

**Programme de colles**  
**Semaine 21**  
**du 16 au 20 mars 2026**

**Questions de cours**

Sauf mention explicite il faut connaître l'énoncé et la démonstration.

1. Lemme des trois pentes.
2. Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe. Alors  $f$  est dérivable à droite et à gauche en tout point intérieur à  $I$ , et  $f'_g(a) \leq f'_d(a)$ .
3. Les applications linéaires de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  sont de la forme  $(x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy)$  où  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ .
4. Si  $f : E \rightarrow F$  est un isomorphisme alors  $f^{-1}$  est linéaire.
5. Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $E_1$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Alors  $f(E_1)$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .

**Exercices**

**Chapitre B8. Espaces vectoriels**

- I. Espaces vectoriels
- II. Sous-espaces vectoriels
- III. Familles de vecteurs

**Programme prévisionnel de la semaine suivante**

Chapitre B8 (espaces vectoriels).

## Chapitre B8. Espaces vectoriels

### I. Espaces vectoriels

Définition, premières propriétés ( $\lambda u = 0$  si et seulement si  $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$  ou  $u = 0_E$ ). Exemples de référence :  $\mathbb{K}^n$ ,  $\mathbb{K}[X]$ ,  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , fonctions, suites. Produit cartésien de  $n$  espaces vectoriels.

### II. Sous-espaces vectoriels

Définition, caractérisation. Un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel. Définition d'une combinaison linéaire.

Exemples : sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$ . Espaces vectoriels  $\mathbb{R}_n[X]$ ,  $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ , etc.

Intersection, sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs.

Somme de deux sous-espaces vectoriels, somme directe, supplémentaires.

### III. Familles de vecteurs

Familles génératrices, libres, liées. Une famille de polynômes non-nuls de degrés échelonnés est libre. Base, coordonnées, bases canoniques. Définition de la dimension, sans démonstration, sans théorèmes.

Extension aux familles infinies. Combinaison linéaire des éléments d'une partie de  $E$ , partie génératrice. Suites presque nulles, supports d'une suite. Parties de  $E$  libres, liées. Base infinie.