

Corrigé du Devoir Surveillé n°6

Problème d'algèbre linéaire

(12 points)

Partie A.

(8 points)

1. (2 points) Les vecteurs u_1, u_2, u_3 appartiennent à E donc par propriété les ensembles F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .

La famille (u_1, u_2) est génératrice de F par définition, elle est libre car ses vecteurs ne sont pas colinéaires, donc c'est une base de F .

Comme elle contient deux vecteurs alors F est de dimension 2.

La famille (u_3) est génératrice de G , elle est libre car u_3 est non-nul, donc c'est une base de G .

Comme elle contient un vecteur alors G est de dimension 1.

2. (2 points) Soit $H = \{(x, y, z) \in E \mid 3x - y - z = 0\}$.

On démontre par double inclusion que $F = H$.

Les vecteurs u_1 et u_2 appartiennent à H car ils satisfont son équation. Par exemple pour $u_1 = (1, 1, 2)$: $3 \times 1 - 1 \times 1 - 1 \times 2 = 0$.

L'ensemble H peut s'écrire :

$$H = \{(x, y, 3x - y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, 0, 3), (0, 1, -1))$$

C'est donc un sous-espace vectoriel de E . Ainsi il est stable par combinaisons linéaires. Comme il contient u_1 et u_2 alors il contient $\text{Vect}(u_1, u_2)$, ce qui donne $F \subseteq H$.

Réciproquement : on remarque que $2u_1 - u_2 = (1, 0, 3)$ et $u_2 - u_1 = (0, 1, -1)$, donc les vecteurs $(1, 0, 3)$ et $(0, 1, -1)$ appartiennent à F , lequel est un sous-espace vectoriel donc stable par combinaisons linéaires, et ainsi $H \subseteq F$.

Par double inclusion $F = H$.

3. (1 point) Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E alors $\{0_E\} \subseteq F \cap G$.

Soit $u \in F \cap G$. Comme $u \in G$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda u_3 = (2\lambda, \lambda, \lambda)$, et comme $u \in F$ alors il vérifie l'équation $3x - y - z$, ce qui donne $4\lambda = 0$.

Ainsi $\lambda = 0$, donc $u = 0_E$, et finalement $F \cap G \subseteq \{0_E\}$.

Par double inclusion $F \cap G = \{0_E\}$.

4. (1 point) On calcule $v = u - \lambda u_3 = (x - 2\lambda, y - \lambda, z - \lambda)$.

Le vecteur v appartient à F si et seulement s'il satisfait son équation, laquelle donne $3x - 6\lambda - y + \lambda - z + \lambda = 0$, donc $\lambda = \frac{1}{4}(3x - y - z)$.

Pour cette valeur de λ on a $u - \lambda u_3 \in F$.

5. (1 point) On a déjà démontré que $F \cap G = \{0_E\}$.

Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E alors $F + G \subseteq E$.

Soit u un vecteur de E . Soit λ le scalaire déterminé dans la question précédente. Alors $v = u - \lambda u_3 \in F$. Or $\lambda u_3 \in G$ car $G = \text{Vect}(u_3)$.

Ainsi $u = v + \lambda u_3$ avec $v \in F$ et $\lambda u_3 \in G$, donc $u \in F + G$.

Ceci montre que $E \subseteq F + G$, puis par double inclusion $E = F + G$.

Comme $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$ alors $E = F \oplus G$.

6. (1 point) D'après la question 4 la décomposition d'un vecteur u de E dans la somme directe $E = F \oplus G$ est $u = (u - \lambda u_3) + \lambda u_3$ avec $\lambda = \frac{1}{4}(3x - y - z)$. On obtient :

$$e_1 = -\frac{1}{4}(2, 3, 3) + \frac{3}{4}(2, 1, 1) \quad e_2 = \frac{1}{4}(2, 5, 1) - \frac{1}{4}(2, 1, 1) \quad e_3 = \frac{1}{4}(2, 1, 5) - \frac{1}{4}(2, 1, 1)$$

Partie B.

(4 points)

1. (1 point) La famille \mathcal{B}_1 est une base de F donc elle est génératrice de F , et ainsi $F = \text{Vect}(\mathcal{B}_1)$.

De même $G = \text{Vect}(\mathcal{B}_2)$.

Comme $E = F \oplus G$ alors $E = F + G$, et par propriété :

$$E = \text{Vect}(\mathcal{B}_1) + \text{Vect}(\mathcal{B}_2) = \text{Vect}(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q)$$

Ceci montre que la famille $(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q)$ est génératrice de E .

2. (2 points) Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q$ des scalaires tels que :

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_p u_p + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_q v_q = 0_E$$

Ceci donne :

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_p u_p = -(\beta_1 v_1 + \dots + \beta_q v_q)$$

Les vecteurs u_1, \dots, u_p appartiennent à F et les vecteurs v_1, \dots, v_q appartiennent à G . Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E alors ils sont stables par combinaisons linéaires, donc :

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_p u_p \in F \quad \text{et} \quad -(\beta_1 v_1 + \dots + \beta_q v_q) \in G$$

Ces deux vecteurs sont égaux, donc ils appartiennent à $F \cap G$, lequel est réduit à $\{0_E\}$ car F et G sont en somme directe. Donc :

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_p u_p = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_q v_q = 0_E$$

Les familles (u_1, \dots, u_p) et (v_1, \dots, v_q) sont des bases donc elles sont libres, ce qui montre que :

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0 \quad \text{et} \quad \beta_1 = \dots = \beta_q = 0.$$

On a démontré que :

$$\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q) \in \mathbb{R}^{p+q}$$

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_p u_p + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_q v_q = 0_E \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_p = \beta_1 = \dots = \beta_q = 0$$

Donc la famille $(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q)$ est libre.

3. (1 point) D'après les deux questions précédentes la famille $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de E . Comme elle contient $p + q$ vecteurs alors E est de dimension $p + q$.

Problème d'analyse : Suites récurrentes

(28 points)

Partie A. Deux résultats utiles

(4 points)

1. (1 point) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que :

- f est continue sur $[a, b]$.
- f est dérivable sur $]a, b[$.
- Il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $\forall t \in]a, b[\quad m \leq f'(t) \leq M$.

Alors :

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a). \quad (1)$$

En effet, les deux premières hypothèses montrent que l'on peut appliquer le théorème des accroissements finis, lequel implique qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Comme $c \in]a, b[$ alors la troisième hypothèse donne $m \leq f'(c) \leq M$, ce qui donne l'encadrement (1).

2. (a) (1 point) On pose :

$$D = \frac{2}{(b-a)^2} (f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)).$$

Ce réel est défini car f est dérivable et $a \neq b$, et s'il prend cette valeur alors $g(a) = 0$.

(b) (2 points) Comme f est deux fois dérivable alors f' est dérivable, donc par produit et combinaison linéaire la fonction g est dérivable. On calcule :

$$\forall x \in I \quad g'(x) = f'(x) - f'(x) + (b-x)f''(x) - (b-x)D = (b-x)(f''(x) - D).$$

De plus on constate que $g(b) = 0$, et par choix de D on a $g(a) = 0$. Ainsi :

- La fonction g est continue sur $[a, b]$.
- La fonction g est dérivable sur $]a, b[$.
- $g(a) = g(b)$.

Par théorème de Rolle il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.

Comme $c \in]a, b[$ alors $c \neq b$, donc l'égalité $g'(c) = 0$ donne $f''(c) = D$.

Comme $g(a) = 0$ et $D = f''(c)$ alors :

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(c)$$

On a donc démontré l'existence d'un réel $c \in]a, b[$ vérifiant cette égalité.

Partie B. Point attractif

(6 points)

1. (1 point) La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 donc elle est continue.

Elle est continue en 0 donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in I \quad |x - 0| \leq \eta \implies |f'(x) - f'(0)| \leq \varepsilon$$

Par inégalité triangulaire :

$$|f'(x)| - |f'(0)| \leq |f'(x) - f'(0)|$$

Posons $\varepsilon = \frac{1}{2}(1 - |f'(0)|)$. Alors ε est strictement positif, donc il existe un voisinage $V = [-\eta, \eta]$ de 0 tel que, pour tout $x \in V \cap I$:

$$|f'(x)| \leq |f'(0)| + \varepsilon = \frac{1}{2}(1 + |f'(0)|) = r$$

Ceci est le résultat attendu.

2. (2 points) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on définit la propriété $\mathcal{P}_n : u_n \in V$ et $|u_{n+1}| \leq r|u_n|$.
Démontrons par récurrence que cette propriété est vraie pour tout entier $n \geq N$.

Initialisation. Par hypothèse u_N et 0 appartiennent à $V \cap I$.

La fonction f est dérivable sur $V \cap I$ et $|f'|$ est majoré par r sur $V \cap I$, donc d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$|f(u_N) - f(0)| \leq r|u_N - 0|.$$

Comme $f(0) = 0$ on a bien $|u_{N+1}| \leq r|u_N|$.

Hérédité. Supposons que pour un entier $n > N$ la propriété \mathcal{P}_{n-1} est vraie.

Alors $u_{n-1} \in V \cap I$ et $|u_n| \leq r|u_{n-1}|$.

Ainsi $|u_{n-1}| \leq \eta$. Comme $|f'(0)| < 1$ alors $r < 1$, et donc $|u_n| \leq |u_{n-1}| \leq \eta$, ce qui montre que $u_n \in V$.

On peut donc appliquer l'inégalité des accroissements finis comme dans l'initialisation.

Elle montre que : $|u_{n+1}| \leq r|u_n|$.

La propriété \mathcal{P}_{n+1} est vraie. L'hérédité est établie.

Conclusion. Par récurrence la propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier $n \geq N$.

3. (1 point) Notons maintenant \mathcal{P}_n la propriété : $|u_n| \leq r^{n-N}|u_N|$.

Cette propriété est vraie pour $n = N$, si elle est vraie pour un certain $n \geq N$ alors d'après la question précédente elle est vraie pour $n + 1$, donc par récurrence elle est vraie pour tout $n \geq N$.

4. (2 points) On a montré que : $\forall n \geq N \quad |u_n| \leq r^n \frac{|u_N|}{r^N}$

Comme $0 \leq r < 1$ alors $r^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc par théorème d'encadrement $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

De plus : $\forall n \geq N \quad \left| \frac{u_n}{r^n} \right| \leq \frac{|u_N|}{r^N}$.

Ceci montre que la suite $\left(\frac{u_n}{r^n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, donc $u_n \underset{(+\infty)}{=} O(r^n)$.

Partie C. Point attractif : un équivalent de la suite*(10 points)*

1. (1,5 points) La fonction f est de classe \mathcal{C}^2 donc deux fois dérivable sur I .

On peut alors appliquer l'égalité de Taylor-Lagrange démontrée dans la première partie, avec $a = 0$ et $b = u_n$ où n est un entier quelconque.

Elle montre qu'il existe $c_n \in [0, u_n]$ ou $[u_n, 0]$ tel que :

$$f(u_n) = f(0) = f'(0)(u_n - 0) + \frac{(u_n - 0)^2}{2} f''(c_n)$$

Ceci donne exactement :

$$u_{n+1} = qu_n + \frac{u_n^2}{2} f''(c_n).$$

On peut ajouter que $|c_n| \leq |u_n|$.

2. (1,5 points) Comme q est supposé non-nul alors on peut poser $v_n = \frac{u_n}{2q} f''(c_n)$.

Alors $u_{n+1} = qu_n(1 + v_n)$.

D'après la partie précédente et la supposition $N = 0$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est incluse dans le segment $V = [-\eta, \eta]$.

Comme $|c_n| \leq |u_n|$ alors la suite (c_n) est incluse dans le segment V .

La fonction f'' est continue car f est de classe \mathcal{C}^2 , une fonction continue sur un segment est bornée, donc f'' est bornée sur V .

Notons M un réel tel que pour tout $x \in V$: $|f''(x)| \leq M$.

Alors la suite $(|f''(c_n)|)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par M et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |v_n| = |u_n| \frac{|f''(c_n)|}{2q} \leq \frac{M}{2q} |u_n|$$

Comme $u_n \underset{(+\infty)}{=} O(r^n)$ alors $v_n \underset{(+\infty)}{=} O(r^n)$.

3. (a) (1 point) S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $v_n = -1$ alors $u_{n+1} = 0$. Comme $f(0) = 0$ la suite (u_n) serait alors stationnaire en 0, ce qui est supposé faux.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n \neq -1$.

Ceci donne $1 + v_n \neq 0$, donc $|1 + v_n| > 0$, et ainsi $\ln |1 + v_n|$ est défini.

- (b) (1 point) Comme $v_n \underset{(+\infty)}{=} O(r^n)$ alors il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|v_n| \leq Ar^n.$$

Par théorème de comparaison : $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Ainsi à partir d'un certain rang : $|v_n| < 1$, et donc $1 + v_n > 0$, puis $\ln |1 + v_n| = \ln(1 + v_n)$.

Comme $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ alors par équivalences usuelles $\ln(1 + v_n) \sim v_n$, et donc $\ln |1 + v_n| \underset{(+\infty)}{\sim} v_n$.

- (c) (0,5 point) D'après la question précédente : $|\ln |1 + v_n|| \underset{(+\infty)}{\sim} |v_n|$.

Comme $v_n \underset{(+\infty)}{=} O(r^n)$ alors $|v_n| \underset{(+\infty)}{=} O(r^n)$, donc il existe un réel B tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|\ln |1 + v_n|| \leq Br^n$.

4. (a) (1 point) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente : $\forall k \in \mathbb{N} \quad |w_k| \leq Br^k$.

$$\text{Par somme : } \sum_{k=0}^{n-1} |w_k| \leq \sum_{k=0}^{n-1} Br^k.$$

Comme $0 < r < 1$ alors $r \neq 1$ et ceci donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n-1} |w_k| \leq B \frac{1-r^n}{1-r} \leq \frac{B}{1-r}.$$

La suite $\left(\sum_{k=0}^{n-1} |w_k|\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc majorée. Or elle est croissante car :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^n |w_k| - \sum_{k=0}^{n-1} |w_k| = |w_n| \geq 0$$

Par théorème de la limite monotone elle converge.

(b) (1 point) Remarquons que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$-|w_k| \leq w_k \leq |w_k| \quad \text{donc} \quad 0 \leq w_k + |w_k| \leq 2|w_k|$$

La suite $\left(\sum_{k=0}^{n-1} (w_k + |w_k|)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc majorée par $\frac{2B}{1-r}$, et croissante.

Elle est donc aussi convergente.

(c) (0,5 point) Par soustraction la suite $\left(\sum_{k=0}^{n-1} (w_k + |w_k|) - \sum_{k=0}^{n-1} |w_k|\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente,

donc la suite $\left(\sum_{k=0}^{n-1} w_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

5. (1 point) Notons $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} w_k$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\exp\left(\sum_{k=0}^{n-1} w_k\right) = \prod_{k=0}^{n-1} e^{\ln|1+v_k|} = \prod_{k=0}^{n-1} |1+v_k| = \left|\prod_{k=0}^{n-1} (1+v_k)\right|$$

Par composition la suite $\left(\left|\prod_{k=0}^{n-1} (1+v_k)\right|\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers e^ℓ , qui est un réel non-nul.

On a justifié qu'à partir d'un certain rang la suite $(1+v_n)$ est positive.

Soit p un tel rang, c'est-à-dire un entier p tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq p \implies 1+v_n > 0$

On en déduit que pour tout $n > p$:

$$\left|\prod_{k=0}^{n-1} (1+v_k)\right| = \left|\prod_{k=0}^{p-1} (1+v_k)\right| \times \prod_{k=p}^{n-1} (1+v_k)$$

Notons $P = \prod_{k=0}^{p-1} (1+v_k)$. Ce réel est non-nul et ne dépend pas de n . De plus :

$$\forall p > n \quad \prod_{k=0}^{n-1} (1+v_k) = \frac{P}{|P|} \times \left|\prod_{k=0}^{n-1} (1+v_k)\right|$$

La suite $\left(\prod_{k=0}^{n-1} (1+v_k)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc vers $L = \text{sgn}(P)e^\ell$, qui est un réel non-nul.

6. (1 point) La relation de la question 2 donne par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = q^n u_0 \prod_{k=0}^{n-1} (1 + v_k)$$

D'après la question précédente :

$$\frac{u_n}{q^n} = u_0 \prod_{k=0}^{n-1} (1 + v_k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u_0 L$$

Ainsi, en posant $C = u_0 L$ on obtient bien $u_n \underset{(+\infty)}{\sim} Cq^n$.

Partie D. Point super-attractif

(6 points)

1. (2 points) Soit $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que $u_n > 0$.

La fonction f est continue sur $[0, u_n]$ et dérivable sur $]0, u_n[$, donc d'après le théorème des accroissements finis :

$$\exists x_n \in]0, u_n[\quad \frac{f(u_n) - f(0)}{u_n - 0} = f'(x_n).$$

Ceci donne bien $u_{n+1} = u_n f'(x_n)$.

De plus, comme $0 < x_n < u_n$ alors $|x_n| \leq |u_n|$.

Si $x_n = 0$ alors en posant $y_n = 0$ on a $f'(x_n) = x_n f''(y_n)$ car $f'(0) = 0$, et $|y_n| \leq |x_n|$.

Sinon on applique le théorème des accroissements finis à la fonction f' .

Comme f est de classe \mathcal{C}^2 alors la fonction f' est continue sur $[0, x_n]$ et dérivable sur $]0, x_n[$, donc :

$$\exists y_n \in]0, x_n[\quad \frac{f'(x_n) - f'(0)}{x_n - 0} = f''(y_n).$$

Comme $f'(0) = 0$ alors ceci donne bien $f'(x_n) = x_n f''(y_n)$.

De plus, comme $0 < y_n < x_n$ alors $|y_n| \leq |x_n|$.

Si $u_n < 0$ on reproduit la démonstration sur l'intervalle $[u_n, 0]$, on obtient $x_n \in]u_n, 0[$ et $y_n \in]x_n, 0[$ (ou $y_n = 0$ si $x_n = 0$), donc $|y_n| \leq |x_n| \leq |u_n|$.

Enfin si $u_n = 0$, alors $u_{n+1} = 0$, donc le résultat est immédiat avec $x_n = y_n = 0$.

2. (1 point) Par transitivité :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1}| \leq |u_n| \times |x_n| \times |f''(y_n)| \leq u_n^2 |f''(y_n)|$$

D'après la partie B, comme $|f'(0)| < 1$ alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, donc elle est bornée. Elle est donc incluse dans un segment.

Comme $|y_n| \leq |u_n|$ alors la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi incluse dans ce segment

Comme la fonction f'' est continue alors elle est bornée sur ce segment, et donc la suite $(f''(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée par un certain réel K_0 .

Ainsi il existe un réel K_0 tel que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1}| \leq K_0 u_n^2$.

3. (1 point) Quitte à le remplacer par $K_0 + 1$ on peut supposer $K_0 > 0$.

Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 alors il existe un entier N tel que : $|u_N| \leq \frac{1}{2K_0}$.

Démontrons par récurrence que pour tout $n \geq 0$: $|u_{N+n}| \leq \frac{1}{K_0 2^{2^n}}$.

Initialisation. Par choix de N la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$: $|u_{N+n}| \leq \frac{1}{K_0 2^{2^n}}$.

Alors, en utilisant la question précédente :

$$|u_{N+n+1}| \leq K_0 u_{N+n}^2 \leq K_0 \left(\frac{1}{K_0 2^{2^n}} \right)^2 = \frac{1}{K_0 2^{2^{n+1}}}$$

Ceci démontre l'hérédité

Conclusion. Par récurrence la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. (1 point) Soit n un entier tel que $n \geq N$. Posons $m = n - N$. Alors $m \in \mathbb{N}$ et la question précédente donne :

$$|u_n| = |u_{N+m}| \leq \frac{1}{K_0 2^{2^m}} = \frac{1}{K_0 2^{2^{n-N}}}$$

On calcule :

$$\frac{1}{K_0 2^{2^{n-N}}} = \frac{1}{K_0 (2^{2-N})^{2^n}} = \frac{1}{K_0} \left(\frac{1}{2^{2-N}} \right)^{2^n}.$$

En posant $K = \frac{1}{K_0}$ et $a = \frac{1}{2^{2-N}}$ on a bien $a \in]0, 1[$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \quad \implies \quad |u_n| \leq K a^{2^n}$$

Partie E. Point répulsif

(2 points)

1. (1 point) La fonction f' est continue car f est de classe \mathcal{C}^1 .

Elle est donc continue en 0.

Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}(|f'(0)| - 1)$. Comme $|f'(0)| > 1$ alors $\varepsilon > 0$ et donc il existe un voisinage V de 0 tel que :

$$\forall x \in I \quad x \in V \quad \implies \quad |f'(x) - f'(0)| \leq \varepsilon$$

Par inégalité triangulaire :

$$|f'(0)| - |f'(x)| \leq |f'(x) - f'(0)| \leq \varepsilon.$$

Ceci donne :

$$|f'(x)| \geq |f'(0)| - \varepsilon = \frac{1 + |f'(0)|}{2} = r$$

Soit n un entier tel que $u_n \in V$.

D'après l'égalité des accroissements finis, comme f est dérivable sur V alors il existe c compris entre 0 et u_n tel que :

$$\frac{f(u_n) - f(0)}{u_n - 0} = f'(c) \quad \text{donc} \quad u_{n+1} = u_n f'(c)$$

Comme c est compris entre 0 et u_n et $u_n \in V$ alors $c \in V$ puis $|f'(c)| \geq r$, ce qui donne bien $|u_{n+1}| \geq r|u_n|$.

On a donc démontré qu'il existe un voisinage V de 0 tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in V \quad \implies \quad |u_{n+1}| \geq r|u_n|$$

2. (1 point) Si la suite (u_n) est stationnaire en 0 alors elle converge vers 0.

Réciproquement, démontrons que si la suite (u_n) converge vers 0 alors elle est stationnaire.

Supposons que la suite (u_n) converge vers 0. Comme V est un voisinage de 0 alors à partir d'un certain rang N tous les termes u_n sont dans V . Ainsi d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \implies u_n \in V \implies |u_{n+1}| \geq r|u_n|$$

Comme $|f'(0)| > 1$ et $r = \frac{1}{2}(1 + |f'(0)|)$ alors $r > 1$.

Ceci montre que la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante à partir du rang N .

Donc pour tout $n \geq N$ on a $|u_n| \geq |u_N|$.

Par théorème de comparaison, comme (u_n) converge vers 0 alors $0 \geq |u_N|$.

Ceci donne $u_N = 0$.

Comme $f(0) = 0$ alors pour tout $n \geq N$ on a $u_n = 0$, et ainsi la suite est stationnaire.

On a donc démontré que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 si et seulement si elle est stationnaire en 0.

Remarque.

Montrons que si $|f'(0)| = 1$ alors la suite peut converger vers 0 ou diverger.

Posons $f = \arctan$ et $g = \text{sh}$.

Ces deux fonctions sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , vérifient $f(0) = g(0) = 0$, $f'(0) = g'(0) = 1$.

On démontre par étude de fonctions qu'elles admettent 0 pour unique point fixe, et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+ : 0 \leq f(x) \leq x$ et $g(x) \geq x$.

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par $u_0 = v_0 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$ et $v_{n+1} = g(v_n)$.

Alors la suite (u_n) est décroissante minorée, donc elle converge. Comme 0 est l'unique point fixe de la fonction \arctan alors elle converge vers 0.

La suite (v_n) est croissante, minorée par $v_0 = 1$. Comme 0 est l'unique point fixe de sh alors elle ne peut converger, donc elle diverge vers $+\infty$.

Ces deux exemples montrent que si $|f'(0)| = 1$ alors la suite (u_n) peut converger vers 0 ou diverger.