

Programme de colles
Semaine 22
du 23 au 27 mars 2026

Questions de cours

Sauf mention explicite il faut connaître l'énoncé et la démonstration.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est injective si et seulement si $\ker f = \{0_E\}$.
2. Soit p un endomorphisme de E , F son image et G son noyau. Si $p \circ p = p$ alors $E = F \oplus G$.
3. Soit H un hyperplan de E . Alors il existe une droite vectorielle supplémentaire de H dans E .
4. Soit a et b deux éléments d'un espace vectoriel E . Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Si $a + F = b + G$ alors $F = G$ et $b - a \in F$.

Exercices

Chapitre A11. Dérivation

- I. Fonction dérivée
- II. Théorèmes
- III. Dérivées successives
- IV. Dérivation des fonctions complexes
- V. Convexité

Programme prévisionnel de la semaine suivante

Chapitres A11 (Dérivation) et B9 (Applications linéaires).

Chapitre A11. Dérivation

I. Fonction dérivée

Dérivabilité en un point. Dérivabilité à gauche, à droite. La dérivabilité implique la continuité. Fonction dérivée, opérations : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, dérivée de la réciproque.

II. Théorèmes

Si f dérivable présente un extremum local alors sa dérivée s'y annule. Point critique. Théorème de Rolle. Égalité des accroissements finis, inégalité des accroissements finis. Application aux suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable, alors f est croissante (resp. décroissante, constante) si et seulement si f' est positive (resp. négative, nulle). Théorème de limite de la dérivée.

III. Dérivées successives

Définition. Classes \mathcal{C}^n et \mathcal{C}^∞ . Exemples : x^n , e^x , $\ln x$, $\cos x$, $\sin x$. Formule de Leibniz.

IV. Dérivation des fonctions complexes

Définition. Propriété : $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont, et alors $f' = (\operatorname{Re} f)' + (\operatorname{Im} f)'$. Les théorèmes sur les extrema, le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis ne sont plus valables, mais l'inégalité des accroissements finis l'est encore, du moins pour la majoration.

V. Convexité

Définition, inégalité de Jensen. Lemme des trois pentes, théorème de croissance des pentes. Régularité : si f est convexe alors f est dérivable à gauche et à droite en tout point a et $f'_g(a) \leq f'_d(a)$. Si f est convexe sur un intervalle ouvert alors f est continue.

Cas des fonctions dérivables, deux fois dérivables. Position par rapport aux tangentes.

Fonction concaves, résultats similaires.