

Devoir Surveillé n°6

Durée : 3 heures – Calculatrices non autorisées.

- On rappelle qu'une grande attention est portée à la présentation, l'orthographe, la qualité de la rédaction.
- En général les symboles mathématiques ne doivent pas figurer dans une phrase.
- Les objets introduits doivent être présentés correctement.
- Les références au cours doivent être citées, de même que les questions précédentes si elles sont utilisées.
- Il est inutile de recopier l'énoncé.
- Les copies doivent être numérotées, leur nombre total indiqué.
- Les annotations au crayon ne sont pas prises en compte.
- Le barème est indicatif.
- Si un élève est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème d'algèbre linéaire

(12 points)

Partie A.

(8 points)

Dans $E = \mathbb{R}^3$ on définit les vecteurs

$$u_1 = (1, 1, 2) \quad u_2 = (1, 2, 1) \quad u_3 = (2, 1, 1).$$

On pose $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$ et $G = \text{Vect}(u_3)$.

1. Justifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E

Donner une base et la dimension de chacun d'entre eux.

2. Démontrer que F est le plan d'équation $3x - y - z = 0$.

3. En déduire que $F \cap G = \{0_E\}$.

4. Soit $u = (x, y, z) \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v = u - \lambda u_3$.

Donner les coordonnées de v et en déduire que pour une certaine valeur de λ : $v \in F$.

5. Démontrer que $E = F \oplus G$.

6. Donner la décomposition des vecteurs de la base canonique de E dans cette somme directe.

Partie B.

(4 points)

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , E un espace vectoriel sur \mathbb{K} , F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E : $E = F \oplus G$.

On suppose que F admet une base $\mathcal{B}_1 = (u_1, \dots, u_p)$ et G admet une base $\mathcal{B}_2 = (v_1, \dots, v_q)$, où (p, q) sont deux entiers naturels positifs.

1. Démontrer que la famille $(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q)$ est génératrice de E .
2. Démontrer que la famille $(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q)$ est libre.
3. Déterminer la dimension de E .

Problème d'analyse : Suites récurrentes

(28 points)

Dans tout ce problème on note I un intervalle de \mathbb{R} contenant 0, et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 .

On suppose que I est stable par f : $\forall x \in I \quad f(x) \in I$.

On suppose que 0 est un point fixe de f , *i.e.*, que $f(0) = 0$.

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par une certaine valeur $u_0 \in I$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Comme I est stable par f alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et incluse dans I .

Dans ce problème on étudie la convergence de la suite (u_n) vers 0 en fonction de la valeur de $f'(0)$.

Partie A. Deux résultats utiles

(4 points)

Soit a, b deux points de I avec $a < b$.

1. Donner l'énoncé de l'inégalité des accroissements finis, ainsi que sa démonstration à partir du théorème des accroissements finis.
2. Dans cette question on suppose que f est deux fois dérivable.

Pour un certain réel D on définit la fonction :

$$g : I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) - f(b) + (b - x)f'(x) + \frac{(b-x)^2}{2}D$$

- (a) Vérifier qu'il existe un réel D tel que $g(a) = 0$. On fixe ce réel pour la suite.
- (b) Démontrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{(b - a)^2}{2}f''(c)$$

Ce résultat est l'égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2.

Partie B. Point attractif

(6 points)

Dans cette partie on suppose que $|f'(0)| < 1$.

On pose $r = \frac{1+|f'(0)|}{2}$.

1. Justifier qu'il existe un voisinage $V = [-\eta, \eta]$ de 0 tel que :

$$\forall x \in V \cap I \quad |f'(x)| \leq r$$

2. On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \in V$.

Démontrer que pour tout entier $n \geq N$: $u_n \in V$ et $|u_{n+1}| \leq r|u_n|$

3. Donner, pour tout entier $n \geq N$, une majoration de $|u_n|$ en fonction de u_N , r et n .

4. En déduire que $u_n \underset{(+\infty)}{=} O(r^n)$ et que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Partie C. Point attractif : un équivalent de la suite

(10 points)

On garde les hypothèses et notations de la partie précédente.

Pour simplifier on suppose que $N = 0$, et donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \in V$.

On suppose de plus que :

- f est de classe \mathcal{C}^2 .
- $f'(0) \neq 0$, et on note $q = f'(0)$,
- la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire en 0.

On souhaite démontrer qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \underset{(+\infty)}{\sim} Cq^n$.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un réel c_n tel que : $u_{n+1} = qu_n + \frac{u_n^2}{2} f''(c_n)$.

2. Justifier qu'il existe une suite de réels $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = qu_n(1 + v_n) \quad \text{et} \quad v_n \underset{(+\infty)}{=} O(r^n).$$

3. Justifier que :

(a) $\ln|1 + v_n|$ est défini pour tout n ,

(b) $\ln|1 + v_n| \underset{(+\infty)}{\sim} v_n$

(c) Il existe un réel B tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|\ln|1 + v_n|| \leq Br^n$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note : $w_n = \ln|1 + v_n|$

Démontrer successivement les assertions suivantes :

(a) La suite $\left(\sum_{k=0}^{n-1} |w_k|\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée, et elle converge.

(b) La suite $\left(\sum_{k=0}^{n-1} (w_k + |w_k|)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est également majorée, et convergente.

(c) La suite $\left(\sum_{k=0}^{n-1} w_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

5. Démontrer que la suite $\left(\prod_{k=0}^{n-1} (1 + v_k)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite L non-nulle.

6. Conclure : démontrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \underset{(+\infty)}{\sim} Cq^n$.

Partie D. Point super-attractif*(6 points)*

Dans cette partie on suppose que :

- f est de classe \mathcal{C}^2 .
- $f'(0) = 0$.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un réel x_n tel que :

$$|x_n| \leq |u_n| \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n f'(x_n),$$

puis un réel y_n tel que :

$$|y_n| \leq |x_n| \quad \text{et} \quad f'(x_n) = x_n f''(y_n).$$

Conseil : Traiter d'abord le cas où $u_n > 0$.

2. En déduire qu'il existe un réel K_0 tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1}| \leq K_0 u_n^2.$$

3. Démontrer qu'il existe un entier N tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{N+n}| \leq \frac{1}{K_0 2^{2^n}}$$

4. Démontrer qu'il existe deux réels $K \in \mathbb{R}$ et $a \in]0, 1[$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \quad \implies \quad |u_n| \leq K a^{2^n}$$

On dit que la suite (u_n) converge à vitesse quadratique.

Partie E. Point répulsif*(2 points)*

Dans cette partie on suppose que $|f'(0)| > 1$.

On ne suppose plus que f est de classe \mathcal{C}^2 , juste qu'elle est de classe \mathcal{C}^1 .

On pose $r = \frac{1+|f'(0)|}{2}$.

1. Démontrer qu'il existe un voisinage V de 0 tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in V \quad \implies \quad |u_{n+1}| \geq r |u_n|$$

2. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 si et seulement si elle est stationnaire en 0.

Remarque.

Lorsque $|f'(0)| = 1$, la suite peut converger vers 0 ou diverger, comme le montrent les exemples des fonctions arctan et sh.