

Corrigé partiel du T. D. A9

Dérivation

1 Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

$$f_1 : x \mapsto x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) \qquad f_2 : x \mapsto \arccos \sqrt{1 - x^2}$$

$$f_3 : x \mapsto \ln \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} \qquad f_4 : x \mapsto \arctan \operatorname{sh} x \qquad f_5 : x \mapsto \arccos \frac{1}{\operatorname{ch} x}$$

$$f_6 : x \mapsto \ln |\tan x| \qquad f_7 : x \mapsto 2 \arctan \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \arcsin \sqrt{1 - x^2}$$

$$f_1'(x) = \arctan x$$

$$f_2'(x) = \frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$$

$$f_3'(x) = -\frac{1}{\sin x}$$

$$f_4'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$$

$$f_5'(x) = \frac{x}{|x|\operatorname{ch} x}$$

$$f_6'(x) = \tan x + \cot x$$

$$f_7'(x) = \left(1 + \frac{|x|}{x}\right) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2 Déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivabilité et la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes.

$$f_3 : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$f_5 : x \mapsto \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$$

$$f_8 : x \mapsto \arcsin(1 - x^2)$$

$$f_9 : x \mapsto [x] + \sqrt{x - [x]}$$

$$f_3 : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

Le réel $\sqrt{x^2 - 1}$ est défini si et seulement si $x^2 - 1 \geq 0$, donc si et seulement si $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

Si $x \geq 1$ alors $x + \sqrt{x^2 - 1}$ est strictement positif, donc $f_3(x)$ est défini.

Si $x \leq -1$ alors $x + \sqrt{x^2 - 1} < x + \sqrt{x^2} = x + |x|$, comme x est négatif alors $x + \sqrt{x^2 - 1} < 0$ donc $f_3(x)$ n'est pas défini.

Finalement f_3 est définie sur $\mathcal{D}_3 = [1, +\infty[$.

Si $x > 1$ alors $x^2 - 1 > 0$. La fonction racine carrée est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et la fonction \ln est dérivable sur son ensemble de définition, donc par composition la fonction f_3 est dérivable sur $]1, +\infty[$.

Étudions la dérivabilité de f_3 en 1.

On écrit pour tout $x > 1$:

$$\frac{f_3(x) - f_3(1)}{x - 1} = \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}{x - 1}$$

On sait que

$$\ln(u) \underset{(1)}{\sim} u - 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x + \sqrt{x^2 - 1}) = 1$$

donc par composition de limites :

$$\frac{f_3(x) - f_3(1)}{x - 1} \underset{(1)}{\sim} \frac{x + \sqrt{x^2 - 1} - 1}{x - 1} = 1 + \frac{\sqrt{x + 1}}{\sqrt{x - 1}}$$

Ceci donne :

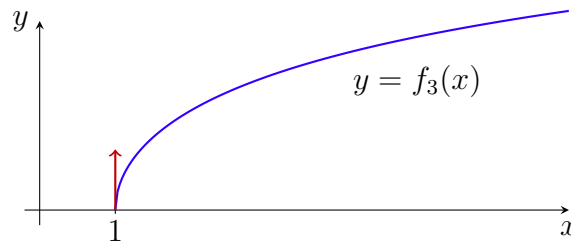
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f_3(x) - f_3(1)}{x - 1} = +\infty$$

La fonction f_3 n'est donc pas dérivable en 1.

Finalement f_3 est dérivable sur $]1, +\infty[$ et on calcule :

$$\forall x \in]1, +\infty[\quad f_3'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

On peut démontrer de plus que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln x$, et tracer la courbe suivante :



$$f_5 : x \mapsto \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$$

La fonction f_5 est définie si $\cos x \neq 1$ et si $\frac{1+\cos x}{1-\cos x} \geq 0$. La première condition est valide si et seulement si x n'est pas multiple de 2π , la deuxième est toujours valide, car : $\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq \cos x \leq 1$

La fonction f_5 est donc définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Si $x \neq \pi + 2k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ alors $\frac{1+\cos x}{1-\cos x} > 0$.

Donc par quotient et composition la fonction f_5 est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

On calcule, pour tout x dans cet ensemble :

$$\begin{aligned} f_5'(x) &= -\frac{\sin x}{(1-\cos x)^2} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = -\frac{\sin x}{1-\cos x} \sqrt{\frac{1}{(1-\cos x)(1+\cos x)}} \\ &= -\frac{\sin x}{|\sin x|} \frac{1}{1-\cos x} \end{aligned}$$

On étudie maintenant la dérivabilité en $\pi + 2k\pi$.

Comme la fonction est 2π -périodique, il suffit d'étudier sa dérivabilité en π .

On peut utiliser le théorème de limite de la dérivée, ou revenir à la définition de la dérivabilité, ce que nous faisons ci-dessous.

Le taux d'accroissement de f_5 en π est :

$$\frac{f_5(x) - f_5(\pi)}{x - \pi} = \frac{1}{x - \pi} \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$$

On pose $h = x - \pi$. Alors :

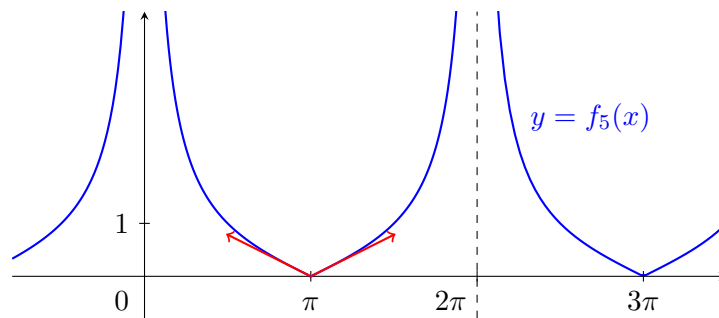
$$\frac{f_5(x) - f_5(\pi)}{x - \pi} = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{1 - \cos h}{1 + \cos h}} \underset{(h \rightarrow 0)}{\sim} \frac{1}{h} \sqrt{\frac{h^2}{4}} = \frac{|h|}{2h}$$

On en déduit :

$$\lim_{x \rightarrow \pi}^< \frac{f_5(x) - f_5(\pi)}{x - \pi} = -\frac{1}{2} \quad \lim_{x \rightarrow \pi}^> \frac{f_5(x) - f_5(\pi)}{x - \pi} = \frac{1}{2}$$

Ainsi f_5 est dérivable à gauche et à droite en π , de dérivées $f'_g(\pi) = -\frac{1}{2}$ et $f'_d(\pi) = \frac{1}{2}$. Elle n'est donc pas dérivable en π .

La courbe de f_5 est la suivante :



On peut ajouter qu'il est possible de simplifier l'expression de f_5 dès le départ, en multipliant par une quantité conjuguée ou en utilisant les formules en $t = \tan \frac{x}{2}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad f_5(x) = \frac{|\sin x|}{1 - \cos x} = \left| \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} \right|$$

Cette dernière expression en particulier explique bien l'aspect de la courbe.

$$f_8 : x \mapsto \arcsin(1 - x^2)$$

La fonction arc-sinus est définie et continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $] -1, 1[$.

On calcule :

$$\begin{aligned} -1 \leq 1 - x^2 \leq 1 &\iff 0 \leq x^2 \leq 2 &\iff -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \\ -1 < 1 - x^2 < 1 &\iff 0 < x^2 < 2 &\iff \begin{aligned} &-\sqrt{2} < x < 0 \\ \text{ou} &0 < x < \sqrt{2} \end{aligned} \end{aligned}$$

Ainsi, par composition, la fonction f_8 est définie et continue sur $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ et dérivable sur $] -\sqrt{2}, 0[\cup] 0, \sqrt{2}[$.

Pour tout $x \in] -\sqrt{2}, 0[\cup] 0, \sqrt{2}[$ on calcule :

$$f'_8(x) = \frac{-2x}{\sqrt{1 - (1 - x^2)^2}} = \frac{-2x}{|x|\sqrt{2 - x^2}}$$

Pour la dérivabilité de f_8 en $\pm\sqrt{2}$ on utilise le théorème de limite de la dérivée :

- la fonction f_8 est continue sur $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$
- la fonction f_8 est dérivable sur $] -\sqrt{2}, 0[\cup] 0, \sqrt{2}[$
- les limites de f'_8 sont :

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} f'_8(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f'_8(x) = -\infty$$

Par le théorème de limite de la dérivée f_8 n'est pas dérivable en $\sqrt{2}$ ni en $-\sqrt{2}$.

Pour la dérivabilité en 0 :

- la fonction f_8 est continue sur $[0, \sqrt{2}]$
- la fonction f_8 est dérivable sur $] 0, \sqrt{2}[$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'_8(x) = -\sqrt{2}$.

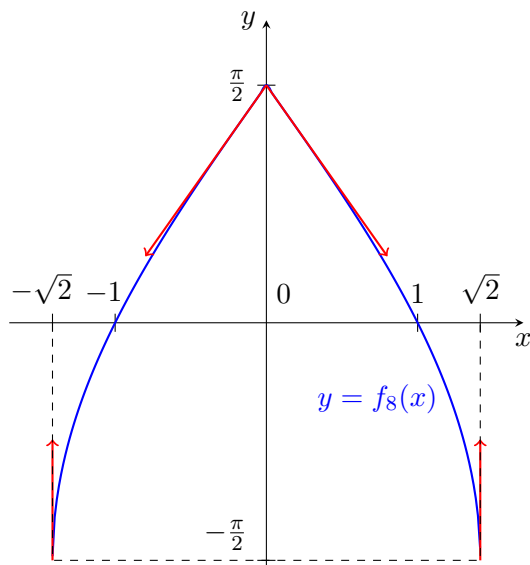
Par le théorème de limite de la dérivée f_8 est dérivable à droite en 0, de dérivée $-\sqrt{2}$.

De même on montre que f_8 est dérivable à gauche en 0, de dérivée $\sqrt{2}$.

Ainsi f est dérivable à gauche et à droite en 0, mais ses dérivées ne sont pas égales.

Donc elle n'est pas dérivable en 0.

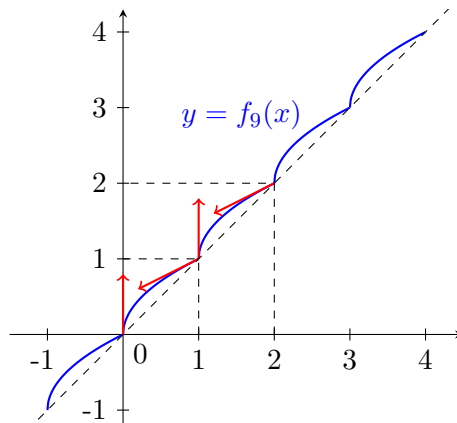
On obtient une courbe comme la suivante :



$$f_9 : x \mapsto [x] + \sqrt{x - [x]}$$

Cette fonction a été étudiée dans l'exercice 6 de la feuille de TD A8.

Nous avons vu qu'elle est continue sur \mathbb{R} , et que sa courbe est la suivante :



La fonction $x \mapsto [x]$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, de dérivée nulle. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, comme $x - [x] > 0$ alors par composition f_9 est dérivable en x .

Ainsi f_9 est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \quad f_9'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x - [x]}}$$

Pour la dérivabilité en un point n entier on calcule les limites à gauche et à droite du taux d'accroissement. On rappelle :

$$\begin{aligned} \forall x \in [n-1, n[\quad f_9(x) &= n-1 + \sqrt{x-n+1} \\ \forall x \in [n, n+1[\quad f_9(x) &= n + \sqrt{x-n} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow n^-} \frac{f_9(x) - f_9(n)}{x - n} &= \lim_{x \rightarrow n^-} \frac{\sqrt{x-n+1} - 1}{x - n} = \lim_{x \rightarrow n^-} \frac{1}{\sqrt{x-n+1} + 1} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow n^+} \frac{f_9(x) - f_9(n)}{x - n} &= \lim_{x \rightarrow n^+} \frac{\sqrt{x-n}}{x - n} = \lim_{x \rightarrow n^+} \frac{1}{\sqrt{x-n}} = +\infty \end{aligned}$$

On en déduit que f_9 est dérivable à droite en n , de dérivée $f_9'(n) = \frac{1}{2}$, mais qu'elle n'est pas dérivable à gauche.

3 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes.

Étudier leurs prolongements par continuité et la dérivabilité de ceux-ci.

$$f_1 : x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$$

$$f_2 : x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$$

Les fonctions f_1 et f_2 sont définies sur \mathbb{R}^* , de classe \mathcal{C}^∞ par composition.

Comme la fonction $|\sin|$ est majorée par 1 alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad |f_1(x)| \leq |x| \quad \text{et} \quad |f_1(x)| \leq |x^2|$$

Par théorème d'encadrement, les deux fonctions tendent vers 0 lorsque x tend vers 0.

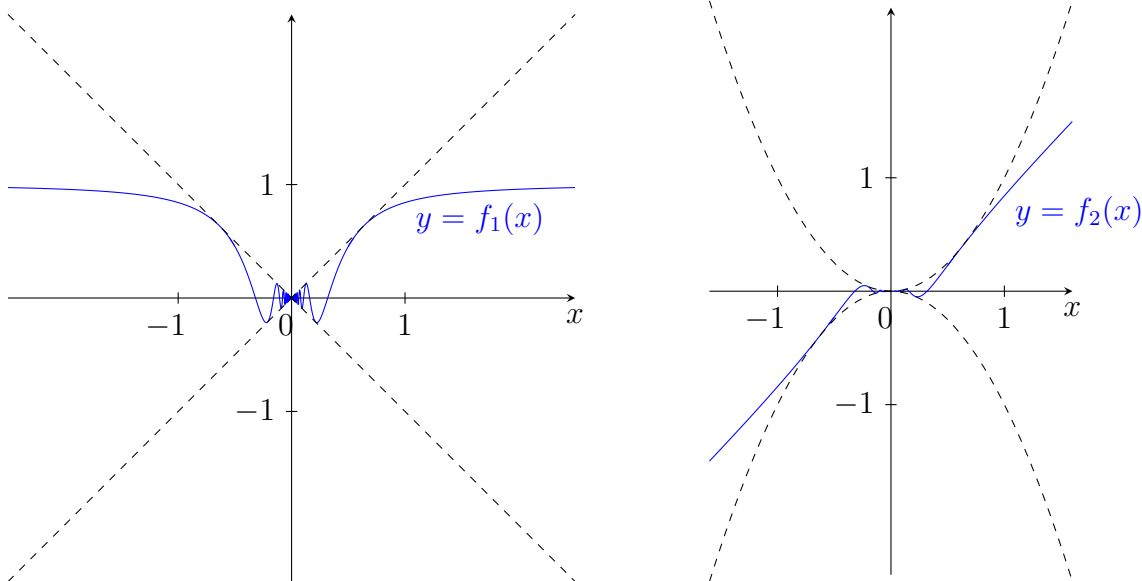
On peut donc les prolonger par continuité en posant $f_1(0) = f_2(0) = 0$.

Étudions maintenant leur dérivabilité en 0, grâce à leurs taux d'accroissement.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \frac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = \sin \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \frac{f_2(x) - f_2(0)}{x - 0} = x \sin \frac{1}{x} = f_1(x)$$

Nous avons vu que la fonction $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ n'admet pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$. Donc la fonction f_1 n'est pas dérivable en 0. Par contre la fonction f_2 est dérivable en 0, de dérivée $f_2'(0) = 0$.

Voici l'allure des courbes de ces fonctions :



La fonction f_2 est un exemple de fonction dérivable dont la dérivée n'est pas continue. En effet, on a démontré qu'elle est dérivable sur \mathbb{R} , que sa dérivée en 0 est 0, et on calcule :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_2'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

La fonction $x \mapsto 2x \sin \frac{1}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, mais la fonction $x \mapsto \cos \frac{1}{x}$ n'admet pas de limite lorsque x tend vers 0. On le démontre de la même façon que pour $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$.

Donc $f_2'(x)$ n'admet pas de limite lorsque x tend vers 0. En particulier elle ne tend pas vers $f_2'(0)$, et donc elle n'est pas continue.

Ainsi la fonction f_2 est dérivable mais sa dérivée n'est pas continue.

4 Établir les égalités suivantes.

$$\text{a. } \forall x \in [-1, 1] \quad \arcsin(2x^2 - 1) = 2 \arcsin |x| - \frac{\pi}{2}$$

a. On pose : $f(x) = \arcsin(2x^2 - 1) - 2 \arcsin |x|$

On utilise les équivalences :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq 2x^2 - 1 \leq 1 &\iff -1 \leq x \leq 1 \\ -1 < 2x^2 - 1 < 1 &\iff -1 < x < 0 \quad \text{ou} \quad 0 < x < 1 \\ -1 \leq |x| \leq 1 &\iff -1 \leq x \leq 1 \\ -1 < |x| < 1 &\iff -1 < x < 1 \end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto 2x^2 - 1$ est définie et dérivable sur \mathbb{R} .

La fonction arcsin est définie et continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $] -1, 1[$.

La fonction $x \mapsto |x|$ est définie et continue sur \mathbb{R} , dérivable sur \mathbb{R}^* .

Par composition et soustraction, la fonction f est définie et continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $] -1, 0[\cup] 0, 1[$.

Sa dérivée est :

$$\begin{aligned} \forall x \in] -1, 0[\cup] 0, 1[\quad f'(x) &= \frac{4x}{\sqrt{1 - (2x^2 - 1)^2}} - 2 \frac{x}{|x|} \frac{1}{\sqrt{1 - |x|^2}} \\ &= \frac{4x}{2|x|\sqrt{1 - x^2}} - \frac{2x}{|x|\sqrt{1 - x^2}} = 0 \end{aligned}$$

Comme sa dérivée est nulle alors f est constante sur tout intervalle. Elle est donc constante sur $] -1, 0[$ et $] 0, 1[$.

Par continuité, f est constante sur $[-1, 0]$ et $[0, 1]$, donc sur $[-1, 1]$.

En effet, si K est la valeur de f sur $] 0, 1[$:

$$\forall x \in] 0, 1[\quad f(x) = K$$

Alors :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = K$$

Or comme f est continue en 0 et en 1 alors :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

On en déduit que $f(0) = f(1) = K$, donc f est constante sur $[0, 1]$ égale à K .

On procède de même sur $[-1, 0]$, donc finalement f est constante sur $[-1, 1]$.

On calcule que $f(0) = -\frac{\pi}{2}$ donc f est constante égale à $-\frac{\pi}{2}$ sur $[-1, 1]$, ce qui donne le résultat demandé.

5 Étudier les fonctions suivantes.

$$f_2 : x \mapsto \arccos \frac{2\sqrt{x}}{x+1} \qquad f_3 : x \mapsto \operatorname{arccos} \operatorname{th} x + \arcsin \frac{1}{\operatorname{ch} x}$$

$$f_2 : x \mapsto \arccos \frac{2\sqrt{x}}{x+1}$$

On étudie d'abord la fonction $g : x \mapsto \frac{2\sqrt{x}}{x+1}$

Cette fonction est définie sur \mathbb{R}_+ , par quotient elle est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad g'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{x}(x+1)^2}$$

On obtient le tableau de variations suivant :

| | | | | |
|---------|---|---|-----------|---|
| x | 0 | 1 | $+\infty$ | |
| $g'(x)$ | | + | 0 | - |
| $g(x)$ | 0 | \swarrow \rightarrow 1 \searrow | | 0 |

Pour la limite en $+\infty$ on a utilisé l'équivalence : $g(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$

La fonction arccos est définie et continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $] -1, 1[$.

Par composition et d'après le tableau de variations ci-dessus, la fonction f_2 est définie est continue sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

Sa dérivée est :

$$\forall x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[\quad f_2'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}(x+1)|x-1|}$$

Pour la dérivabilité en 0 et en 1 on applique trois fois le théorème de limite de la dérivée :

- la fonction f_2 est continue sur $[0, +\infty[$
- la fonction f_2 est dérivable sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$
- les limites de f_2' sont :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_2'(x) = +\infty \qquad \lim_{x \rightarrow 1^-} f_2'(x) = -\frac{1}{2} \qquad \lim_{x \rightarrow 1^+} f_2'(x) = \frac{1}{2}$$

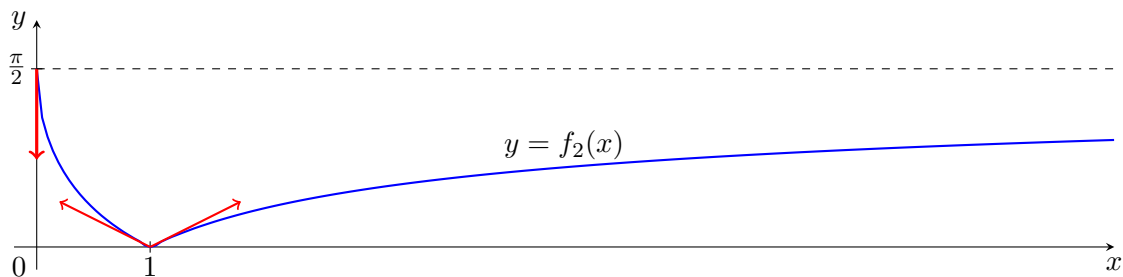
D'après le théorème de limite de la dérivée f_2 n'est pas dérivable en 0, elle est dérivable à gauche en 1 de dérivée $-\frac{1}{2}$ et à droite en 1 de dérivée $\frac{1}{2}$.

Ces deux dernières dérivées sont différentes donc f_2 n'est pas dérivable en 1.

On obtient le tableau de variations suivant :

| | | | | | | | |
|-----------|-----------------|---|-----------|-----------------|--|---------------|---|
| x | 0 | 1 | $+\infty$ | | | | |
| $f_2'(x)$ | | $-\infty$ | - | $-\frac{1}{2}$ | | $\frac{1}{2}$ | + |
| $f_2(x)$ | $\frac{\pi}{2}$ | \searrow \rightarrow 0 \swarrow | | $\frac{\pi}{2}$ | | | |

Puis la courbe :



$$f_3 : x \mapsto \arccos \operatorname{th} x + \arcsin \frac{1}{\operatorname{ch} x}$$

Les fonctions hyperboliques sont définies et dérivables sur \mathbb{R} .

On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{ch} x \geq 1 \quad \text{et} \quad (\operatorname{ch} x = 1 \iff x = 0)$$

Ceci montre que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{1}{\operatorname{ch} x} \in]0, 1] \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{\operatorname{ch} x} = 1 \iff x = 0 \right)$$

La fonction arcsin est définie et continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $] -1, 1[$.

Par composition la fonction $x \mapsto \arcsin \frac{1}{\operatorname{ch} x}$ est définie et continue sur \mathbb{R} , dérivable sur \mathbb{R}^* .

La fonction arccos est définie et continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $] -1, 1[$. Or on sait que la fonction th est dérivable et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 < \operatorname{th} x < 1$$

Par composition la fonction $x \mapsto \arccos \operatorname{th} x$ est définie et dérivable sur \mathbb{R} .

Par somme la fonction f_3 est définie et continue sur \mathbb{R} et dérivable sur \mathbb{R}^* .

Sa dérivée est :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f_3'(x) = -\frac{1}{\operatorname{ch} x} - \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x |\operatorname{sh} x|}$$

Comme $\operatorname{sh} x$ est du signe de x alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f_3'(x) = -\frac{1}{\operatorname{ch} x} \left(1 + \frac{x}{|x|} \right)$$

Ceci donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f_3'(x) = \begin{cases} -\frac{2}{\operatorname{ch} x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En particulier, comme \mathbb{R}_- est un intervalle alors la fonction f_3 est constante sur \mathbb{R}_- .

Pour la dérivabilité en 0 on utilise le théorème de limite de la dérivée :

- la fonction f_3 est continue sur \mathbb{R}
- la fonction f_3 est dérivable sur \mathbb{R}^*
- les limites de f'_3 sont :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'_3(x) = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} f'_3(x) = -2$$

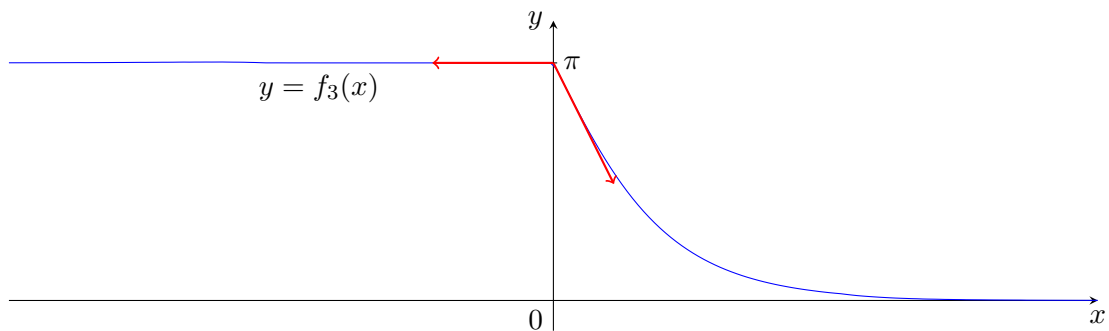
D'après le théorème de limite de la dérivée la fonction f_3 est dérivable à gauche en 0 de dérivée 0 et à droite de dérivée -2 .

Ces deux dérivées ne sont pas égales donc la fonction f_3 n'est pas dérivable en 0.

On obtient le tableau de variations :

| | | | |
|-----------|-----------|-------|-----------|
| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| $f'_3(x)$ | 0 | -2 | $-$ |
| $f_3(x)$ | π | π | 0 |

Puis la courbe :



6 Soit $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable. Démontrer que la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto e^{u(t)}$$

est dérivable et donner sa dérivée.

On note x et y les parties réelles et imaginaires de u . Alors x et y sont deux fonctions réelles, et pour tout $t \in \mathbb{R}$: $u(t) = x(t) + iy(t)$

On en déduit :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad e^{u(t)} = e^{x(t)} e^{iy(t)} = e^{x(t)} \cos y(t) + ie^{x(t)} \sin y(t)$$

Comme la fonction u est dérivable alors par propriété ses parties réelles et imaginaires sont dérivables, donc x et y sont dérivables.

Les fonction exponentielle, cosinus et sinus sont dérivables, donc par composition et produit les fonctions $t \mapsto e^{x(t)} \cos y(t)$ et $t \mapsto e^{x(t)} \sin y(t)$ sont dérivables.

Or ces fonctions sont les parties réelles et imaginaires de la fonction $t \mapsto e^{u(t)}$, donc par propriété cette fonction est dérivable.

On calcule sa dérivée :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} \quad f'(t) &= (x'(t)e^{x(t)} \cos y(t) - y'(t)e^{x(t)} \sin y(t)) \\ &\quad + i(x'(t)e^{x(t)} \sin y(t) + y'(t)e^{x(t)} \cos y(t)) \\ &= e^{x(t)}((x'(t) + iy'(t)) \cos y(t) + i(x'(t) + iy'(t)) \sin y(t)) \\ &= e^{x(t)}(x'(t) + iy'(t))(\cos y(t) + i \sin y(t)) \\ &= e^{x(t)}u'(t)e^{iy(t)} = u'(t)e^{u(t)} \end{aligned}$$

On a démontré que la formule $(e^u)' = u'e^u$ est valable aussi si u est une fonction complexe.

7 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et a un point intérieur de I . On définit :

$$m : h \rightarrow \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

- Démontrer que si f est dérivable en a alors m admet une limite en 0.
- La réciproque est-elle vraie ?

a. On peut écrire :

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \frac{1}{2} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{f(a-h) - f(a)}{-h} \right)$$

Si f est dérivable en a alors :

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(a+u) - f(a)}{u} = f'(a)$$

On en déduit par composition de limites :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \frac{1}{2}(f'(a) + f'(a)) = f'(a)$$

b. La réciproque est fautive : il est possible que m admette une limite en 0 alors que f n'est pas dérivable en a .

Par exemple si f est la fonction valeur absolue et $a = 0$, alors f n'est pas dérivable en 0, mais :

$$\forall h \neq 0 \quad m(h) = \frac{|h| - |-h|}{2h} = \frac{|h| - |h|}{2h} = 0$$

La fonction m admet une limite en 0 alors que f n'est pas dérivable en a .

On peut ajouter que si f est dérivable à gauche et à droite en a alors la limite de m en 0 est la moyenne entre les dérivées à gauche et à droite de f en a .

8 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Soit f une fonction vérifiant la relation ci-dessus.

On fixe $y \in \mathbb{R}$. Comme f est dérivable alors en dérivant par rapport à x on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x + y) = f'(x)$$

Ceci est valable pour tout $y \in \mathbb{R}$, et en particulier pour $x = 0$:

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad f'(y) = f'(0)$$

Posons $a = f'(0)$. Alors $f' = a$. Comme f est définie sur \mathbb{R} qui est un intervalle alors il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = ax + b$

Réciproquement, si f est une fonction de la forme $f(x) = ax + b$, alors la relation de l'énoncé équivaut à :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad a(x + y) + b = ax + b + ay + b$$

Elle est vraie si et seulement si $b = 0$.

En conclusion les fonctions dérivables vérifiant la relation $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sont les fonctions linéaires $x \mapsto ax$ où a est un réel quelconque.

9 Démontrer que l'équation différentielle

$$ty' - y = 0 \quad y(1) = 1$$

possède une unique solution dérivable sur \mathbb{R} .

Sur l'ensemble \mathbb{R}^* l'équation équivaut à :

$$y' - \frac{1}{t}y = 0 \tag{1}$$

Le théorème de résolution des équations différentielles de ce type donne les solutions sur un intervalle.

Ici \mathbb{R}^* est l'union des deux intervalles \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* .

Soit $a(t) = \frac{1}{t}$, puis $A(t) = \ln |t|$. Alors A est une primitive de a .

Comme \mathbb{R}_+^* est un intervalle alors les solutions de l'équation (1) sur \mathbb{R}_+^* sont les fonctions $y(t) = \lambda e^{A(t)} = \lambda t$, où λ est une constante réelle.

Comme \mathbb{R}_-^* est un intervalle alors les solutions de l'équation (1) sur \mathbb{R}_-^* sont les fonctions $y(t) = \mu e^{A(t)} = -\mu t$, où μ est une constante réelle.

Quitte à remplacer μ par $-\mu$ on peut écrire $y(t) = \mu t$ sur \mathbb{R}_-^* .

Sur l'ensemble $\{0\}$ l'équation de départ admet une unique solution : $y(0) = 0$.

Les solutions de l'équation de départ sont par restrictions solutions sur \mathbb{R}_+^* , sur \mathbb{R}_-^* et sur $\{0\}$, donc ce sont les fonctions :

$$y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \begin{cases} \lambda t & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ \mu t & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad \text{avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ constantes réelles}$$

On remarque que cette fonction est dérivable à gauche et à droite en 0, de dérivées $f'_g(0) = \mu$ et $f'_d(0) = \lambda$.

Or une solution de l'équation différentielle de départ sur \mathbb{R} est supposée dérivable, donc en particulier dérivable en 0. Ses dérivées à gauche et à droite sont donc égales, ce qui impose $\lambda = \mu$.

La condition initiale $y(1) = 1$ donne $\lambda = 1$, donc finalement la fonction $y : t \mapsto t$ est la solution unique de l'équation proposée.

10 Soit $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables telles que $f(a) = g(a)$ et $f(b) = g(b)$. Démontrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = g'(c)$.

Soit $h = f - g$.

La fonction h est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et $h(a) = h(b) = 0$.

D'après le théorème de Rolle il existe $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$.

Comme $h = f - g$ alors $h' = f' - g'$ donc $h'(c) = f'(c) - g'(c)$, ce qui donne $f'(c) = g'(c)$.

Il existe donc bien $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = g'(c)$.

11 Soit $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

a. On suppose que f est dérivable en a et que $f'(a) > 0$.

Démontrer qu'il existe $x \in]a, b[$ tel que $f(x) > f(a)$.

b. On suppose que f est deux fois dérivable sur $[a, b]$, que $f(a) = f(b)$, et que $f'(a) > 0$, $f'(b) > 0$. Démontrer que f'' s'annule sur $]a, b[$.

a. On raisonne par contraposée en supposant que pour tout $x \in]a, b[$: $f(x) \leq f(a)$.

Alors pour tout $x > a$: $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$.

Cette fonction de x admet $f'(a)$ pour limite lorsque x tend vers a par valeurs supérieures, car f est dérivable en a .

On en déduit donc $f'(a) \leq 0$ par théorème de comparaison.

Par contraposée si $f'(a) > 0$ alors il existe $x \in]a, b[$ tel que $f(x) > f(a)$.

b. D'après la question précédente il existe $c_1 \in]a, b[$ tel que $f(c_1) > 0$.

De même, comme $f'(b) > 0$ alors il existe $c_2 \in]a, b[$ tel que $f(c_2) < 0$.

Par théorème des valeurs intermédiaires, f étant continue, il existe d entre c_1 et c_2 tel que $f(d) = 0$. On a alors $d \in]a, b[$, ceci car c_1 ne peut valoir b et c_2 ne peut valoir a .

On applique le théorème de Rolle sur les intervalles $[c_1, d]$ et $[d, c_2]$ (ou $[d, c_1]$ et $[c_2, d]$).

Il existe e_1 strictement entre c_1 et c , e_2 strictement entre c_2 et d , tels que $f'(e_1) = f'(e_2) = 0$.

Alors $e_1 \neq e_2$. On applique le théorème de Rolle à la fonction f' , qui est bien dérivable, sur le segment $[e_1, e_2]$ ou $[e_2, e_1]$. Il montre que f'' s'annule sur ce segment.

13 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ périodique de classe C^1 .

- Démontrer que f' est périodique.
- Démontrer que f' s'annule en un nombre infini de points.
- Démontrer que f est lipschitzienne.

a. Soit T une période de f . Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x + T) = f(x)$$

La dérivée de la fonction $x \mapsto x + T$ est la fonction $x \mapsto 1$, donc en dérivant on obtient par composition :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x + T) = f'(x)$$

La fonction f' est donc périodique de période T .

b. Comme la fonction f est T -périodique alors $f(0) = f(T)$.

La fonction f est de classe C^1 , donc elle est continue sur $[0, T]$ et dérivable sur $]0, T[$.

D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]0, T[$ tel que $f'(c) = 0$.

Comme la fonction f' est T -périodique alors $f'(c + nT) = 0$ pour tout entier n , ce qui montre que f' s'annule en un nombre infini de points.

c. Comme la fonction f est de classe C^1 alors la fonction f' est continue.

Une fonction continue sur un segment est bornée, donc la fonction f' est bornée sur le segment $[0, T]$.

Comme elle est T -périodique alors elle est bornée sur \mathbb{R} tout entier.

En effet la périodicité montre que pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $f([nT, (n+1)T]) = f([0, T])$,

et comme $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [nT, (n+1)T]$ alors :

$$f(\mathbb{R}) = f\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [nT, (n+1)T]\right) = f([0, T])$$

Soit M un majorant de $|f'|$.

La fonction f est dérivable sur l'intervalle \mathbb{R} et la fonction $|f'|$ est majorée par M donc par inégalité des accroissements finis la fonction f est M -lipschitzienne.

14 Soit P un polynôme scindé de $\mathbb{R}[X]$.

On note $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ ses racines, rangées dans l'ordre strictement croissant.

a. Démontrer qu'il existe des racines $\beta_1, \dots, \beta_{k-1}$ de P' telles que :

$$\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \dots < \beta_{k-1} < \alpha_k$$

b. Démontrer que P' est scindé.

a. On applique le théorème de Rolle sur chaque intervalle $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$, pour i allant de 1 à $k-1$.

b. On note m_i la multiplicité de α_i . Alors la somme des m_i est égal à n , le degré de P .

Par propriété des polynômes chaque α_i est racine de P' de multiplicité $m_i - 1$.

La somme des multiplicités des racines $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \dots, \beta_{k-1}, \alpha_k$ dans le polynôme P' est donc au minimum :

$$\sum_{i=1}^k (m_i - 1) + \sum_{i=1}^{k-1} 1 = n - k + k = n - 1$$

Comme le polynôme P' est de degré $n - 1$ alors il n'admet pas d'autres racines, et donc il est scindé.

15 Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable.

On suppose que $f(a) \neq f(b)$.

On note A et B les points d'affixes $f(a)$ et $f(b)$, et pour tout $t \in [a, b]$, $v(t)$ le vecteur d'affixe $f'(t)$.

Soit $x = \operatorname{Re} f$ et $y = \operatorname{Im} f$ la partie réelle et la partie imaginaire de f .

a. Donner en fonction de x et y les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AB} et $v(t)$.

b. Démontrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que les vecteurs \overrightarrow{AB} et $v(c)$ sont colinéaires.

a. Comme $x = \operatorname{Re} f$ et $y = \operatorname{Im} f$ alors pour tout $t \in [a, b]$: $f(t) = x(t) + iy(t)$

Les points A et B ont pour affixes $f(a) = x(a) + iy(a)$ et $f(b) = x(b) + iy(b)$, donc leurs coordonnées sont $(x(a), y(a))$ et $(x(b), y(b))$.

Le vecteur \overrightarrow{AB} admet donc pour coordonnées $(x(b) - x(a), y(b) - y(a))$.

De plus, par propriété $f'(t) = x'(t) + iy'(t)$, donc le vecteur $v(t)$ d'affixe $f'(t)$ admet pour coordonnées $(x'(t), y'(t))$.

b. Deux vecteurs du plan sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

Le déterminant des vecteurs \overrightarrow{AB} et $v(t)$ est :

$$\det(\overrightarrow{AB}, v(t)) = \begin{vmatrix} x(b) - x(a) & x'(t) \\ y(b) - y(a) & y'(t) \end{vmatrix} = (x(b) - x(a))y'(t) - x'(t)(y(b) - y(a))$$

On définit la fonction h par :

$$\forall t \in [a, b] \quad h(t) = (x(b) - x(a))y'(t) - x'(t)(y(b) - y(a))$$

Cette fonction est combinaison linéaire des fonctions x et y donc elle est continue sur $[a, b]$ et dérivable que $]a, b[$.

On vérifie que $h(a) = h(b)$. En effet :

$$\begin{aligned} h(a) - h(b) &= \left((x(b) - y(a))y(a) - x(a)(y(b) - y(a)) \right) \\ &\quad - \left((x(b) - y(a))y(b) - x(b)(y(b) - y(a)) \right) \\ &= (x(b) - y(a))(y(a) - y(b)) - (x(a) - y(b))(y(b) - y(a)) = 0 \end{aligned}$$

D'après le théorème de Rolle il existe $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$. On calcule :

$$\forall t \in]a, b[\quad h'(t) = (x(b) - x(a))y'(t) - x'(t)(y(b) - y(a))$$

Il existe donc $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$, *i.e.*, $\det(\overrightarrow{AB}, v(c)) = 0$.

Les vecteurs \overrightarrow{AB} et $v(c)$ sont colinéaires.

16 Démontrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$: $|e^{ib} - e^{ia}| \leq |b - a|$

On peut inverser a et b sans perdre de généralité, donc on suppose $a \leq b$.

Méthode 1. La fonction complexe $f : t \mapsto e^{it}$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Sa dérivée est :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f'(t) = ie^{it}$$

Celle-ci est de module 1 donc :

$$\forall t \in]a, b[\quad |f'(t)| \leq 1$$

D'après l'inégalité des accroissements finis pour les fonctions complexes ceci implique que :

$$|f(a) - f(b)| \leq |a - b|$$

C'est exactement le résultat souhaité.

Méthode 2. On utilise l'angle moyen :

$$e^{ia} - e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} - e^{-i\frac{a-b}{2}} \right) = e^{i\frac{a+b}{2}} 2i \sin \frac{a-b}{2}$$

On sait que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad |\sin t| \leq |t|$$

On en déduit

$$|e^{ia} - e^{ib}| = \left| e^{i\frac{a+b}{2}} \right| 2 \left| \sin \frac{a-b}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{a-b}{2} \right| = |a-b|$$

Le résultat est démontré.

17 À l'aide du théorème des accroissements finis, déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}})$

On pose : $\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad f(t) = te^{\frac{1}{t}}$

La fonction f est définie et dérivable sur \mathbb{R}^* par composition et produit. On calcule :

$$\forall t \in \mathbb{R}^* \quad f'(t) = \left(1 - \frac{1}{t}\right)e^{\frac{1}{t}}$$

Notons maintenant x un réel strictement positif.

La fonction f est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$ donc d'après le théorème des accroissements finis il existe $c_x \in]x, x+1[$ tel que :

$$f'(c_x) = f(x+1) - f(x)$$

Comme $c_x \in]x, x+1[$ alors par théorème de comparaison c_x tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. Or on constate que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right)e^{\frac{1}{t}} = 1$$

Par composition de limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(c_x) = 1$$

puis par définition de c_x :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} \right) = 1$$

Remarque. Il est possible de calculer cette limite directement, grâce au changement de variable $h = \frac{1}{x}$.

18 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I . Soit x un point de I , et h un réel non-nul tel que $x+h$ appartient à I .

a. Démontrer qu'il existe un réel $\theta \in]0, 1[$ tel que :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h)$$

b. Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, calculer un tel réel θ . Donner une interprétation géométrique de ce dernier résultat.

a. On applique le théorème des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[x, x+h]$ (ou $[x+h, x]$ si h est négatif).

On supposera dans la suite que h est positif pour simplifier, mais les résultats sont similaires sinon.

Par énoncé x et $x+h$ sont éléments de I , lequel est un intervalle, donc l'intervalle $[x, x+h]$ est inclus dans I .

Or f est dérivable sur I , donc elle est continue sur $[x, x+h]$ et dérivable sur $]x, x+h[$.

D'après le théorème des accroissements finis il existe un élément c de $]x, x + h[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Par équivalences :

$$x < c < x + h \iff 0 < c - x < h \iff 0 < \frac{c - x}{h} < 1$$

On pose : $\theta = \frac{c-x}{h}$

Alors $c = x + \theta h$ et donc il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $f'(x + \theta h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, ce qui donne :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x + \theta h)$$

b. Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ alors l'égalité ci-dessus s'écrit :

$$a(x+h)^2 + b(x+h) + c = ax^2 + bx + c + 2h[a(x + \theta h) + b]$$

Ceci équivaut à $\theta = \frac{1}{2}$.

On en déduit que sur une parabole, si on trace une corde reliant deux points A et B d'abscisses a et b , alors la tangente à la parabole parallèle à cette corde est la tangente au point d'abscisse $\frac{a+b}{2}$.

19 On fixe un entier m et on note :

$$I_m = \left] m\pi - \frac{\pi}{2}, m\pi + \frac{\pi}{2} \right[$$

a. Démontrer qu'il existe un unique $\alpha_m \in I_m$ tel que : $\tan \alpha_m = \alpha_m$

b. Déterminer α_0 , puis α_{-m} en fonction de α_m .

On suppose dorénavant que m est strictement positif et on pose : $h_m(x) = m\pi + \arctan x$

c. Démontrer que I_m est stable par h_m , et que h_m admet α_m pour unique point fixe.

d. Démontrer que h_m est *contractante* sur I_m , i.e., k -lipschitzienne avec $|k| < 1$.

e. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = m\pi$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = h_m(u_n)$

Démontrer que (u_n) converge vers α_m .

a. La fonction $f_m : x \mapsto \tan x - x$ est continue, strictement croissante sur I_m , de limites $\pm\infty$, donc bijective de I_m dans \mathbb{R} .

b. On démontre que $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_{-m} = -\alpha_m$ car $-I_m = I_{-m}$.

c. Comme $\arctan x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors I_m est stable par h_m .

On démontre que $h_m(x) = x$ équivaut à $\tan x = x$, donc x est point fixe de h_m si et seulement si $x = \alpha_m$.

d. $h'_m(x) = \frac{1}{1+x^2}$, majorée par $k_m = \frac{4}{4+\pi^2}$ sur I_m .

On applique l'inégalité des accroissements finis.

e. On démontre par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \alpha_m| \leq k_m^n |u_0 - \alpha_m|$$

On applique ensuite le théorème d'encadrement.

20 Soit a et b deux fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur un intervalle I et (E) l'équation différentielle :

$$y'(t) - a(t)y(t) = b(t)$$

a. Justifier que (E) possède des solutions.

b. Démontrer que ces solutions sont de classe \mathcal{C}^∞ .

a. Il s'agit du problème de Cauchy. Comme les fonctions a et b sont continues (car de classe \mathcal{C}^∞), et I est un intervalle, alors l'équation différentielle (E) admet une solution. Celle-ci serait uniquement déterminée si l'on adjoignait une condition initiale à l'équation différentielle.

b. Soit f une solution de l'équation (E) . Ceci signifie que f est une fonction dérivable telle que : $\forall t \in I \quad f'(t) = a(t)f(t) + b(t)$

On démontre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction f est n fois dérivable.

Initialisation. La fonction f est dérivable car elle est solution de (E) .

Hérédité. Supposons que f est dérivable n fois pour un entier $n > 0$.

Les fonctions a et b sont de classe \mathcal{C}^∞ . En conséquence les fonctions f , a et b sont dérivables n fois, donc par produit et somme la fonction $t \mapsto a(t)f(t) + b(t)$ est dérivable n fois.

Ainsi f' est dérivable n fois, donc f est dérivable $n + 1$ fois. Ceci prouve l'hérédité.

Conclusion. Par récurrence, la fonction f est dérivable n fois pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Ceci signifie exactement que f est de classe \mathcal{C}^∞ .

21 Calculer les dérivées successives des fonctions suivantes.

$$f_5(x) = \cos 2x \sin 3x \quad f_6(x) = \ln(2 - 3x) \quad f_8(x) = x(x - 2)^p \quad (p \in \mathbb{N})$$

$$f_5(x) = \cos 2x \sin 3x$$

$$\text{Par linéarisation : } f_5(x) = \frac{1}{2}(\sin 5x + \sin x)$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_5^{(n)}(x) = \frac{1}{2} \left(5^n \sin\left(5x + n\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \right)$$

$$f_6(x) = \ln(2 - 3x)$$

On démontre par récurrence la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f_6^{(n)}(x) = -\frac{3^n(n-1)!}{(2-3x)^n}$$

$$f_8(x) = x(x-2)^p \quad \text{avec } p \in \mathbb{N}$$

On pose $g(x) = x$ et $h(x) = (x-2)^p$. La formule de Leibniz donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_8^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x)$$

Les dérivées successives de g sont $g^{(0)}(x) = x$, $g^{(1)}(x) = 1$, puis $g^{(k)}(x) = 0$ pour $k \geq 2$.
On en déduit que si $n \geq 1$ alors :

$$f_8^{(n)}(x) = xh^{(n)}(x) + nh^{(n-1)}(x)$$

Si $1 \leq n \leq p$ alors :

$$\begin{aligned} f_8^{(n)}(x) &= x \frac{p!}{(p-n)!} (x-2)^{p-n} + n \frac{p!}{(p-n+1)!} (x-2)^{p-n+1} \\ &= \frac{p!}{(p-n+1)!} (x-2)^{p-n} [(p-n+1)x + n(x-2)] \\ &= \frac{p!}{(p-n+1)!} (x-2)^{p-n} [(p+1)x - 2n] \end{aligned}$$

Si $n = p+1$ alors :

$$f_8^{(n)}(x) = 0 + (p+1) \times p! = (p+1)!$$

Enfin si $n > p+1$ alors $f_8^{(n)}(x) = 0$.

On constate que la formule obtenue pour $n = 1, \dots, p$ est valable aussi pour $n = 0$ et $n = p+1$, donc finalement :

$$f_8^{(n)}(x) = \begin{cases} \frac{p!}{(p-n+1)!} (x-2)^{p-n} [(p+1)x - 2n] & \text{si } 0 \leq n \leq p+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

22 Calculer les dérivées successives de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto e^x \cos x$ $x \mapsto e^x \sin x$

On pose $h = f + ig$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$: $h(x) = e^{(1+i)x}$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad h^{(n)}(x) = (1+i)^n e^{(1+i)x}$$

Puis :

$$h^{(n)}(x) = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n e^{(1+i)x} = 2^{\frac{n}{2}} e^{i\frac{n\pi}{4}} e^{(1+i)x} = 2^{\frac{n}{2}} e^x e^{i\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) = 2^{\frac{n}{2}} e^x \cos\left(x + n\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{et} \quad g^{(n)}(x) = 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)$$

23 Déterminer les classes des fonctions suivantes, toutes définies sur \mathbb{R} .

$$f_1 : x \mapsto \begin{cases} \ln(x+1) & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x}{1-x} & \text{sinon} \end{cases} \quad f_2 : x \mapsto |x|^3$$

$$f_3 : x \mapsto \begin{cases} x^3 \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad f_4 : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$g_\alpha : x \mapsto \begin{cases} x^\alpha & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$f_1 : x \mapsto \begin{cases} \ln(x+1) & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x}{1-x} & \text{sinon} \end{cases}$$

Par composition et quotient cette fonction est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^* .

Ses premières dérivées sont :

$$f_1^{(1)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{(x-1)^2} & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad f_1^{(2)}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \\ \frac{2}{(1-x)^3} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Étudions maintenant la classe de f_1 en 0.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_1(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f_1(x) = 0$ et $f_1(0) = 0$ alors f_1 est continue en 0.

Ceci implique que f_1 est continue sur \mathbb{R} , *i.e.*, elle est de classe \mathcal{C}^0 .

Pour la dérivabilité on constate que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_1'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f_1'(x) = 1$. Ainsi :

- f_1 est continue sur \mathbb{R} ,
- f_1 est dérivable sur \mathbb{R}^* ,
- $\lim_{x \rightarrow 0} f_1'(x) = 1$,

D'après le théorème de limite de la dérivée f_1 est dérivable en 0, de dérivée $f_1'(0) = 1$.

De plus $\lim_{x \rightarrow 0} f_1'(x) = f_1'(0)$ donc f_1' est continue en 0.

Ainsi f_1 est de classe \mathcal{C}^1 .

Pour la dérivabilité seconde, on calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_1''(x) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f_1''(x) = 2$.

Ceci montre que f_1' n'est pas de classe \mathcal{C}^2 en 0. En fait d'après le théorème de limite de la dérivée elle est dérivable à gauche et à droite, mais de dérivées secondes différentes, donc elle n'est pas dérivable en 0.

En conclusion, f_1 est de classe \mathcal{C}^1 mais pas de classe \mathcal{C}^2 .

$$f_2 : x \mapsto |x|^3$$

La fonction valeur absolue est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^* donc par produit la fonction f_2 est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^* .

La dérivée de la fonction $x \mapsto |x|$ est $x \mapsto \frac{x}{|x|}$. On calcule alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f_2'(x) = 3x|x| \quad f_2''(x) = 6|x| \quad f_2'''(x) = 6\frac{x}{|x|} \quad f_2^{(4)}(x) = 0$$

Comme la fonction valeur absolue est continue sur \mathbb{R} alors la fonction f_2 est continue sur \mathbb{R} .

Le théorème de limite de la dérivée montre qu'elle est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , avec $f_2'(0) = 0$. Le théorème de limite de la dérivée appliqué à f_2' montre que f_2 est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} , avec $f_2''(0) = 0$.

La fonction f_2'' n'est pas dérivable en 0 donc f_2 n'est pas de classe \mathcal{C}^3 .

Finalement la fonction f_2 est de classe \mathcal{C}^2 mais pas de classe \mathcal{C}^3 .

$$f_3 : x \mapsto \begin{cases} x^3 \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par produit cette fonction est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^* . Ses premières dérivées sur cet ensemble sont :

$$f_3^{(0)}(x) = \begin{cases} x^3 \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad f_3^{(1)}(x) = \begin{cases} 3x^2 \ln x + x^2 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$f_3^{(2)}(x) = \begin{cases} 6x \ln x + 5x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad f_3^{(3)}(x) = \begin{cases} 6 \ln x + 11 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On sait par croissances comparées que pour tout $\alpha > 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln x = 0$

On en déduit :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_3^{(0)}(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f_3^{(1)}(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f_3^{(2)}(x) = 0$$

On montre que la fonction f_3 est continue en 0 (car $f_3(0) = 0$), puis grâce au théorème de limite de la dérivée qu'elle est de classe \mathcal{C}^1 en 0 avec $f_3'(0) = 0$, puis qu'elle est de classe \mathcal{C}^2 en 0 avec $f_3''(0) = 0$, et enfin qu'elle n'est pas de classe \mathcal{C}^3 .

Pour ce dernier point on peut aussi appliquer la définition de la dérivabilité :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \frac{f_3^{(2)}(x) - f_3^{(2)}(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} (6 \ln x + 5) = -\infty$$

Donc $f_3^{(2)}$ n'est pas dérivable à droite en 0, et *a fortiori* $f_3^{(2)}$ n'est pas dérivable.

En conséquence f_3 n'est pas trois fois dérivable, et donc f_3 est de classe \mathcal{C}^2 .

$$f_4 : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette fonction est de classe \mathcal{C}^0 et dérivable, mais n'est pas de classe \mathcal{C}^1 .

Par composition et produit f_4 est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^* .

Démontrons qu'elle est dérivable en 0 :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \frac{f_4(x) - f_4(0)}{x - 0} = x \sin \frac{1}{x}$$

La fonction $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ est bornée et la fonction $x \mapsto x$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, donc le produit $x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0. On en déduit que f_4 est dérivable en 0, de dérivée $f_4'(0) = 0$.

Ainsi f_4 est dérivable sur \mathbb{R} . Sa dérivée est :

$$f_4' : x \mapsto \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette dérivée n'est pas continue en 0. En effet, si on pose $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ alors : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f'_4(x_n) = -1$

On a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_4(x_n) = -1 \neq f'_4(0)$$

La fonction f'_4 n'est pas continue en 0.

Finalement nous avons démontré que la fonction f_4 est de classe \mathcal{C}^0 , mais pas de classe \mathcal{C}^1 , bien qu'elle soit dérivable.

Elle fournit donc un exemple de fonction dérivable à dérivée non continue.

$$g_\alpha : x \mapsto \begin{cases} x^\alpha & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^{[\alpha]-1}$ si α est strictement positif, aucune sinon.

Tout d'abord g_α est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^* , car la fonction $x \mapsto 0$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^* et la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* , ceci car : $\forall x > 0 \quad x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$

Cette dernière formule permet aussi de retrouver la limite de g_α à droite en 0. On obtient :

$$\lim_{x \rightarrow 0} g_\alpha(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} g'_\alpha(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \alpha x^{\alpha-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

On en déduit que g_α est continue en 0 si et seulement si $\alpha > 0$.

On suppose dorénavant $\alpha > 0$ et on détermine la classe de g_α en 0.

Il est clair qu'elle est dérivable à gauche, de dérivée nulle. Pour la dérivée à droite :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g_\alpha(x) - g_\alpha(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha-1}$$

Ainsi f est dérivable à droite en 0 si et seulement si $\alpha \geq 1$. Si $\alpha = 1$ alors cette dérivée à droite est égale à 1, donc différente de celle à gauche. Si $\alpha > 1$ alors la dérivée à droite est nulle, donc g_α est dérivable en 0, de dérivée nulle.

Ainsi g_α est dérivable en 0 si et seulement si $\alpha > 1$.

On démontre par récurrence la propriété suivante, définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathcal{P}_n : \quad \text{Si } [\alpha] = n \text{ alors } g_\alpha \text{ est de classe } \mathcal{C}^{n-1} \text{ mais pas de classe } \mathcal{C}^n.$$

Initialisation. Supposons que $[\alpha] = 1$, i.e., $\alpha \in]0, 1]$. D'après ce qui précède g_α est continue, donc de classe \mathcal{C}^0 , mais elle n'est pas dérivable en 0, donc pas de classe \mathcal{C}^1 .

La propriété est vraie au rang $n = 1$.

Hérédité. Supposons que la propriété est établie au rang n pour un entier $n \geq 1$.

Soit α un réel tel que $[\alpha] = n + 1$, i.e., $n < \alpha \leq n + 1$.

Alors $\alpha > 1$ donc g_α est dérivable. Sa dérivée est :

$$g'_\alpha : x \mapsto \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi $g'_\alpha = \alpha g_{\alpha-1}$. Comme $[\alpha] = n + 1$ alors $[\alpha - 1] = n$, donc par hypothèse de récurrence $g_{\alpha-1}$ est de classe \mathcal{C}^{n-1} mais pas de classe \mathcal{C}^n .

Ainsi g_α est dérivable, de dérivée de classe \mathcal{C}^{n-1} , donc g_α est de classe \mathcal{C}^n .

Comme g'_α n'est pas de classe \mathcal{C}^n alors g_α n'est pas de classe \mathcal{C}^{n+1} .

L'hérédité est démontrée.

Conclusion. Par récurrence la propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Ceci montre que g_α est de classe $\mathcal{C}^{[\alpha]-1}$ si $\alpha > 0$, mais n'est pas de classe \mathcal{C}^0 sinon.

24 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto xe^{x^2}$$

- Démontrer que f est bijective.
- Justifier que f^{-1} est de classe \mathcal{C}^∞ .

- a. Par composition et produit la fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , et *a fortiori* elle est dérivable. On obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = (2x^2 + 1)e^{x^2}$$

Cette dérivée est strictement positive donc f est strictement croissante.

Par théorème, f est continue et strictement croissante donc elle réalise une bijection de \mathbb{R} dans $f(\mathbb{R})$.

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ alors $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Ceci montre que f est bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

- b. Par théorème, comme f est dérivable alors f^{-1} est dérivable sur l'ensemble :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f'(f^{-1}(x)) \neq 0\}$$

La fonction f' étant strictement positive, f^{-1} est dérivable sur \mathbb{R} .

Par théorème du cours, comme f est de classe \mathcal{C}^∞ alors sa réciproque f^{-1} est de classe \mathcal{C}^∞ sur son ensemble de dérivabilité, et donc f^{-1} est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

On peut démontrer que $f^{(-1)}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sans utiliser le théorème, de la façon suivante :

Le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque affirme que la dérivée de f^{-1} est :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Soit \mathcal{P}_n la proposition : f^{-1} est n fois dérivable.

On démontre par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation. Nous avons vu ci-dessus que f^{-1} est dérivable.

Hérédité. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ on sait que f^{-1} est n fois dérivable.

On sait que f est de classe \mathcal{C}^∞ , donc f' est n fois dérivable, puis par composition $f' \circ f^{-1}$ est n fois dérivable.

La fonction inverse est de classe \mathcal{C}^∞ donc la fonction $\frac{1}{f \circ f^{-1}}$ est n fois dérivable.

Ceci montre que $(f^{-1})'$ est n fois dérivable.

Ainsi f^{-1} est $n + 1$ fois dérivable. L'hérédité est établie.

Conclusion. Par récurrence f^{-1} est n fois dérivable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui montre que f^{-1} est de classe \mathcal{C}^∞ .

25 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- a. Justifier que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^* .
 b. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x < 0 \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{\frac{1}{x}}$$

- c. Démontrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

- a. La fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^* car :

- la fonction $x \mapsto 0$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+
- par composition la fonction $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_- .

- b. Soit \mathcal{P}_n la proposition : il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x < 0 \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{\frac{1}{x}}$$

On démontre par récurrence que cette proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. La proposition \mathcal{P}_0 est vraie avec $P_0 = 1$. En effet, pour tout $x > 0$:

$$f^{(0)}(x) = e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^0} e^{\frac{1}{x}}$$

Hérédité. Supposons que la proposition \mathcal{P}_n est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x < 0 \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{\frac{1}{x}}$$

Par produit et quotient la fonction $f^{(n)}$ est dérivable sur \mathbb{R}_- . On calcule sa dérivée :

$$\forall x > 0 \quad f^{(n+1)}(x) = \frac{x^2 P_n'(x) - (2nx + 1)P_n(x)}{x^{2(n+1)}} e^{\frac{1}{x}}$$

Posons

$$P_{n+1} = X^2 P_n' - (2nX + 1)P_n$$

Comme P_n est un polynôme alors P_{n+1} est un polynôme et :

$$\forall x < 0 \quad f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{x^{2(n+1)}} e^{\frac{1}{x}}$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est démontrée.

Ceci prouve que la proposition \mathcal{P}_n est héréditaire.

Conclusion. Par récurrence, la proposition \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. On sait déjà que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^* , démontrons que f est également de classe \mathcal{C}^∞ en 0.

Pour ceci on considère la proposition :

$$\mathcal{P}_n : f \text{ est de classe } \mathcal{C}^n \text{ en } 0 \text{ et } f^{(n)}(0) = 0$$

On démontre par récurrence que cette proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, ce qui montre que f est continue en 0. La proposition \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ la proposition \mathcal{P}_n est vraie. Alors la fonction $f^{(n)}$ est définie en 0 et $f^{(n)}(0) = 0$. De plus $f^{(n)}$ est continue en 0.

Démontrons que la fonction $f^{(n+1)}$ admet 0 pour limite en 0.

Tout d'abord $\lim_{x \rightarrow 0} f^{(n+1)}(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$.

Ensuite d'après la question précédente il existe un polynôme P_{n+1} tel que :

$$\forall x < 0 \quad f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{x^{2(n+1)}} e^{\frac{1}{x}}$$

En posant $y = \frac{1}{x}$ on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2(n+1)}} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow -\infty} y^{2(n+1)} e^y$$

Par croissances comparées cette limite est nulle. Comme $x \mapsto P_{n+1}(x)$ est une fonction polynomiale alors elle admet une limite finie en 0 et donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{P_{n+1}(x)}{x^{2(n+1)}} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

Finalement :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f^{(n+1)}(x) = 0$$

Ainsi on sait que :

- $f^{(n)}$ est continue sur \mathbb{R} par hypothèse de récurrence
- $f^{(n+1)}$ est dérivable sur \mathbb{R}^* car f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^*
- $\lim_{x \rightarrow 0} f^{(n+1)}(x) = 0$

D'après le théorème de limite de la dérivée $f^{(n)}$ est dérivable en 0 et $f^{(n+1)}(0) = 0$.

La fonction $f^{(n+1)}$ est continue en 0 car $\lim_{x \rightarrow 0} f^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(0)$, donc f est de classe \mathcal{C}^{n+1} en 0. La propriété \mathcal{P}_{n+1} est démontrée.

Ainsi la propriété \mathcal{P}_{n+1} est vraie au rang $n + 1$ si elle l'est au rang n .

Conclusion. Par récurrence, la propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ceci implique que f est de classe \mathcal{C}^∞ en 0, et finalement f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

26 Soit I un intervalle non réduit à un point. Déterminer les fonctions convexes et concaves sur I .

Soit a un point de I . Comme f est convexe et concave alors la fonction pente p_a est croissante et décroissante, donc constante.

Soit α sa valeur. Alors :

$$\forall x \in I \setminus \{a\} \quad f(x) = f(a) + \alpha(x - a)$$

On remarque que cette égalité est valable aussi pour $x = a$.

Elle montre que f est affine : en posant $\beta = f(a) - \alpha a$ on obtient :

$$\forall x \in I \quad f(x) = \alpha x + \beta$$

Réciproquement, si la fonction f est affine, *i.e.*, de la forme $f(x) = \alpha x + \beta$ alors toutes ses fonctions pentes s'écrivent $p_a(x) = \alpha$, elles sont constantes donc croissantes et décroissantes, et ainsi f est convexe et concave.

On a démontré que les fonctions convexes et concaves sont les fonctions affines, *i.e.*, les fonctions donc les courbes sont des droites.

27 Démontrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe majorée est constante.

Soit M un majorant de f . On peut alors majorer la fonction pente en 0 :

$$\begin{aligned} \forall x > 0 \quad p_0(x) &= \frac{f(x) - f(0)}{x} \leq \frac{M - f(0)}{x} \\ \forall x < 0 \quad p_0(x) &= \frac{f(x) - f(0)}{x} \geq \frac{M - f(0)}{x} \end{aligned}$$

Comme f est convexe alors la fonction p_0 est croissante. D'après le théorème de la limite monotone elle admet des limites en $-\infty$ et $+\infty$.

Comme $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{M - f(0)}{x} = 0$ alors par théorème de comparaison :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p_0(x) \leq 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} p_0(x) \geq 0$$

De plus la limite de p_0 en $-\infty$ est sa borne inférieure et sa limite en $+\infty$ est sa borne supérieure, donc $\text{Sup } p_0 \leq 0$ et $\text{Inf } p_0 \geq 0$, ce qui montre que $\text{Inf } p_0 = \text{Sup } p_0 = 0$, donc p_0 est nulle sur \mathbb{R}^* .

On obtient : $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = f(0)$

Cette égalité est vraie aussi pour $x = 0$, donc f est constante.

28 Soit f une fonction convexe sur un intervalle I non réduit à un point.

a. Soit a et b deux points de I avec $a < b$.

Démontrer que la courbe de f est au-dessus de la corde reliant les points d'affixes a et b sur les intervalles $I \cap]-\infty, a]$ et $I \cap [b, +\infty[$.

b. On suppose que I est borné. Démontrer que f est minorée.

a. La fonction pente en a est croissante sur $I \setminus \{a\}$, donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in I \setminus \{a\} \quad x \leq b &\implies p_a(x) \leq p_a(b) \\ x \geq b &\implies p_a(x) \geq p_a(b) \end{aligned}$$

Si $x < a$ alors $x \leq b$ et $x - a < 0$ donc : $f(x) \geq p_a(b)(x - a) + f(a)$.

Si $x \geq b$ alors $x > a$ puis $x - a > 0$ donc : $f(x) \geq p_a(b)(x - a) + f(a)$.

Ceci donne :

$$\begin{aligned} \forall x \in I \setminus \{a\} \quad x < a &\implies f(x) \geq p_a(b)(x - a) + f(a) \\ x \geq b &\implies f(x) \geq p_a(b)(x - a) + f(a) \end{aligned}$$

La corde reliant les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ admet pour équation $y = p_a(b)(x - a) + f(a)$, donc nous venons de démontrer que la courbe de f est au-dessus de cette corde sur les intervalles $I \cap]-\infty, a[$ et $I \cap]b, +\infty[$.

b. Soit a, b, c trois points de I avec $a < b < c$.

Soit \mathcal{D}_1 la corde reliant les points d'abscisses a et b ,

\mathcal{D}_2 la corde reliant les points d'abscisses b et c .

D'après la question précédente la courbe de f est au-dessus de la droite \mathcal{D}_1 sur l'intervalle $I \cap [b, +\infty[$ et au-dessus de la droite \mathcal{D}_2 sur l'intervalle $I \cap]-\infty, b]$.

Les fonctions affines sont bornées sur un intervalle borné, donc f est minorée sur $I \cap [b, +\infty[$ et sur $I \cap]-\infty, b]$, et ainsi f est minorée sur I .

29 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tous réels strictement positifs x_1, \dots, x_n on définit :

$$A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \qquad G = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \qquad H = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right)^{-1}$$

a. Démontrer que $H \leq G \leq A$.

b. Démontrer que pour tout $(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$:

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz \qquad \text{et} \qquad (x + y + z)^3 \geq 27xyz$$

c. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2}$$

a. On sait que la fonction \ln est concave. En effet elle est deux fois dérivable, de dérivée seconde $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2}$, cette dérivée seconde est négative donc la fonction est concave. On applique l'inégalité de Jensen aux réels x_1, \dots, x_n , avec les poids $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$. Ces poids sont bien compris entre 0 et 1, de somme égale à 1. On obtient :

$$\ln \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \right) \geq \sum_{k=1}^n \lambda_k \ln(x_k)$$

Par application de la fonction exponentielle, croissante, on obtient :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \geq e^{\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \ln(x_k) \right)} = \prod_{k=1}^n e^{\frac{1}{n} \ln x_k} = \prod_{k=1}^n x_k^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k}$$

Ceci donne exactement $G \leq A$.

En remplaçant les x_i par $\frac{1}{x_i}$, lesquels sont bien des réels strictement positifs, on obtient :

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1 \cdots x_n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}$$

Ceci donne $\frac{1}{G} \leq \frac{1}{H}$, donc $H \leq G$.

b. Pour $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ puis $(x_1, x_2, x_3) = (x^3, y^3, z^3)$ l'inégalité $G \leq A$ donne :

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{1}{3}(x + y + z) \qquad \text{et} \qquad xyz \leq \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3)$$

On en déduit :

$$(x + y + z)^3 \geq 27xyz \qquad \text{et} \qquad x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$$

c. Pour $(x_1, \dots, x_n) = (1, 2, \dots, n)$ l'inégalité $G \leq A$ donne exactement :

$$\sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2}$$

La formule de Stirling donne quant à elle : $\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}$

30 Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ convexe dérivable. Démontrer que :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \leq \int_0^1 f(t) dt \leq \frac{f(0)+f(1)}{2}$$

La fonction f est convexe dérivable donc sa courbe située au-dessus de sa tangente en $\frac{1}{2}$ et en dessous de sa corde. Ceci s'écrit :

$$\forall t \in [0, 1] \quad f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(t - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(t) \leq (f(1) - f(0))t + f(0)$$

Par croissance de l'intégrale :

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right) dt + \int_0^1 f\left(\frac{1}{2}\right) dt \leq \int_0^1 f(t) dt \leq (f(1) - f(0)) \int_0^1 t dt + \int_0^1 f(0) dt$$

Or :

$$\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right) dt = \left[\frac{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2}{2} \right]_0^1 = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Ceci donne comme demandé : $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq \int_0^1 f(t) dt \leq \frac{f(0) + f(1)}{2}$.

31 Soit $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 vérifiant $f(a) = f(b) = 0$.

a. Justifier que $|f''|$ admet une borne supérieure M .

b. Démontrer que :

$$\forall x \in [a, b] \quad |f(x)| \leq \frac{M}{2}(x - a)(b - x)$$

On étudiera $f \pm g$ où $g(x) = \frac{M}{2}(x - a)(b - x)$.

a. Comme la fonction f est de classe \mathcal{C}^2 alors sa dérivée seconde f'' est continue.

Par théorème, une fonction continue sur un segment est bornée, donc la fonction f'' est bornée sur le segment $[a, b]$, et ainsi la fonction $|f''|$ admet une borne supérieure sur ce segment, laquelle est atteinte.

b. Posons $g(x) = \frac{M}{2}(x - a)(b - x)$.

Cette fonction est deux fois dérivable, de dérivée seconde $g''(x) = -M$.

Les fonctions $h = f - g$ et $k = f + g$ sont deux fois dérivables, de dérivées secondes $h''(x) = f''(x) + M$ et $k''(x) = f''(x) - M$.

Or par définition de M on a $-M \leq f''(x) \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$, donc $h''(x) \geq 0$ et $k''(x) \leq 0$.

La fonction h est donc convexe alors que la fonction k est concave.

Or $h(a) = h(b) = k(a) = k(b)$, donc la corde reliant les points d'abscisses a et b est l'axe des abscisses. Comme h est convexe alors la corde est au-dessus de sa courbe, comme k est concave alors la corde est en-dessous de sa courbe.

On en déduit : $\forall x \in [a, b] \quad h(x) \leq 0 \leq k(x)$

Puis : $\forall x \in [a, b] \quad -g(x) \leq f(x) \leq g(x)$

Enfin : $\forall x \in [a, b] \quad |f(x)| \leq g(x)$

Ceci est le résultat demandé.

32 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable. Démontrer que si

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad f(b) = 0$$

alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

On définit la propriété :

$$\mathcal{P}_k : \quad \exists b_k \in]a, b[\quad f^{(k)}(b_k) = 0$$

On démontre par récurrence finie que cette propriété est vraie pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$

Initialisation. On pose $b_0 = b$. Alors $f(b_0) = 0$ donc la propriété \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité. Supposons que pour un certain $k \in \{0, \dots, n-1\}$ la propriété \mathcal{P}_k est vraie, *i.e.*, il existe un entier $b_k \in]a, b[$ tel que $f^{(k)}(b_k) = 0$.

On applique le théorème de Rolle à la fonction $f^{(k)}$ sur l'intervalle $[a, b_k]$.

Par énoncé la fonction f est n fois dérivable sur l'intervalle $[a, b]$. Comme $k < n$ alors $f^{(k)}$ est dérivable sur $[a, b]$. Or $[a, b_k] \subseteq [a, b]$, donc par restriction :

- La fonction $f^{(k)}$ est continue sur $[a, b_k]$.
- La fonction $f^{(k)}$ est dérivable sur $]a, b_k[$.
- $f^{(k)}(a) = 0$ par énoncé, car $k \leq n-1$, et $f^{(k)}(b_k) = 0$ par hypothèse de récurrence. Donc $f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b_k)$.

D'après le théorème de Rolle il existe $b_{k+1} \in]a, b_k[$ tel que $f^{(k+1)}(b_{k+1}) = 0$.

Ainsi la Propriété \mathcal{P}_{k+1} est valide si la propriété \mathcal{P}_k l'est. L'hérédité est prouvée.

Conclusion. Par récurrence finie la propriété \mathcal{P}_k est vraie pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$.

De plus on a démontré que $a < b_n < b_{n-1} < \dots < b_1 < b_0 = b$, donc $b_n \in]a, b[$.

La propriété \mathcal{P}_n étant vraie, en notant $c = b_n$ on obtient qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

33 Une généralisation du théorème de Rolle

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, de limites $+\infty$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

a. Démontrer qu'il existe deux réels A et B tels que $A < B$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x \notin [A, B] \implies f(x) \geq f(0) + 1.$$

b. En déduire qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

a. Comme $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et $f(0) + 1 \in \mathbb{R}$ alors par définition il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \geq B \implies f(x) \geq f(0) + 1.$$

Comme $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$ et $f(0) + 1 \in \mathbb{R}$ alors par définition il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \leq A \implies f(x) \geq f(0) + 1.$$

On ne peut avoir $0 \geq B$ car sinon on aurait $f(0) \geq f(0) + 1$, ce qui est faux. Ainsi $0 < B$.

De même $0 > A$, donc $A < 0 < B$, et ainsi $A < B$.

Si x n'appartient pas au segment $[A, B]$ alors $x < A$ ou $x > B$, dans les deux cas on a $f(x) \geq f(0) + 1$.

b. D'après le théorème des valeurs extrêmes une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Or f est continue sur le segment $[A, B]$, donc f admet un minimum m sur $[A, B]$, atteint en un point c :

$$\exists c \in [A, B] \quad f(c) = m = \underset{[A, B]}{\text{Min}} f$$

Comme $0 \in [A, B]$ alors $m \leq f(0)$. Par construction $f(A) > f(0)$ et $f(B) > f(0)$, donc $f(A) \neq m$ et $f(B) \neq m$. Ainsi $f(c) \neq f(A)$ et $f(c) \neq f(B)$, donc $c \neq A$ et $c \neq B$.

Or $c \in [A, B]$, donc $c \in]A, B[$, *i.e.*, c est un point intérieur à $[A, B]$.

Donc f présente un minimum local en c , et par théorème $f'(c) = 0$.

Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

34 Soit I un intervalle, a un point de I , et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 .

a. Démontrer que pour tout $x \in I$ il existe un réel c compris entre a et x tel que :

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(c)$$

On souhaite généraliser ce résultat à l'ordre 2.

b. Démontrer que pour tout $x \in I$ il existe un réel A tel que :

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2}A$$

c. En utilisant la fonction $\varphi_x : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi_x(t) = f(x) - f(t) - (x - t)f'(t) - \frac{(x - t)^2}{2}A$$

démontrer qu'il existe un réel c strictement compris entre a et x tel que :

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2}f''(c)$$

a. Il suffit d'appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[a, x]$ si $a \leq x$ ou $[x, a]$ si $x < a$.

On suppose dans la suite que $a < x$, les résultats sont semblables si $x < a$.

Comme x et a appartiennent à I et comme celui-ci est un intervalle alors il contient l'intervalle $[a, x]$.

La fonction f est dérivable sur I donc elle est continue sur $[a, x]$ et dérivable sur $]a, x[$.

D'après le théorème des accroissements finis il existe $c \in]a, x[$ tel que $f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, ce qui donne comme demandé :

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(c)$$

b. On souhaite justifier qu'il existe un réel A tel que :

$$f(x) - f(a) - (x - a)f'(a) = \frac{(x - a)^2}{2}A$$

Si $x = a$ alors cette équation donne $0 = 0$, elle est valable pour tout réel A .

Si non il suffit de poser : $A = \frac{2}{(x - a)^2}(f(x) - f(a) - (x - a)f'(a))$

c. Comme la fonction f est de classe \mathcal{C}^2 alors la fonction f' est dérivable, et donc par combinaison linéaire la fonction φ_x est dérivable sur I .

On remarque que $\varphi_x(x) = 0$, et $\varphi_x(a) = 0$ par définition de A . Ainsi :

- La fonction φ_x est continue sur $[a, x]$
- La fonction φ_x est dérivable sur $]a, x[$
- $\varphi_x(a) = \varphi_x(x)$

D'après le théorème de Rolle il existe $c \in]a, x[$ tel que $\varphi'_x(c) = 0$.

On calcule :

$$\forall t \in I \quad \varphi'_x(t) = -f'(t) + f'(t) - (x - t)f''(t) + (x - t)A = (x - t)(A - f''(t))$$

Comme c est différent de x alors l'égalité $\varphi'_x(c) = 0$ donne $f''(c) = A$.

Nous avons donc démontré qu'il existe c entre a et x (*i.e.*, dans $]a, x[$ ou $]x, a[$) tel que :

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2}f''(c)$$

35 Soit f une fonction réelle de classe \mathcal{C}^2 sur un voisinage I de 0 telle que :

$$f(0) = f'(0) = 0 \quad \text{et} \quad f''(0) = \alpha \neq 0$$

Le but de cet exercice est de démontrer qu'alors :

$$f(x) \underset{(0)}{\sim} \alpha \frac{x^2}{2}$$

Pour tout $x \in I$ strictement positif on définit la fonction φ par :

$$\begin{aligned} \varphi : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f(x)t^2 - f(t)x^2 \end{aligned}$$

- Justifier que φ est de classe \mathcal{C}^2 , puis qu'il existe $t_1 \in]0, x[$ tel que $\varphi'(t_1) = 0$.
- Démontrer qu'il existe $t_2 \in]0, t_1[$ tel que $2f(x) = f''(t_2)x^2$.
- On admet que de même, si $x < 0$ alors il existe $t_2 \in]x, 0[$ tel que $2f(x) = f''(t_2)x^2$.
Conclure.

a. Comme x est fixé alors la fonction φ est combinaison linéaire des fonctions $t \mapsto t^2$ et $t \mapsto f(t)$. Ces deux fonctions sont de classe \mathcal{C}^2 donc φ est de classe \mathcal{C}^2 .

Sa dérivée en $t \in I$ est : $\varphi'(t) = 2f(x)t - f'(t)x^2$

De plus on remarque que $\varphi(0) = 0$ car $f(0) = 0$ et $\varphi(x) = 0$. On applique le théorème de Rolle :

- La fonction φ est continue sur $[0, x]$,
- la fonction φ est dérivable sur $]0, x[$,
- $\varphi(0) = \varphi(x)$.

Il existe donc $t_1 \in]0, x[$ tel que $\varphi'(t_1) = 0$.

b. Comme $f'(0) = 0$ alors $\varphi'(0) = 0$, ce qui donne $\varphi'(0) = \varphi'(t_1)$.

De plus la fonction φ' est dérivable car φ est de classe \mathcal{C}^2 .

Sa dérivée en $t \in I$ est : $\varphi''(t) = 2f(x) - f''(t)x^2$

On applique de nouveau le théorème de Rolle :

- La fonction φ' est continue sur $[0, t_1]$,
- la fonction φ' est dérivable sur $]0, t_1[$,
- $\varphi'(0) = \varphi'(t_1)$.

Il existe donc $t_2 \in]0, t_1[$ tel que $\varphi''(t_2) = 0$. Ceci donne $2f(x) = f''(t_2)x^2$, et comme $0 < t_1 < x$ alors on a bien $t_2 \in]0, x[$.

c. D'après la question précédente :

$$\forall x \in I \cap \mathbb{R}_+^* \quad \exists t_x \in]0, x[\quad \frac{2f(x)}{x^2} = f''(t_x)$$

Comme $t_x \in]0, x[$ alors par théorème d'encadrement : $\lim_{x \rightarrow 0} t_x = 0$

Comme f est de classe \mathcal{C}^2 alors f'' est continue, donc : $\lim_{x \rightarrow 0} f''(t_x) = f''(0) = \alpha$

Par composition de limites : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x)}{x^2} = \alpha$

On en déduit : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \frac{2f(x)}{x^2} = \alpha$

Si $x < 0$ on démontre de même qu'il existe $t_x \in]x, 0[$ tel que $2f(x) = f''(t_x)x^2$, et on en déduit $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ <}} \frac{2f(x)}{x^2} = \alpha$.

Ceci donne $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x)}{\alpha x^2} = 1$ et donc : $f(x) \underset{(0)}{\sim} \alpha \frac{x^2}{2}$

36 Soit p et q deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Démontrer que pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$: $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Comme $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors pour toute fonction concave f sur un intervalle I on a :

$$\forall (x, y) \in I^2 \quad f\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \geq \frac{f(x)}{p} + \frac{f(y)}{q}.$$

La fonction logarithme népérien est concave sur l'intervalle \mathbb{R}_+^* . En effet elle est deux fois dérivable, de dérivée seconde $\ln'' : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$, laquelle est négative.

Soit a et b deux réels strictement positifs. Soit $x = a^p$ et $y = b^q$. Alors :

$$\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p} \ln(a^p) + \frac{1}{q} \ln(b^q)$$

En appliquant la fonction exponentielle, qui est croissante, on obtient :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Il s'agit de la formule demandée.

37 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 .

On suppose que f s'annule en un nombre infini de points.

Démontrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = f'(c) = 0$.

Il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments distincts de $[a, b]$ tels que $f(u_n) = 0$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est incluse dans le segment $[a, b]$, donc bornée.

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass il existe une suite extraite de (u_n) convergente.

On note $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cette nouvelle suite, et c sa limite.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a \leq v_n \leq b$. Par théorème de comparaison $a \leq c \leq b$, donc $c \in [a, b]$, et $f(c)$ est défini.

De plus comme f est continue alors la suite $(f(v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(c)$.

Or $f(v_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la suite $(f(v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, et ainsi $f(c) = 0$.

On applique le théorème de Rolle sur chaque intervalle $[v_n, v_{n+1}]$, ou $[v_{n+1}, v_n]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme f est dérivable et $f(v_n) = f(v_{n+1})$ alors il existe w_n entre v_n et v_{n+1} tel que $f'(w_n) = 0$.

Par théorème d'encadrement, comme les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers c alors la suite (w_n) converge vers c .

Comme f' est continue alors la suite $(f'(w_n))$ converge vers $f'(c)$. Comme $f'(w_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors la suite $(f'(w_n))$ converge vers 0 et donc $f'(c) = 0$.

Il existe bien $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = f'(c) = 0$.