :

- La fonction φ_x est continue sur $[a, x]$
- La fonction φ_x est dérivable sur $]a, x[$
- $\varphi_x(a) = \varphi_x(x)$

D'après le théorème de Rolle il existe $c \in]a, x[$ tel que $\varphi_x'(c) = 0$.

On calcule :
$$\forall t \in I \qquad \varphi_x'(t) = -f'(t) + f'(t) - (x-t)f''(t) + (x-t)A = (x-t)(A - f''(t))$$
Comme c est différent de x alors l'égalité $\varphi_x'(c) = 0$ donne $f''(c) = A$.

Nous avons donc démontré qu'il existe c entre a et x (*i.e.*, dans $]a,x[$ ou $]x,a[$) tel que :

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2}f''(c)$$

36 Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur un voisinage I de 0 telle que :

$$f(0)=f'(0)=0 \quad \text{et} \quad f''(0)=\alpha\neq 0$$

Le but de cet exercice est de démontrer qu'alors :

$$f(x)\underset{(0)}{\sim}\alpha\frac{x^2}{2}$$

Pour tout $x\in I$ strictement positif on définit la fonction φ par :

$$\begin{aligned}\varphi : I &\longrightarrow \mathbb{R}\\ t &\longmapsto f(x)t^2-f(t)x^2\end{aligned}$$

a. Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^2$, puis qu'il existe $t_1\in\,]0,x[$ tel que $\varphi'(t_1)=0$.
b. Démontrer qu'il existe $t_2\in\,]0,t_1[$ tel que $2f(x)=f''(t_2)x^2$.
c. On admet que de même, si $x<0$ alors il existe $t_2\in\,]x,0[$ tel que $2f(x)=f''(t_2)x^2$. Conclure.

a. Comme x est fixé alors la fonction φ est combinaison linéaire des fonctions $t\mapsto t^2$ et $t\mapsto f(t)$. Ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^2$ donc φ est de classe $\mathcal{C}^2$.

Sa dérivée en $t\in I$ est : $\varphi'(t)=2f(x)t-f'(t)x^2$

De plus on remarque que $\varphi(0)=0$ car $f(0)=0$ et $\varphi(x)=0$. On applique le théorème de Rolle :

- La fonction φ est continue sur $[0,x]$,
- la fonction φ est dérivable sur $]0,x[$,
- $\varphi(0)=\varphi(x)$.

Il existe donc $t_1\in\,]0,x[$ tel que $\varphi'(t_1)=0$.

b. Comme $f'(0)=0$ alors $\varphi'(0)=0$, ce qui donne $\varphi'(0)=\varphi'(t_1)$.

De plus la fonction φ' est dérivable car φ est de classe $\mathcal{C}^2$.

Sa dérivée en $t\in I$ est : $\varphi''(t)=2f(x)-f''(t)x^2$

On applique de nouveau le théorème de Rolle :

- La fonction φ' est continue sur $[0,t_1]$,
- la fonction φ' est dérivable sur $]0,t_1[$,
- $\varphi'(0)=\varphi'(t_1)$.

Il existe donc $t_2\in\,]0,t_1[$ tel que $\varphi''(t_2)=0$. Ceci donne $2f(x)=f''(t_2)x^2$, et comme $0<t_1<x$ alors on a bien $t_2\in[0,x]$.

c. D'après la question précédente :

$$\forall x\in I\cap\mathbb{R}_+^* \qquad \exists t_x\in\,]0,x[\qquad \frac{2f(x)}{x^2}=f''(t_x)$$

Comme $t_x\in\,]0,x[$ alors par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} t_x=0$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ alors f'' est continue, donc : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f''(x) = f''(0) = \alpha$

Par composition de limites : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f''(t_x) = \alpha$

On en déduit : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{2f(x)}{x^2} = \alpha$

Si $x < 0$ on démontre de même qu'il existe $t_x \in \left]x, 0\right[$ tel que $2f(x) = f''(t_x)x^2$, et on en déduit $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{2f(x)}{x^2} = \alpha$.

Ceci donne $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2f(x)}{\alpha x^2} = 1$ et donc : $f(x) \underset{(0)}{\sim} \alpha\frac{x^2}{2}$

37 Soit p et q deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Démontrer que pour tout $(a, b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$: $ab \leqslant \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$.

Comme $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors pour toute fonction concave f sur un intervalle I on a :

$$\forall (x, y) \in I^2 \qquad f\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \geqslant \frac{f(x)}{p} + \frac{f(y)}{q}.$$

La fonction logarithme népérien est concave sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. En effet elle est deux fois dérivable, de dérivée seconde $\ln'' : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$, laquelle est négative.
Soit a et b deux réels strictement positifs. Soit $x = a^p$ et y^q. Alors :

$$\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geqslant \frac{1}{p}\ln\left(a^p\right) + \frac{1}{q}\ln\left(b^q\right)$$

En appliquant la fonction exponentielle, qui est croissante, on obtient :

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Il s'agit de la formule demandée.

38 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
On suppose que f s'annule en un nombre infini de points.
Démontrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = f'(c) = 0$.

Il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments distincts de $[a,b]$ tels que $f(u_n) = 0$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est incluse dans le segment $[a,b]$, donc bornée.
D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass il existe une suite extraite de (u_n) convergente.
On note $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cette nouvelle suite, et c sa limite.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a \leqslant v_n \leqslant b$. Par théorème de comparaison $a \leqslant c \leqslant b$, donc $c \in [a,b]$, et $f(c)$ est défini.
De plus comme f est continue alors la suite $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(c)$.
Or $f(v_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la suite $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, et ainsi $f(c) = 0$.
On applique le théorème de Rolle sur chaque intervalle $[v_n, v_{n+1}]$, ou $[v_{n+1}, v_n]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme f est dérivable et $f(v_n) = f(v_{n+1})$ alors il existe w_n entre v_n et v_{n+1} tel que $f'(w_n) = 0$.
Par théorème d'encadrement, comme les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers c alors la suite (w_n) converge vers c.
Comme f' est continue alors la suite $(f'(w_n))$ converge vers $f'(c)$. Comme $f'(w_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors la suite $(f'(w_n))$ converge vers 0 et donc $f'(c) = 0$.
Il existe bien $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = f'(c) = 0$.