Corrigé du Devoir à la Maison n°10

Partie A.

1. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété :

$$P_n \text{ est de degré } 2n+1 \text{ et son coefficient dominant est } (-4)^n.$$

On démontre par récurrence double que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Comme $P_0 = X$ et $P_1 = -4X^3 + 3X$ alors les propriétés $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies.

Hérédité. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ les propriétés $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ sont vraies.

Le polynôme P_{n+2} est défini par :

$$P_{n+2} = 2(1-2X^2)P_{n+1} - P_n = -4X^2P_{n+1} + 2P_{n+1} - P_n$$

Par hypothèse de récurrence P_{n+1} est de degré $2n+3$ et P_n est de degré $2n+1$, donc :

$$\deg\left(-4X^2P_{n+1}\right) = 2n+5 \qquad \deg\left(2P_{n+1}\right) = 2n+3 \qquad \deg\left(-P_n\right) = 2n+1$$

Le premier de ces degrés est strictement supérieur aux deux autres, donc par propriété :

$$\deg\left(-4X^2P_{n+1} + 2P_{n+1} - P_n\right) = \deg\left(-4X^2P_{n+1}\right) = 2n+5$$

Ainsi P_{n+2} est de degré $2n+5$.

De plus, le coefficient dominant de P_{n+1} est de $(-4)^{n+1}$ par hypothèse de récurrence, donc celui de $-4P_{n+1}$ est $(-4)^{n+2}$. Les polynômes $2P_{n+1}$ et $-P_n$ sont de degrés strictement inférieurs à $2n+5$, donc le coefficient dominant de P_{n+2} est $(-4)^{n+2}$.

La propriété $\mathcal{P}_{n+2}$ est donc vraie.

Nous avons démontré que la propriété $\mathcal{P}_n$ est héréditaire.

Conclusion. Par récurrence double la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathcal{P}_n$ la propriété :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad P_n(\sin t) = \sin\left((2n+1)t\right)$$

On démontre par récurrence double que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Comme $P_0 = X$ alors $P_0(\sin t) = \sin t$. Or $\sin((2n+1)t) = \sin t$ pour $n = 0$, donc la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.

D'après les formules de trigonométrie, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\sin 3t &= \sin(2t+t) = \sin(2t)\cos t + \sin t \cos(2t)\\ &= 2\sin t\cos^2 t + \sin t\left(1 - 2\sin^2 t\right)\\ &= 2\sin t - 2\sin^3 t + \sin t - 2\sin^3 t = 3\sin t - 4\sin^3 t\end{aligned}$$

Comme $P_1 = 3X - 4X^3$ alors $P_1(\sin t) = \sin(3t)$, donc la propriété $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ les propriétés $\mathcal{P}_{n-1}$ et $\mathcal{P}_n$ sont vraies, *i.e.*, $P_{n-1}(\sin t) = \sin\left((2n-1)t\right)$ et $P_n(\sin t) = \sin\left((2n+1)t\right)$.
Par définition de la suite (P_n) :

$$P_{n+1} = 2(1-2X^2)P_n - P_{n-1}$$

Ceci donne :

$$\begin{aligned} P_{n+1}(\sin t) &= 2\Big(1-2\sin^2 t\Big)\sin\left((2n+1)t\right) - \sin\left((2n-1)t\right) \\ &= 2\cos(2t)\sin\left((2n+1)t\right) - \sin\left((2n-1)t\right) \\ &= \sin\left((2n+3)t\right) + \sin\left((2n-1)t\right) - \sin\left((2n-1)t\right) = \sin\left((2n+3)t\right) \end{aligned}$$

On a utilisé la formule :

$$\cos a \sin b = \tfrac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

Ainsi $P_{n+1}(\sin t) = \sin\left((2n+3)t\right)$, donc la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
L'hérédité est établie.
Conclusion. Par récurrence double on a démontré que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall t \in \mathbb{R} \qquad P_n(\sin t) = \sin\left((2n+1)t\right) \tag{1}$$

(b) Pour $t = 0$ et $n \in \mathbb{N}$ quelconque la relation ci-dessus donne $P_n(0) = 0$, donc 0 est racine de P_n.
Ceci implique que X divise P_n.
Il existe donc $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_n = XQ_n$.

3. (a) Les fonctions polynomiales et la fonction sinus sont dérivables, donc par composition les fonctions $t \mapsto P_n(\sin t)$ et $t \mapsto \sin\left((2n+1)t\right)$ sont dérivables. La relation du (1) donne par dérivation :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \cos t\, P_n'(\sin t) = (2n+1)\cos\left((2n+1)t\right)$$

Pour $t = 0$ on obtient $P_n'(0) = (2n+1)$.

(b) On dérive de nouveau la relation précédente :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad -\sin t\, P_n'(\sin t) + \cos^2 t\, P_n''(\sin t) = -(2n+1)^2 \sin\left((2n+1)t\right)$$

On peut écrire ceci sous la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad (1-\sin^2 t)P_n''(\sin t) - \sin t\, P_n'(\sin t) + (2n+1)^2 P_n(\sin t) = 0$$

La fonction $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$ est surjective donc :

$$\forall x \in [-1,1] \qquad (1-x^2)P_n''(x) - xP_n'(x) + (2n+1)^2 P_n(x) = 0$$

Le polynôme nul est le seul polynôme admettant une infinité de racines, donc :

$$(1-X^2)P_n'' - XP_n' + (2n+1)^2 P_n = 0 \tag{2}$$

(c) On rappelle que $P_n(0) = 0$ et $P_n'(0) = (2n+1)$.

La relation (2) donne par spécialisation en 0 : $P_n''(0) = 0$

Puis par dérivation :

$$(1-X^2)P_n^{(3)}(0) - 3XP_n'' + 4n(n+1)P_n' = 0$$

La spécialisation en 0 donne : $P_n^{(3)}(0) = -4n(n+1)(2n+1)$

Comme $P_n = XQ_n$ alors :

$$P_n' = Q_n + XQ_n' \qquad P_n'' = 2Q_n' + XQ_n'' \qquad P_n^{(3)} = 3Q_n'' + XQ_n^{(3)}$$

Les spécialisations en 0 donnent :

$$Q_n(0) = P_n'(0) = (2n+1) \qquad Q_n'(0) = \tfrac{1}{2}P_n''(0) = 0$$
$$Q_n''(0) = \tfrac{1}{3}P_n^{(3)}(0) = -\tfrac{4}{3}n(n+1)(2n+1)$$

4. (a) D'après la question 3a :

$$P_n(\sin t) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sin((2n+1)t) = 0$$

Donc :

$$P_n(\sin t) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (2n+1)t = k\pi \qquad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $P_n(\sin t) = 0$ est donc :

$$\mathcal{S}_n = \left\{ \frac{k\pi}{2n+1} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

(b) Soit x une racine de P_n appartenant à l'intervalle $[-1,1]$.

La fonction $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$ est surjective, donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = \sin t$. Comme $P_n(x) = 0$ alors $P_n(\sin t) = 0$, et d'après la question précédente il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $t = \frac{k\pi}{2n+1}$.

Les racines de P_n appartenant à l'intervalle $[-1,1]$ sont donc les $\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ où k est un entier.

(c) Soit k un entier. Si $k \in \{-n, \ldots, 0, \ldots n\}$ alors $-n \leqslant k \leqslant n$ donc :

$$-\frac{n\pi}{2n+1} \leqslant \frac{k\pi}{2n+1} \leqslant \frac{n\pi}{2n+1} \qquad \text{puis} \qquad -\frac{\pi}{2} < \frac{k\pi}{2n+1} < \frac{\pi}{2}$$

La fonction sinus est injective sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Comme les entiers k compris entre $-n$ et n sont distincts alors les réels $\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ sont distincts.

Or ils sont au nombre de $2n+1$, et le polynôme P_n est de degré $2n+1$, donc il ne peut avoir plus de $2n+1$ racines. Ainsi les $\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ sont toutes les racines de P_n.

L'ensemble des racines de P_n est finalement $\left\{\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \;\middle|\; -n \leqslant k \leqslant n\right\}$.

(d) Connaissant toutes les racines de P_n et son coefficient directeur on peut écrire sa forme factorisée :

$$P_n = (-4)^n \prod_{k=-n}^{n} \left(X - \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right).$$

Partie B.

1. (a) Les éléments de l'ensemble $\mathcal{D}$ sont différents de tous les α_i donc :

$$\forall x \in \mathcal{D} \qquad |f(x)| > 0.$$

Ceci montre que la fonction $g : x \mapsto \ln|f(x)|$ est bien définie sur $\mathcal{D}$.

La fonction f est polynomiale donc dérivable. Elle ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$ donc la fonction $|f|$ est dérivable par composition, puis g est dérivable.

Si u est une fonction dérivable ne s'annulant alors la dérivée de $\ln|u|$ est $\frac{u'}{u}$.

On obtient donc pour tout $x \in \mathcal{D}$: $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

De plus, comme $f(x) = \lambda(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$ alors :

$$g(x) = \ln\left(|\lambda|\prod_{i=1}^{n}|x-\alpha_i|\right) = \ln|\lambda| + \sum_{i=1}^{n}\ln|x-\alpha_i|.$$

Par dérivation :

$$\forall x \in \mathcal{D} \qquad \frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-\alpha_i}.$$

(b) On applique le résultat précédent à la fonction $f(x) = Q_n(x)$.

Comme $P_n = XQ_n$ alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad Q_n(x) = (-4)^n \prod_{\substack{k=-n \\ k\neq 0}}^{k=n}\left(x - \sin\left(\tfrac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$$

Comme $\sin\left(\frac{-k\pi}{2n+1}\right) = -\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad Q_n(x) = (-4)^n\prod_{k=1}^{n}\left(x - \sin\left(\tfrac{k\pi}{2n+1}\right)\right)\left(x + \sin\left(\tfrac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$$

On note $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\pm\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \;\middle|\; k = 1\ldots,n\right\}$. D'après le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathcal{D} \qquad \frac{Q_n'(x)}{Q_n(x)} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{x-\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} + \frac{1}{x+\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{2x}{x^2-\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}.\end{aligned}$$

Il s'agit bien du résultat attendu.

(c) Les fonctions ci-dessus sont dérivables et par dérivation :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathcal{D} \qquad \frac{Q_n''(x)Q_n(x) - {Q_n'}^2(x)}{Q_n^2(x)} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{2\left(x^2-\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right) - 4x^2}{\left(x^2-\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^2}\\ &= \sum_{k=1}^{n} -\frac{2\left(x^2+\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)}{\left(x^2-\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^2}\end{aligned}$$

On sait que $Q_n'(0) = 0$. Pour $x = 0$, en divisant par -2 la relation ci-dessus donne l'égalité souhaitée :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = -\frac{Q_n''(0)}{2Q_n(0)}$$

2. (a) La fonction f est supposée dérivable sur l'intervalle $[0, x]$ donc :
   - f est continue sur $[0, x]$,
   - f est dérivable sur $]0, x[$,
   - Pour tout $t \in]0, x[$: $\quad 0 \leqslant f'(t) \leqslant x^k$.

   D'après l'inégalité des accroissements finis :

$$0(x-0) \leqslant f(x) - f(0) \leqslant x^k(x-0).$$

   Ceci donne bien le résultat attendu : $\quad 0 \leqslant f(x) - f(0) \leqslant x^{k+1}$.

   (b) La fonction $h : x \mapsto \sin x - x + \frac{x^3}{6}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, ses premières dérivées sont :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad h'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \qquad h''(x) = -\sin x + x$$
$$h'''(x) = -\cos x + 1 \qquad h^{(4)}(x) = \sin x.$$

   On sait que : $\quad \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad 0 \leqslant \sin t \leqslant t$.

   Ceci donne, pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ fixé : $\quad \forall t \in [0, x] \quad 0 \leqslant h^{(4)}(t) \leqslant t \leqslant x$.

   La fonction h''' est dérivable, donc en appliquant le résultat de la question précédente :

$$0 \leqslant h'''(x) - h'''(0) \leqslant x^2.$$

   Comme $h'''(0) = 0$ alors : $\quad 0 \leqslant h'''(x) \leqslant x^2$.

   Ce résultat est valable pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

   On reproduit ceci pour h'' puis h' et enfin h, comme $h''(0) = h'(0) = h(0) = 0$ alors on obtient successivement :

$$0 \leqslant h''(x) \leqslant x^3 \qquad 0 \leqslant h'(x) \leqslant x^4 \qquad 0 \leqslant h(x) \leqslant x^5.$$

   Ceci montre que :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad 0 \leqslant \frac{h(x)}{x^3} \leqslant x^2.$$

   Par théorème d'encadrement $\quad \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{h(x)}{x^3} = 0 \quad$ et donc : $\quad h(x) = o(x^3)$.

3. Pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ on peut écrire $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + h(x)$, où h est la fonction définie dans la question précédente.
On en déduit, pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \frac{(x - \sin x)(x + \sin x)}{x^2 \sin^2 x} \\
&= \frac{\left(\frac{x^3}{6} - h(x)\right)\left(2x - \frac{x^3}{6} + h(x)\right)}{x^2\left(x - \frac{x^3}{6} + h(x)\right)^2} \\
&= \frac{\frac{x^3}{6}\left(1 - \frac{6}{x^3}h(x)\right) \times 2x\left(1 - \frac{x^2}{12} + \frac{1}{2x}h(x)\right)}{x^4\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{x}h(x)\right)^2} = \frac{1}{3}\,\frac{\left(1 - 6\frac{h(x)}{x^3}\right)\left(1 - \frac{x^2}{12} + \frac{x^2}{2}\frac{h(x)}{x^3}\right)}{\left(1 - \frac{x^2}{6} + x^2\frac{h(x)}{x^3}\right)^2}
\end{aligned}$$

Comme $\frac{h(x)}{x^3} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ alors $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x) = \frac{1}{3}$.
Cette limite est finie donc φ est prolongeable par continuité en 0.
La fonction ainsi prolongée est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Une fonction continue sur un segment est bornée, donc φ est bornée sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
A fortiori la fonction φ est bornée sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

4. On note M la borne supérieure de la fonction $|\varphi|$, bien définie en vertu de la question précédente.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k = 1, \ldots, n$, comme $\frac{k\pi}{2n+1} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ alors :

$$\left|\varphi\left(\tfrac{k\pi}{2n+1}\right)\right| \leqslant M.$$

Par inégalité triangulaire :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\tfrac{k\pi}{2n+1}\right)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left|\varphi\left(\tfrac{k\pi}{2n+1}\right)\right| \leqslant nM. \tag{3}$$

Or on calcule :

$$\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\tfrac{k\pi}{2n+1}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} - \frac{(2n+1)^2}{(k\pi)^2}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} - \frac{(2n+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}.$$

D'après la question 1c de cette partie :

$$\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\tfrac{k\pi}{2n+1}\right) = -\frac{Q_n''(0)}{2Q_n(0)} - \frac{(2n+1)^2}{\pi^2}S_n.$$

On a calculé $Q_n''(0) = -\frac{4}{3}n(n+1)(2n+1)$ et $Q_n(0) = (2n+1)$, donc l'inégalité (3) donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \left|\frac{2}{3}n(n+1) - \frac{(2n+1)^2}{\pi^2}S_n\right| \leqslant nM$$

En divisant par $n(n+1)$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \left| \frac{2}{3} - \frac{(2n+1)^2}{n(n+1)\pi^2} S_n \right| \leqslant \frac{M}{n+1}$$

Par théorème d'encadrement :
Comme $\left(\frac{M}{n+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $\left(\frac{(2n+1)^2}{n(n+1)\pi^2} S_n\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{3}$.
On en déduit :

$$S_n \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{2}{3} \frac{n(n+1)\pi^2}{(2n+1)^2} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{\pi^2}{6}$$

Ainsi la suite (S_n) converge vers $\frac{\pi^2}{6}$:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$