Lycée Bellevue – Toulouse **pour le 17 mars 2025**
MPSI – Mathématiques

Devoir à la Maison n°11

Exercices 19, 31, 35, 38 de la feuille de T. D. A9.

$\boxed{\mathbf{19}}$ On fixe un entier m et on note :

$$I_m = \left]m\pi - \frac{\pi}{2}, m\pi + \frac{\pi}{2}\right[.$$

a. Démontrer qu'il existe un unique $\alpha_m \in I_m$ tel que : $\tan \alpha_m = \alpha_m$
b. Déterminer α_0, puis α_{-m} en fonction de α_m.
On suppose dorénavant que m est strictement positif et on pose : $h_m(x) = m\pi + \arctan x$
c. Démontrer que I_m est stable par h_m, et que h_m admet α_m pour unique point fixe.
d. Démontrer que h_m est *contractante* sur I_m, *i.e.,* k-lipschitzienne avec $|k| < 1$.
e. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = m\pi$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = h_m(u_n)$
Démontrer que (u_n) converge vers α_m.

$\boxed{\mathbf{31}}$ Soit $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $f(a) = f(b) = 0$.
a. Justifier que $|f''|$ admet une borne supérieure M.
b. Démontrer que :

$$\forall x \in [a, b] \qquad |f(x)| \leqslant \frac{M}{2}(x - a)(b - x).$$

On étudiera $f \pm g$ où $g(x) = \frac{M}{2}(x - a)(b - x)$.

$\boxed{\mathbf{35}}$ Soit I un intervalle, a un point de I, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.
a. Démontrer que pour tout $x \in I$ il existe un réel c compris entre a et x tel que :

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(c).$$

On souhaite généraliser ce résultat à l'ordre 2.
b. Démontrer que pour tout $x \in I$ il existe un réel A tel que :

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2}A.$$

c. En utilisant la fonction $\varphi_x : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi_x(t) = f(x) - f(t) - (x - t)f'(t) - \frac{(x - t)^2}{2}A$$

démontrer qu'il existe un réel c strictement compris entre a et x tel que :

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2}f''(c).$$

$\boxed{\mathbf{38}}$ Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
On suppose que f s'annule en un nombre infini de points.
Démontrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = f'(c) = 0$.