Lycée Bellevue – Toulouse **21 mars 2025**
MPSI – Mathématiques

Devoir Surveillé n°6

Durée : 3 heures – Calculatrices non autorisées

- *Une grande attention à la présentation, l'orthographe, la qualité de la rédaction est portée.*
- *En général les symboles mathématiques figurer dans une phrase ne doivent pas.*
- *Les objets introduits présentés correctement doivent être.*
- *Les références au cours, de même que les questions précédentes si elles sont utilisées, citées doivent être.*
- *Inutile de recopier l'énoncé il est.*
- *Numérotées les copies doivent être, indiqué leur nombre total.*
- *Non prises en compte les annotations au crayon seront.*
- *Indicatif le barème est.*
- *Si un élève est amené à repérer ce qui une erreur d'énoncé lui semble être, sur sa copie il le signalera et poursuivre sa composition il devra en expliquant les raisons des initiatives qu'à prendre il a été amené.*

Problème 1. *(18 points)*

Partie A. Exemples *(10 points)*

1. Question de cours : démontrer que la fonction cosinus n'admet pas de limite en $+\infty$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on pose $f(x) = \cos\sqrt{x}$.
   (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et donner sa dérivée.
   (b) Les fonctions f et f' admettent-elles une limite en $+\infty$?
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on pose $g(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$.
   (a) Démontrer que g admet un prolongement par continuité en 0.
   On notera encore g la fonction ainsi prolongée.
   (b) Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et donner sa dérivée.
   (c) Les fonctions g et g' admettent-elles une limite en $+\infty$?

Partie B. Limite de la dérivée en $+\infty$ *(8 points)*

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

1. La proposition suivante est-elle vraie ?
   Si f admet une limite finie en $+\infty$ alors f' admet 0 pour limite en $+\infty$.
   Et sa réciproque ?

2. On suppose que f' admet une limite $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ en $+\infty$.
   (a) Démontrer qu'il existe un réel positif A tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad x \geqslant A \quad \Longrightarrow \quad f'(x) \geqslant \frac{\ell}{2}.$$
   (b) En déduire un minorant de $f(x) - f(A)$.
   Que peut-on en déduire au sujet de la limite de f en $+\infty$?
3. On suppose que f' admet 0 pour limite en $+\infty$.
   (a) Soit $\varepsilon > 0$. Justifier l'existence d'un réel positif A tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:
$$x \geqslant A \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(A)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}|x - A|$$
   puis d'un réel B tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:
$$x \geqslant B \quad \Longrightarrow \quad \frac{|f(A)|}{x} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$
   (b) En déduire que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ admet 0 pour limite en $+\infty$.
4. Plus généralement, démontrer que si f' admet un réel ℓ pour limite en $+\infty$ alors la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ admet ℓ pour limite en $+\infty$.
   On pourra définir une fonction annexe.
5. La réciproque de cette dernière propriété est-elle vraie ?

Problème 2. *(15 points)*

Le but de ce problème est de déterminer tous les couples $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ satisfaisant l'équation :
$$P^2 + (1 - X^2)Q^2 = 1 \qquad (\star)$$

1. Déterminer les solutions de $(\star)$ avec P constant.

Dans les questions 2, 3, 4 on suppose que (P, Q) est une solution de $(\star)$ avec P non constant. On note n son degré (et donc $n \geqslant 1$). On suppose aussi que les coefficients dominants de P et Q, notés respectivement a et b, sont strictement positifs.

2. Déterminer le degré de Q et démontrer que $a = b$.
3. (a) Démontrer que Q divise PP', puis que Q divise P'.
   (b) Démontrer que $P' = nQ$.
   (c) Démontrer que $(1 - X^2)P'' - XP' + n^2P = 0$.
4. On pose $f(t) = P(\cos t)$.
   (a) Calculer f'' puis démontrer que f est de la forme $t \mapsto \lambda\cos(nt) + \mu\sin(nt)$ où λ et μ sont deux constantes.
   (b) Démontrer que $\lambda \in \{-1, 1\}$ et $\mu = 0$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Démontrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$:
   $$\cos(nt) = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} (-1)^k \cos^{n-2k}(t) \sin^{2k}(t).$$
   (b) En déduire qu'il existe $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\quad T_n(\cos t) = \cos(nt)$.
   (c) Justifier l'unicité de ce polynôme.
6. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ le couple $\left(T_n, \frac{1}{n} T'_n\right)$ est solution de $(\star)$.
   (b) Donner toutes les solutions de $(\star)$.

Problème 3. *(12 points)*

Partie A. *(3 points)*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes et $\lambda \in \mathbb{R}_+$
   Démontrer que les fonctions $f + g$ et λf sont convexes.
2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe dérivable.
   On suppose qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f'(c) = 0$.
   Démontrer que $f(c)$ est un minimum global de f.

Partie B. *(9 points)*

Soit $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes dérivables telles que :
$$\forall x \in [0, 1] \qquad \operatorname{Max}\{f(x), g(x)\} > 0.$$

Le but de ce problème est de démontrer qu'il existe une *moyenne pondérée* de f et de g strictement positive, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que :
$$\forall x \in [0, 1] \qquad (1 - \lambda) f(x) + \lambda g(x) > 0.$$

1. Démontrer le résultat dans le cas où f est strictement positive et dans celui où g est strictement positive.

On suppose dorénavant que ni f ni g n'est strictement positive, *i.e.*, qu'il existe $(a, b) \in [0, 1]^2$ tels que $f(a) \leqslant 0$ et $g(b) \leqslant 0$.
Quitte à inverser f et g on suppose $a \leqslant b$.

2. (a) Justifier que $a < b$, $g(a) > 0$ et $f(b) > 0$.
   (b) Représenter la situation sur un schéma.
3. (a) Démontrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = g(c)$.
   (b) Démontrer qu'il existe $d \in]a, c[$ et $e \in]c, b[$ tels que $f'(d) > 0$ et $g'(e) < 0$.
   (c) En déduire le signe de $f'(c)$ et celui de $g'(c)$.
4. (a) Démontrer qu'il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que $(1 - \lambda) f'(c) + \lambda g'(c) = 0$.
   (b) Conclure.