Corrigé du Devoir Surveillé n°6

Problème 1. *(18 points)*

Partie A. Exemples *(10 points)*

1. *(1 point)* On raisonne par l'absurde en supposant que la fonction cosinus admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$.

   On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n = 2n\pi \quad$ et $\quad v_n = \pi + 2n\pi$.

   Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers $+\infty$ donc par composition de limites les suites $(\cos(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$, $(\cos(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} \cos(x)$.

   Mais pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad \cos(u_n) = 1 \quad \cos(v_n) = -1$.

   Par unicité de la limite on aurait $\ell = 1$ et $\ell = -1$, ce qui est impossible.

   Cette contradiction montre que la fonction cosinus n'admet pas de limite en $+\infty$.

2. (a) *(2 points)* La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc par composition la fonction $f : x \mapsto \cos\sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

   L'équivalence usuelle $\quad \cos u - 1 \underset{(0)}{\sim} -\frac{u^2}{2} \quad$ montre que :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\cos\sqrt{x} - 1}{x} \underset{(0)}{\sim} -\frac{1}{2}$$

   Ainsi f est dérivable en 0 de dérivée $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

   Finalement f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée $f' : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$

   (b) *(2 points)* Si la fonction f admettait une limite en $+\infty$ alors la fonction $x \mapsto f(x^2)$ admettrait la même limite en $+\infty$, par composition. Or $f(x^2) = \cos x$ pour $x \geqslant 0$ et on sait que la fonction cosinus n'admet pas de limite en $+\infty$.

   Donc la fonction f n'admet pas de limite en $+\infty$.

   Pour la limite de f' on remarque que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad |f'(x)| = \left|\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

   Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$, alors par théorème d'encadrement la fonction f' tend vers 0 en $+\infty$.

3. (a) *(1 point)* L'équivalence usuelle $\quad \sin u \underset{(0)}{\sim} u \quad$ montre que :

$$g(x) = \frac{\sin(x^2)}{x} \underset{(0)}{\sim} x$$

   On en déduit $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, donc g est prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$.

(b) *(2 points)* Par composition et quotient la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour la dérivabilité de g en 0 on écrit :

$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{\sin(x^2)}{x^2} \underset{(0)}{\sim} 1$$

Ceci montre que g est dérivable en 0 de dérivée $g'(0) = 1$.

Ainsi g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $g' : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} 2\cos(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(c) *(2 points)* Tout d'abord :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad |g(x)| = \left|\frac{\sin(x^2)}{x}\right| \leqslant \frac{1}{x}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, alors par théorème d'encadrement la fonction g tend vers 0 en $+\infty$.

Pour la fonction g' :

- Comme $\frac{\sin(x^2)}{x^2} = \frac{1}{x} \times g(x)$ alors par produit $\frac{\sin(x^2)}{x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
- Si g' admettait une limite en $+\infty$ alors par somme la fonction $x \mapsto 2\cos\left(x^2\right)$ admettrait une limite en $+\infty$, et par composition avec la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ la fonction $x \mapsto 2\cos(x)$ admettrait une limite en $+\infty$, ce qui est faux.

Ainsi la fonction g' n'admet pas de limite en $+\infty$.

Partie B. Limite de la dérivée en $+\infty$ *(8 points)*

1. *(1 point)* La proposition est fausse, comme le montre l'exemple de la fonction g : elle admet une limite finie en $+\infty$ mais sa dérivée ne tend pas vers 0 en $+\infty$.

   La réciproque est fausse aussi, comme le montre l'exemple de la fonction f ci-dessus : sa dérivée tend vers 0 en $+\infty$ mais elle n'a pas de limite en $+\infty$.

2. (a) *(1 point)* Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \ell$ alors par définition de la limite :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists A \in \mathbb{R} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad x \geqslant A \quad \Longrightarrow \quad |f'(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$. Comme $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ alors $\varepsilon > 0$ donc :

$$\begin{aligned} \exists A \in \mathbb{R} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad x \geqslant A \quad &\Longrightarrow \quad |f'(x) - \ell| \leqslant \tfrac{\ell}{2} \\ &\Longrightarrow \quad f'(x) \geqslant \ell - \tfrac{\ell}{2} = \tfrac{\ell}{2}. \end{aligned}$$

Si A est négatif alors on peut le remplacer par un réel positif quelconque, l'implication ci-dessus reste vraie.

(b) *(1 point)* Soit x strictement supérieur à A fixé. On applique l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[A,x]$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ donc :
- f est continue sur $[A,x]$,
- f est dérivable sur $]A,x[$,
- $\forall t \in]A,x[\qquad f'(t) \geqslant \frac{\ell}{2}$.

Par inégalité des accroissements finis :

$$f(x) - f(A) \geqslant \frac{\ell}{2}(x-a).$$

Cette inégalité est valable pour tout $x \geqslant A$, donc :

$$\forall x \geqslant A \qquad f(x) \geqslant \frac{\ell}{2}(x-A) + f(A).$$

Comme $\ell > 0$ alors $\frac{\ell}{2}(x-A) + f(A) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ donc par théorème de comparaison :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

3. (a) *(2 points)* Soit $\varepsilon > 0$. Alors $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, et comme $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ alors il existe un voisinage de $+\infty$ sur lequel $f'(x) \in \left[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right]$, ce qui signifie :

$$\exists A \in \mathbb{R} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad x \geqslant A \implies |f'(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si A est négatif alors on peut le remplacer par n'importe quel réel positif, l'implication reste vraie.

Soit A un tel réel, et x strictement supérieur à A. On applique l'inégalité des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[A,x]$. Comme f est dérivable alors :
- f est continue sur $[A,x]$,
- f est dérivable sur $]A,x[$,
- $\forall t \in]A,x[\qquad |f'(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

D'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\left|\frac{f(x)-f(A)}{x-A}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a donc démontré qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad x \geqslant A \implies |f(x) - f(A)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}|x-A|. \tag{1}$$

La fonction $x \mapsto \frac{f(A)}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, et $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, donc il existe un voisinage de $+\infty$ sur lequel $\frac{f(A)}{x} \in \left]-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right[$. Ceci signifie qu'il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad x \geqslant B \implies \frac{|f(A)|}{x} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

(b) *(1 point)* Soit $\varepsilon > 0$. La relation (1) montre qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad x \geqslant A \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{f(x)}{x} - \frac{f(A)}{x}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\left|1 - \frac{A}{x}\right|.$$

Si $x \geqslant A$ et $x > 0$ alors $0 \leqslant \frac{A}{x} \leqslant 1$ donc $\left|1 - \frac{A}{x}\right| \leqslant 1$, puis :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad x \geqslant A \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{f(x)}{x} - \frac{f(A)}{x}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

Par inégalité triangulaire :

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| = \left|\frac{f(x)}{x} - \frac{f(A)}{x} + \frac{f(A)}{x}\right| \leqslant \left|\frac{f(x)}{x} - \frac{f(A)}{x}\right| + \left|\frac{f(A)}{x}\right|$$

Soit $C = \operatorname{Max}\{A, B\}$. Si $x \geqslant C$ alors $x \geqslant A$ et $x \geqslant B$ donc d'après (2) et (3) :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad x \geqslant C \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On a donc démontré que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad x \geqslant C \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \varepsilon.$$

Ceci signifie que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ admet 0 pour limite en $+\infty$.

4. *(1 point)* Supposons que : $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$.
   Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $g(x) = f(x) - \ell x$.
   Par somme la fonction g est dérivable, de dérivée $g'(x) = f'(x) - \ell$.
   Comme $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$ alors $g'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
   D'après la question précédente : $\frac{g(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
   Or $\frac{g(x)}{x} = \frac{f(x)}{x} - \ell$, donc : $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$.
5. *(1 point)* La réciproque est fausse.
   Posons par exemple : $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) = x + \sin x$.
   Alors : $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{\sin x}{x}$.
   Par théorème d'encadrement, comme dans la première partie : $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.
   La fonction f est dérivable de dérivée $f' : x \mapsto 1 + \cos x$.
   Cette fonction n'admet pas de limite en $+\infty$, sinon la fonction cosinus admettrait une limite.
   Il est donc possible d'avoir $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$ sans avoir $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$.

Problème 2. *(15 points)*

On souhaite résoudre l'équation :

$$P^2 + (1 - X^2)Q^2 = 1 \tag{$\star$}$$

1. *(1 point)* Supposons que le couple (P, Q) est solution avec P constant.
   Notons $P = a$ où $a \in \mathbb{R}$. L'équation $(\star)$ devient :
   $$(1 - X^2)Q^2 = 1 - a^2.$$
   Si Q est non-nul alors Q est de degré positif, puis $(1 - X^2)Q^2$ est de degré $2 + 2\deg Q$, lequel est strictement positif. Or $1 - a^2$ est de degré au plus 0, car il est constant.
   Cette contradiction montre que $Q = 0$, et on en déduit $a^2 = 1$.
   Les couples solutions avec P constant sont donc $(P, Q) = (1, 0)$ et $(P, Q) = (-1, 0)$.
2. *(2 points)* Comme $\deg P = n$ alors $\deg P^2 = 2n$.
   Or $P^2 = 1 - (1 - X^2)Q^2$, donc $\deg(1 - (1 - X^2)Q^2) = 2n$.
   Comme $n \geqslant 1$ alors Q ne peut être nul, car $\deg 1 = 0$.
   Donc $\deg((1 - X^2)Q^2) = 2 + 2\deg Q$.
   Ce degré est strictement supérieur à 0 donc $\deg 1 < \deg(1 - X^2)Q^2$. Ainsi :
   $$\deg(1 - (1 - X^2)Q^2) = \operatorname{Max}\left\{\deg 1, \deg(1 - X^2)Q^2\right\} = \deg(1 - X^2)Q^2.$$
   On en déduit $2 + 2\deg Q = 2n$, qui donne $\deg Q = n - 1$.
   Le coefficient dominant de P^2 est a^2, celui de $(1-X^2)Q^2$ est $-b^2$, il s'agit du coefficient de degré $2n > 0$. Comme $P^2 - (1 - X^2)Q^2 = 1$, le coefficient de degré $2n$ de 1 étant nul on en déduit $a^2 - b^2 = 0$.
   Ceci donne $a = \pm b$, et comme a et b sont positifs alors $a = b$.
3. (a) *(2 points)* La relation $(\star)$ donne par dérivation :
   $$2P'P - 2XQ^2 + (1 - X^2)2Q'Q = 0.$$
   Celle-ci donne :
   $$Q \times (XQ - (1 - X^2)Q') = PP'.$$
   Comme Q divise le membre de gauche alors Q divise le membre de droite, *i.e.*, Q divise $P'P$.
   La relation $(\star)$ donne :
   $$PU + QV = 1 \qquad \text{avec} \qquad U = P \quad \text{et} \quad V = (1 - X^2)Q.$$
   D'après le théorème de Bézout cette relation implique que P et Q sont premiers entre eux.
   Ainsi Q divise $P'P$ et Q est premier avec P donc d'après le lemme de Gauss Q divise P'.

(b) *(1 point)* Comme Q divise P' alors il existe $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P' = AQ$.

Comme P est de degré $n \geqslant 1$ alors P' n'est pas nul, donc A n'est pas nul non plus.

Comme $P' = AQ$ alors $\deg P' = \deg A + \deg Q$.

Or $\deg P' = n - 1$ et $\deg Q = n - 1$, donc $\deg A = 0$, et ainsi A est constant.

Notons $A = \lambda \in \mathbb{R}$, ainsi $P' = \lambda Q$.

Comme P est de degré n et de coefficient dominant a alors $P = aX^n + R$ avec $\deg R < n$, donc $P' = anX^{n-1} + R'$ avec $\deg R' < n - 1$, ce qui montre que le coefficient dominant de P' est an.

Le coefficient dominant de Q est a, donc celui de λQ est λa. Comme $P' = \lambda Q$ alors $an = \lambda a$, puis $\lambda = n$ car a est non-nul.

On a donc démontré que $P' = nQ$.

(c) *(1 point)* Comme $P' = nQ$ alors $Q = \frac{1}{n}P'$, et la relation $(\star)$ devient :

$$P^2 + (1 - X^2)\tfrac{1}{n^2}P'^2 = 1.$$

Par dérivation :

$$2P'P - 2X\tfrac{1}{n^2}P'^2 + (1 - X^2)\tfrac{1}{n^2}2P''P' = 0.$$

Comme P est de degré $n \geqslant 1$ alors P' est de degré $n - 1 \geqslant 0$, donc P' n'est pas nul. Ainsi, en divisant par $2P'$:

$$P - X\tfrac{1}{n^2}P' + (1 - X^2)\tfrac{1}{n^2}P'' = 0.$$

Ceci donne bien :

$$(1 - X^2)P'' - XP' + n^2P = 0.$$

4. (a) *(2 points)* Soit $f(t) = P(\cos t)$.

Cette fonction est définie et dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$, de dérivées :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f'(t) = -\sin t\, P'(\cos t) \qquad f''(t) = -\sin^2 t\, P''(\cos t) - \cos t\, P'(\cos t).$$

La relation démontrée dans la question précédente donne, en spécialisant en $\cos t$:

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad (1 - \cos^2 t)P''(\cos t) - \cos t\, P'(\cos t) + n^2P(\cos t) = 0.$$

Comme $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$ alors :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f''(t) + n^2f(t) = 0.$$

La fonction f est donc solution de l'équation différentielle :

$$y'' + n^2y = 0.$$

L'équation caractéristique de cette équation est $\lambda^2 + n^2 = 0$, ses racines sont $\pm in$, donc ses solutions sont les fonctions :

$$y : t \mapsto \lambda\cos(nt) + \mu\sin(nt) \qquad \text{avec} \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Il existe donc deux constantes λ et μ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f(t) = \lambda\cos(nt) + \mu\sin(nt). \tag{4}$$

(b) *(1 point)* Comme $f(t) = P(\cos t)$ alors $f(0) = P(1)$.
De plus la relation (4) donne $f(0) = \lambda$, donc $\lambda = P(1)$.
La relation ($\star$) donne par spécialisation en 1 : $P(1)^2 = 1$.
Ainsi $P(1) = \pm 1$ puis $\lambda = -1$ ou $\lambda = 1$.
Par dérivation on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f'(t) = -n\lambda \sin(nt) + n\mu \cos(nt).$$

Pour $t = 0$ ceci donne $f'(0) = n\mu$.
On sait aussi que $f'(t) = -\sin t\, P'(\cos t)$ donc $f'(0) = 0$, et ainsi $\mu = 0$.

5. (a) *(1 point)* Soit $t \in \mathbb{R}$.
D'après les formules d'Euler : $\cos(nt) = \mathrm{Re}\,(e^{int})$.
D'après la formule du binôme de Newton :

$$e^{int} = \left(e^{it}\right)^n = (\cos t + i \sin t)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (\cos^{n-p} t) i^p \sin^p t.$$

Le complexe i^p est réel si et seulement si p est pair donc :

$$\mathrm{Re}\left(e^{int}\right) = \sum_{\substack{0 \leqslant p \leqslant n \\ p \text{ pair}}} \binom{n}{p} (\cos^{n-p} t) i^p \sin^p t.$$

Ceci donne :

$$\cos(nt) = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} (\cos^{n-2k} t) i^{2k} \sin^{2k} t.$$

On obtient donc bien :

$$\cos(nt) = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} (-1)^k \cos^{n-2k}(t) \sin^{2k}(t).$$

(b) *(1 point)* La formule précédente s'écrit aussi :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \cos(nt) = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} (-1)^k \cos^{n-2k} t (1 - \cos^2 t)^k.$$

Posons :

$$T_n = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} (-1)^k X^{n-2k} (1 - X^2)^k.$$

Alors T_n est un polynôme, et en spécialisant en $\cos t$ on obtient bien, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $T_n(\cos t) = \cos(nt)$.

(c) *(1 point)* Soit U_n un autre polynôme tel que : $\forall t \in \mathbb{R} \quad U_n(\cos t) = \cos(nt)$.
On a alors : $\forall t \in \mathbb{R} \quad U_n(\cos t) = T_n(\cos t)$.
La fonction $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ est surjective, donc pour tout $x \in [-1, 1]$ il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos t$, ce qui montre que :

$$\forall x \in [-1, 1] \qquad U_n(x) = T_n(x).$$

Le polynôme $U_n - T_n$ admet une infinité de racines, à savoir les éléments de $[-1, 1]$.
Il est donc nul, et ainsi $U_n = T_n$.

6. (a) *(1 point)* Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $A_n = T_n^2 + (1 - X^2)\frac{1}{n^2}T_n'^2$.

Par spécialisation en $\cos t$ on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad A_n(\cos t) = T_n^2(\cos t) + \sin^2 t \tfrac{1}{n^2}T_n'^2(\cos t).$$

On sait que pour tout $t \in \mathbb{R}$: $T_n(\cos t) = \cos(nt)$.

Par dérivation :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad -\sin t\ T_n'(\cos t) = -n\sin(nt).$$

Ceci donne :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \sin^2 t\, T_n'^2(\cos t) = n^2 \sin^2(nt).$$

Et enfin :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad A_n(\cos t) = \cos^2(nt) + \sin^2(nt) = 1.$$

Ainsi le polynôme $A_n - 1$ admet une infinité de racines, à savoir les éléments de $[-1, 1]$.

Il est donc nul, ce qui montre que le couple $\left(T_n, \frac{1}{n}T_n'\right)$ est solution de $(\star)$.

(b) *(1 point)* Soit (P, Q) une solution de l'équation $(\star)$.

Supposons que P n'est pas constant, *i.e.*, P est de degré $n \geqslant 1$.

D'après les questions 2, 3, 4 ceci implique que $Q = \frac{1}{n}P'$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$: $P(\cos t) = \pm\cos(nt)$.

Par unicité du polynôme T_n vérifiant $\cos(nt) = T_n(\cos t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ceci donne $P = T_n$ ou $-P = T_n$, *i.e.*, $P = \pm T_n$.

On en déduit alors $Q = \frac{1}{n}T_n'$, et donc $(P, Q) = \left(T_n, \frac{1}{n}T_n'\right)$ ou $(P, Q) = \left(-T_n, -\frac{1}{n}T_n'\right)$.

Remarquons que d'après la question précédente $\left(T_n, \frac{1}{n}T_n'\right)$ est solution, donc les couples $\left(T_n, -\frac{1}{n}T_n'\right)$, $\left(-T_n, \frac{1}{n}T_n'\right)$ et $\left(-T_n, -\frac{1}{n}T_n'\right)$ sont également solutions.

Si P est constant alors d'après la question 1 $(P, Q) = (\pm 1, 0)$.

Le polynôme $T_0 = 1$ vérifie : $\forall t \in \mathbb{R} \quad \cos(0t) = T_0(\cos t)$, donc si P est de degré $n = 0$ on a aussi $(P, Q) = \left(\pm T_n, \pm\frac{1}{n}T_n'\right)$.

Finalement les solutions de l'équation $(\star)$ sont les couples $\left(\pm T_n, \pm\frac{1}{n}T_n'\right)$ où $n \in \mathbb{N}$.

Problème 3. *(12 points)*

Partie A. *(3 points)*

1. *(2 points)* Comme f et g sont convexes alors les fonctions pentes associées sont croissantes, c'est-à-dire que pour tout $a \in I$ les fonctions :

$$p_a : \begin{array}{rcl} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array} \qquad \text{et} \qquad q_a : \begin{array}{rcl} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \end{array}$$

sont croissantes.

La somme de deux fonctions croissantes est croissante, donc les fonctions $p_a + q_a$ sont croissantes.

Comme $\lambda \geqslant 0$ alors les fonctions λp_a et λq_a sont croissantes.

En effet, pour tout $a \in I$ et tout $(x,y) \in (I \setminus \{a\})^2$:

$$\begin{array}{rcll} x < y & \Longrightarrow & p_a(x) \leqslant p_a(y) \quad \text{et} \quad q_a(x) \leqslant q_b(y) & \\ & \Longrightarrow & p_a(x) + q_a(y) \leqslant p_a(y) + q_a(y) & \text{par somme} \\ & \Longrightarrow & (p_a + q_a)(x) \leqslant (p_a + q_a)(y) & \\ \text{et} \quad x < y & \Longrightarrow & \lambda p_a(x) \leqslant \lambda q_a(y) & \text{car} \quad \lambda \geqslant 0. \end{array}$$

Ceci montre donc que les fonctions $p_a + q_a$ et λp_a sont croissantes.

De plus :

$$\begin{array}{rl} \forall x \in I \setminus \{a\} & (p_a + q_a)(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} + \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} = \dfrac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} \\ \text{et} & \lambda p_a(x) = \lambda \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \dfrac{(\lambda f)(x) - (\lambda f)(a)}{x-a} \\ & \lambda q_a(x) = \lambda \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} = \dfrac{(\lambda g)(x) - (\lambda g)(a)}{x-a} \end{array}$$

Ainsi les fonctions $p_a + q_a$ sont les fonctions pentes associées à la fonction $f + g$, et les fonctions λp_a et λq_a sont les fonctions pentes associées aux fonctions λf et λg.

Ces fonctions pentes sont croissantes pour tout $a \in I$, donc les fonctions $f + g$ et λf sont convexes.

2. *(1 point)* La fonction f est convexe dérivable donc sa dérivée est croissante.

Comme $f'(c) = 0$ alors :

$$\begin{array}{rrcl} \forall x \in I & x \leqslant c & \Longrightarrow & f'(c) \leqslant 0 \\ \text{et} & x \geqslant c & \Longrightarrow & f'(c) \geqslant 0. \end{array}$$

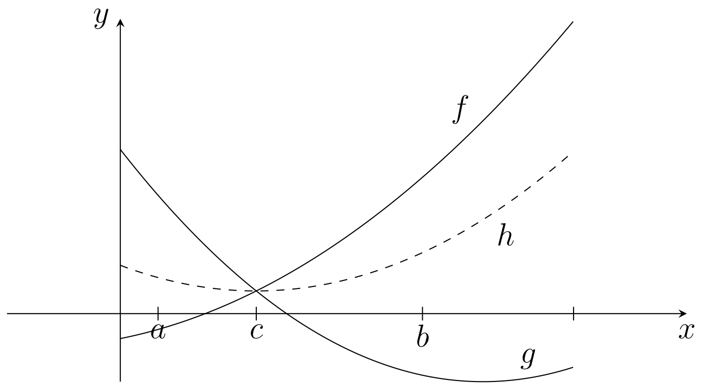
Ceci montre que la fonction f est décroissante sur $I \cap \,]-\infty, c]$ et croissante sur $I \cap [c, +\infty[$.

Elle présente donc un minimum global en c.

Partie B. *(9 points)*

1. *(1 point)* Si f est strictement positive alors pour $\lambda = 0$ on a :
$$\forall x \in [0,1] \qquad (1-\lambda)f(x) + \lambda g(x) = f(x) > 0.$$
Donc le réel $\lambda = 0$ convient.
Si g est strictement positive alors pour $\lambda = 1$ on a :
$$\forall x \in [0,1] \qquad (1-\lambda)f(x) + \lambda g(x) = g(x) > 0.$$
Donc le réel $\lambda = 1$ convient.

2. (a) *(1 point)* Comme $\operatorname{Max}\{f(a), g(a)\} > 0$ et $f(a) \leqslant 0$ alors $g(a) > 0$.
Comme $\operatorname{Max}\{f(b), g(b)\} > 0$ et $g(b) \leqslant 0$ alors $f(b) > 0$.
Comme $f(a) \leqslant 0$ et $f(b) > 0$ alors $a \neq b$, et donc $a < b$.
(b) *(1 point)* Par exemple :



3. (a) *(1 point)* Soit φ la fonction définie par $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$.
Comme f et g sont dérivables alors elles sont continues et donc par somme φ est continue.
De plus $\varphi(a) = f(a) - g(a)$, comme $f(a) \leqslant 0$ et $g(a) > 0$ alors $\varphi(a) < 0$.
Aussi $\varphi(b) = f(b) - g(b)$, comme $f(b) > 0$ et $g(b) \leqslant 0$ alors $\varphi(b) > 0$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme φ est continue avec $\varphi(a) < 0 < \varphi(b)$ alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $\varphi(c) = 0$.
Comme $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ sont non-nulles alors $c \neq a$ et $c \neq b$, donc $c \in]a, b[$.
Comme $\varphi(c) = 0$ alors $f(c) = g(c)$.
(b) *(2 points)* Comme $\operatorname{Max}\{f(c), g(c)\} > 0$ et $f(c) = g(c)$ alors $f(c) > 0$.
On applique le théorème des accroissements finis. Comme f est dérivable alors :
   - f est continue sur $[a, c]$,
   - f est dérivable sur $]a, c[$,

D'après le théorème des accroissements finis il existe $d \in]a, c[$ tel que $f'(d) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$.
Comme $f(c) > 0$ et $f(a) \leqslant 0$ alors $f(c) - f(a) > 0$, comme $c \in]a, b[$ alors $c - a > 0$, et donc $f'(d) > 0$.
Comme g est dérivable alors :

- g est continue sur $[c, b]$,
- g est dérivable sur $]c, b[$,

D'après le théorème des accroissements finis il existe $e \in\ ]c, b[$ tel que $g'(e) = \frac{g(b)-g(c)}{b-c}$.

Comme $g(c) > 0$ et $g(b) \leqslant 0$ alors $g(b) - g(c) < 0$, comme $c \in\ ]a, b[$ alors $b - c > 0$, et donc $g'(e) < 0$.

(c) *(1 point)* Comme f et g sont convexes dérivables alors leurs dérivées sont croissantes.

Comme $d \in\ ]a, c[$ alors $d < c$, donc $f'(d) \leqslant f'(c)$, et comme $f'(d) > 0$ alors $f'(c) > 0$.

Comme $e \in\ ]c, b[$ alors $c < e$, donc $g'(c) \leqslant g'(e)$, et comme $g'(e) < 0$ alors $g'(c) < 0$.

4. (a) *(1 point)* On résout l'équation :

$$(1-\lambda)f'(c) + \lambda g'(c) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f'(c) = \lambda(f'(c) - g'(c))$$

Comme $f'(c) > 0$ et $g'(c) < 0$ alors $f'(c) - g'(c) > 0$.

En particulier $f'(c) - g'(c) \neq 0$ et donc :

$$(1-\lambda)f'(c) + \lambda g'(c) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda = \frac{f'(c)}{f'(c) - g'(c)}.$$

On vérifie par équivalences que $\lambda \in [0, 1]$, en utilisant le fait que $f'(c) - g'(c) > 0$:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \frac{f'(c)}{f'(c) - g'(c)} \leqslant 1 \qquad &\Longleftrightarrow \qquad 0 \leqslant f'(c) \leqslant f'(c) - g'(c) \\ &\Longleftrightarrow \qquad 0 \leqslant f'(c) \quad \text{et} \quad g'(c) \leqslant 0. \end{aligned}$$

Cette dernière assertion est vraie, donc $\lambda \in [0, 1]$.

Nous avons démontré qu'il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que $(1-\lambda)f'(c) + \lambda g'(c) = 0$.

(b) *(1 point)* Soit λ l'élément de $[0, 1]$ vérifiant la relation ci-dessus. On pose :

$$h = (1-\lambda)f + \lambda g.$$

Comme $\lambda \in [0, 1]$ alors $1 - \lambda \geqslant 0$ et $\lambda \geqslant 0$.

Les fonctions f et g sont convexes donc d'après la question 1 de la partie A les fonctions $(1-\lambda)f$ et λg sont convexes.

Encore d'après la question 1 de la partie A, la fonction $h = (1-\lambda)f + \lambda g$ est convexe.

Comme f et g sont dérivables alors h est dérivable. De plus $h' = (1-\lambda)f' + \lambda g'$, donc $h'(c) = 0$ par choix de λ.

D'après la question 2 de la partie A, comme h est convexe dérivable et $h'(c) = 0$ alors h présente un minimum en c.

Comme $f(c) = g(c)$ alors $h(c) = f(c)$, donc $h(c) > 0$.

La fonction h présente un minimum en c et $h(c) > 0$ donc h est strictement positive sur $[0, 1]$.

Nous avons démontré qu'il existe une moyenne pondérée de f et g strictement positive sur $[0, 1]$.