# Devoir à la Maison n°11

On considère la fonction $F : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \end{array}$

1. (a) Justifier que $F$ est bien définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$.
   Donner sa dérivée et ses variations.
   (b) Calculer le développement limité de $F$ à l'ordre 3 au voisinage de $x = 1$.
2. (a) Soit $\varphi$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\arctan x}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$
   Démontrer que $\varphi$ continue sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Démontrer que : $\forall x > 0 \quad F(x) = \arctan x \ln x - \displaystyle\int_1^x \varphi(t)\,dt.$
   (c) En déduire que $F$ est prolongeable par continuité en 0.
   On note $\widetilde{F}$ le prolongement par continuité de $F$ à $\mathbb{R}_+$.
   On note $K = \widetilde{F}(0)$, ce réel est appelé *constante de Catalan*.
   (d) La fonction $\widetilde{F}$ est-elle dérivable à droite en 0 ?
3. (a) Démontrer que : $\forall x > 0 \quad F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$
   (b) Que peut-on dire de $F$ au voisinage de $+\infty$ ?
   (c) Donner un développement asymptotique à deux termes de $F$ en $+\infty$.
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de $F$, en admettant que $K \simeq 0{,}9$.
   Faire figurer aussi la parabole d'équation $y = \frac{1}{4}(x-1)^2$.

On cherche maintenant à calculer $K$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $\quad u_n = \dfrac{\pi}{8n} + \dfrac{1}{2n} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\arctan \frac{k}{n}}{k}.$
   Justifier en utilisant un résultat du cours que la suite $(u_n)$ converge vers $K$ et que $u_n - K \underset{(+\infty)}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
6. La méthode suivante est de complexité en temps similaire mais n'utilise pas la fonction arc-tangente ni la valeur de $\pi$.
   (a) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $x > 0$. Calculer $I_k(x) = \displaystyle\int_1^x t^k \ln t\,\mathrm{d}t.$
   (b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t > 0 \quad \dfrac{1}{1+t^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \left]0, 1\right[$ fixés. Donner une majoration de la forme :
   $$\left| F(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_{2k}(x) \right| \leqslant I_m(x)$$
   où l'entier $m$ est à expliciter.

(d) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $\quad v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$

Démontrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |K - v_n| \leqslant \frac{1}{(2n+3)^2}$

(e) Écrire un programme en Python calculant la valeur de $K$ à $10^{-10}$ près.
Donner cette valeur.