Corrigé du Devoir à la Maison n°11

1. (a) La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^2}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, continue par quotient de fonctions continues. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ l'intervalle $[1, x]$ ou $[x, 1]$ est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie. Ainsi F est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
D'après le théorème fondamental, comme f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ alors F est la primitive de f qui s'annule en 1. Ainsi F est dérivable et :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad F'(x) = f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$$
Cette dérivée est négative sur $]0, 1]$, positive sur $[1, +\infty[$, donc F est décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$.
Par quotient la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi F est dérivable et F' est de classe $\mathscr{C}^\infty$, donc F est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

(b) On calcule d'abord le développement limité de $F'(x)$ à l'ordre 2 au voisinage de $x = 1$. Pour cela on pose $h = x - 1$:
$$F'(x) = F'(1+h) = \ln(1+h)\frac{1}{2+2h+h^2} = \frac{1}{2}\ln(1+h)\frac{1}{1+(h+\frac{1}{2}h^2)}$$
Comme $\left(h + \frac{1}{2}h^2\right) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ alors :
$$\begin{aligned}\frac{1}{1+(h+\frac{1}{2}h^2)} &= 1 - \left(h+\frac{1}{2}h^2\right) + \left(h+\frac{1}{2}h^2\right)^2 + o_0(h^2)\\ &= 1 - h + \frac{1}{2}h^2 + o_0(h^2)\end{aligned}$$
Ceci donne :
$$F'(1+h) = \frac{1}{2}\left(h - \frac{1}{2}h^2 + o(h^2)\right)\left(1 - h + \frac{1}{2}h^2 + o_0(h^2)\right) = \frac{1}{2}h - \frac{3}{4}h^2 + o_0(h^2)$$
On applique le théorème de primitivation des développements limités. Comme F' admet un développement limité à l'ordre 2 alors F admet un développement limité à l'ordre 3. Sachant que $F(1) = 0$ ce développement limité est :
$$F(1+h) = \frac{1}{4}h^2 - \frac{1}{4}h^3 + o_0(h^3)$$
On a donc obtenu le développement limité de F au voisinage du point $x = 1$:
$$\boxed{F(x) = \frac{1}{4}(x-1)^2 - \frac{1}{4}(x-1)^3 + o_1((x-1)^3)}$$

2. (a) Par quotient de fonctions ne s'annulant pas la fonction φ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Démontrons qu'elle est continue en 0 également.

Le développement limité
$$\arctan x = x + o_0(x)$$
donne
$$\varphi(x) = 1 + o_0(1)$$
donc φ admet 1 pour limite en 0. Ainsi $\varphi(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \varphi(0)$, et φ est continue en 0.

Finalement φ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Soit u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $u(t) = \arctan t$ et $v(t) = \ln t$. Ces deux fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur tout intervalle $[1, x]$ ou $[x, 1]$.

Par intégration par parties, en fixant $x > 0$:
$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^x u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_1^x - \int_1^x u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \arctan x \ln x - \int_1^x \frac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t = \arctan x \ln x - \int_1^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Ceci est bien la formule demandée.

(c) Tout d'abord l'équivalence $\arctan \underset{(0)}{\sim} x$ donne :
$$\arctan x\ \ln x \underset{(0)}{\sim} x \ln x$$

Par croissances comparées $(x\ln x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc $(\arctan x \ln x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

La fonction φ est continue sur $[0, 1]$ donc la fonction
$$\begin{aligned} [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_1^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$
est définie sur $[0, 1]$, et d'après le théorème fondamental c'est une primitive de φ. Elle est *a fortiori* continue et ainsi :
$$\int_1^x \varphi(t) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \int_1^0 \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

La formule démontrée dans la question précédente montre que F admet une limite finie en 0 :
$$\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0}\left(\arctan x\ \ln x - \int_1^x \varphi(t)\right) = \int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Ainsi F est prolongeable par continuité en 0, en posant $\widetilde{F}(0) = \displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

(d) La limite de $\widetilde{F}'$ en 0 est :
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \widetilde{F}'(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x}{1+x^2} = -\infty$$

La fonction $\widetilde{F}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'après le théorème de limite de la dérivée, comme $\widetilde{F}'$ admet une limite infinie en 0 alors $\widetilde{F}$ n'est pas dérivable en 0.

De plus, cette limite étant $-\infty$, sa courbe représentative admet une demi-tangente verticale en $x = 0$, orientée vers le bas.

3. (a) Soit x réel strictement positif.

On applique le changement de variable $u = \frac{1}{t}$:

- La fonction $t \mapsto u = \frac{1}{t}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $\left[1, \frac{1}{x}\right]$ ou $\left[\frac{1}{x}, 1\right]$ (selon la position de x par rapport à 1).
- Sa dérivée est $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{t^2}$, ce qui donne $\mathrm{d}u = -\left(\frac{1}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$ puis $\mathrm{d}t = -\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u$.
- Par changement de variable :

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{\ln \frac{1}{u}}{1+\frac{1}{u^2}}\,(-u^2)\mathrm{d}u = \int_1^x \frac{\ln u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = F(x)$$

Ceci est bien le résultat demandé.

<u>Autre méthode.</u> on dérive la fonction $G : x \mapsto F(x) - F\left(\frac{1}{x}\right)$.

Si $x \in \mathbb{R}_+^*$ alors $\frac{1}{x}$ est défini et appartient à $\mathbb{R}_+^*$ donc la fonction G est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est dérivable par composition de fonctions dérivables, de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad G'(x) = F'(x) - \left(-\frac{1}{x^2}\right)F'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{1}{x^2}\frac{\ln \frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$$

Comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle ceci implique que G est constante. Or $G(1) = 0$, donc G est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui donne bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$$

(b) Comme $F\left(\frac{1}{x}\right) = F(x)$ pour tout $x > 0$ alors :

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} F\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to 0} F(y)$$

Par continuité de $\widetilde{F}$ en 0 :

$$\lim_{y\to 0} F(y) = \widetilde{F}(0) = K$$

Ainsi F admet $K = \widetilde{F}(0)$ pour limite en $+\infty$ également : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = K$

(c) On sait que $F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} K$. Pour obtenir un développement asymptotique à deux termes de F on cherche un équivalent de $F(x) - K$ en $+\infty$. Pour ceci on pose $h = \frac{1}{x}$, et alors :

$$F(x) - K = F\left(\tfrac{1}{h}\right) - K = F(h) - K$$

Ceci donne :

$$F(h) - K = \arctan h \ln h - \int_1^h \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Par relation de Chasles :

$$F(h) - K = \arctan h \ln h - \int_0^h \varphi(t)\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

La fonction $h \mapsto \int_0^h \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de φ qui s'annule en 0, donc elle est dérivable. D'après la formule de Taylor-Young elle admet alors le développement limité à l'ordre 1 en 0 suivant :

$$\int_0^h \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0 + \varphi(0)h + o_0(h).$$

Comme $\varphi(0) = 1$ alors : $\int_0^h \varphi(t)\,\mathrm{d}t \underset{(0)}{\sim} h$.

Par contre on sait que $\arctan h \ln h \underset{(0)}{\sim} h \ln h$. Comme $h = o_0(h \ln h)$ alors :

$$\int_0^h \varphi(t)\,\mathrm{d}t = o_0(\arctan h \ln h).$$

L'égalité (1) montre donc que :

$$F(h) - K \underset{(0)}{\sim} \arctan h \ln h \underset{(0)}{\sim} h \ln h.$$

Ainsi :

$$F\left(\tfrac{1}{x}\right) - K \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{\ln \frac{1}{x}}{x} = -\frac{\ln x}{x}.$$

Ceci donne le développement asymptotique suivant :

$$\boxed{F(x) = K - \frac{\ln x}{x} + o_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)}$$

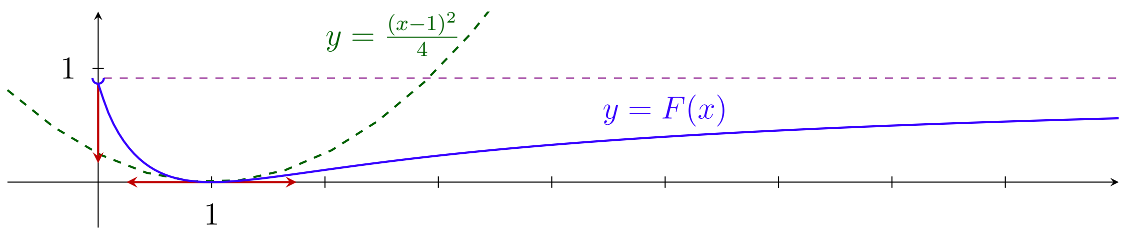
Ainsi la convergence de F vers K est relativement lente.

4. On sait que F est décroissante sur $]0,1]$, croissante sur $[1,+\infty[$, que $\widetilde{F}(0) \simeq 0{,}9$, $F(1) = 0$ et $\lim_{+\infty} F = \widetilde{F}(0)$.

   On sait aussi que la courbe admet une demi-tangente verticale en $x = 0$.

   Grâce au développement limité de F en 1 on sait que la courbe est proche de la parabole d'équation $y = \frac{1}{4}(x-1)^2$ au voisinage du point d'abscisse 1. On peut aussi remarquer que la courbe est au-dessus de cette parabole si $x < 1$, et en-dessous sinon.

   On obtient une courbe comme la suivante.



5. On utilise la méthode des Trapèzes pour calculer $K = \displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$R_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\left(\tfrac{k}{n}\right) \qquad S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\tfrac{k}{n}\right) \qquad T_n = \frac{R_n + S_n}{2}$$

   Comme φ est continue alors la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t$, et la convergence est en $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

   On calcule, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$T_n = \tfrac{1}{2n}\varphi(0) + \tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\varphi\left(\tfrac{k}{n}\right) + \tfrac{1}{2n}\varphi(1).$$

   Comme $\varphi(t) = \frac{\arctan t}{t}$ si $t \neq 0$ et $\varphi(0) = 1$ alors :

$$T_n = \tfrac{1}{2n} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\arctan \frac{k}{n}}{k} + \tfrac{\pi}{8n}.$$

   Il s'agit bien de la suite notée (u_n) par l'énoncé, et donc la suitre $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers K, et $u_n - K = O_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

6. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $x > 0$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ on pose $u(t) = \frac{t^{k+1}}{k+1}$ et $v(t) = \ln t$. Ces deux fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_k(x) &= \int_1^x t^k \ln t\,\mathrm{d}t = \int_1^x u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\ln t\right]_1^x - \int_1^x \frac{t^k}{k+1}\,\mathrm{d}t = \frac{x^{k+1}\ln x}{k+1} - \frac{x^{k+1}-1}{(k+1)^2} \end{aligned}$$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t > 0$. Alors $(-t^2) \neq 1$, donc la formule de somme des termes d'une suite géometrique donne :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k} = \sum_{k=0}^{n}(-t^2)^k &= \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1-(-t^2)} \\ &= \frac{1-(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2} - (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \end{aligned}$$

   On obtient bien la formule demandée.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,1[$. Par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} F(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x) &= \int_1^x \left(\frac{\ln t}{1+t^2} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k}\ln t\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_1^x \ln t\left(\frac{1}{1+t^2} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k}\right)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

   D'après la formule obtenue dans la question précédente :

$$F(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x) = \int_1^x (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\ln t\,\mathrm{d}t$$

On utilise ensuite l'inégalité triangulaire, en remarquant que $x < 1$:

$$\left|F(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x)\right| \quad \leqslant \quad \int_x^1 \left|\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\ln t\right| \mathrm{d}t$$

Pour $t \in [x, 1]$, comme $\ln t$ est négatif et $\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$ est positif alors :

$$\left|F(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x)\right| \quad \leqslant \quad \int_x^1 -\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\ln t \,\mathrm{d}t$$

Pour tout $t \in [x, 1]$ comme $\frac{1}{1+t^2} \leqslant 1$ alors par croissance de l'intégrale :

$$\int_x^1 -\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\ln t\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^1 -t^{2n+2}\ln t\,\mathrm{d}t = \int_1^x t^{2n+2}\ln t\,\mathrm{d}t$$

Ainsi par transitivité on obtient la majoration :

$$\boxed{\left|F(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x)\right| \leqslant I_{2n+2}(x)}$$

(d) On a démontré que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad I_k(x) = \frac{x^{k+1}\ln x}{k+1} + \frac{1 - x^{k+1}}{(k+1)^2}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé, par croissances comparées :

$$x^{k+1}\ln x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

On en déduit :

$$I_k(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{(k+1)^2}$$

L'inégalité obtenue dans la question précédente est valable pour tout $x \in \,]0, 1[$:

$$\forall x \in \,]0,1[\qquad \left|F(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x)\right| \leqslant I_{2n+2}(x)$$

La fonction F admet K pour limite en 0, et nous venons de montrer que les fonctions $x \mapsto I_k(x)$ admettent une limite finie en 0. Par théorème de comparaison :

$$\lim_{x\to 0}\left|F(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x)\right| \quad \leqslant \quad \lim_{x\to 0}\left(I_{2n+2}(x)\right)$$

$$\text{d'où} \qquad \left|K - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\right| \quad \leqslant \quad \frac{1}{(2n+3)^2}$$

Ceci donne :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad |K - v_n| \leqslant \frac{1}{(2n+3)^2}}$$

(e) Par le théorème d'encadrement la suite (v_n) converge vers K.

On peut approcher la valeur de K en calculant v_n pour un n suffisamment grand. Pour obtenir une approximation à 10^{-10} près, il faut obtenir un entier n tel que :

$$|K - v_n| \leqslant 10^{-10}$$

Ce sera le cas si :

$$\frac{1}{(2n+3)^2} \leqslant 10^{-10}$$

Cette dernière inégalité équivaut à $2n+3 \geqslant 10^5$, donc à $n \geqslant 49\,999$.

Toutefois ce dernier calcul est inutile si l'on écrit le programme suivant :

```python
# Calcul de K à eps près
eps=1e-10
S=0
k=0
while (2*k+3)**(-2)>eps:
    S+=(-1)**k/(2*k+1)**2
    k+=1
print(S)
```

Ce réel est appelé *constante de Catalan*, du nom du mathématicien Eugène Charles Catalan (Belgique, 1814 – 1894). On ne sait pas encore s'il est rationnel ou non, bien qu'on lui connaisse plus de 31 milliards de décimales, dont les premières sont :

$$K \simeq 0{,}91596559417721901505460351493238411077414937428167213426649 81\ldots$$