Lycée Bellevue – Toulouse **Année 2024-2025**
MPSI – Mathématiques

Programme de colles
Semaine 23
du 31 mars au 4 avril 2025

Questions de cours

Sauf mention explicite il faut connaître l'énoncé et la démonstration.

1. Asymptote en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \frac{2x^2+5}{x+3}$ (ou d'une fonction similaire), position relative de la courbe de la fonction par rapport à l'asymptote.
2. Une famille libre maximale est une base.
3. Formule de Grassmann.
4. Soit $f : E \to F$ linéaire et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors f est injective si et seulement si la famille $f(\mathcal{B})$ est libre.

Exercices

Chapitre B8. Espaces vectoriels

I. Espaces vectoriels
II. Sous-espaces vectoriels
III. Sommes de sous-espaces vectoriels
IV. Familles finies de vecteurs
V. Sous-espaces affines

Chapitre B9. Applications linéaires

I. Généralités
II. Image et Noyau
III. Formes linéaires
IV. Projecteurs et symétries

Programme prévisionnel de la semaine suivante

Chapitres B9 (Applications linéaires) et A10 (Développement limités).

Chapitre B9. Applications linéaires

I. Généralités

Application linéaire, caractérisation. Endomorphisme, notations $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}(E)$. Exemples : identité, application nulle, homothéties. Combinaisons linéaires, composées d'applications linéaires. Bilinéartié de $(g, f) \mapsto g \circ f$, $\mathcal{L}(E)$ est un anneau. Isomorphismes, notation $\mathrm{GL}(E)$. Restriction à un sev.

Une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions à deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

II. Image et Noyau

Image et image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire. Image et noyau. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité. L'ensemble des solutions de $f(u) = b$ d'inconnue b est un sous-espace affine.

III. Formes linéaires

Définition, exemples (spécialisation d'un poynôme, d'une fonction, d'une suite). Forme linéaire coordonnée e_i^*. Toute forme linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}$ est de la forme $(x_1, \dots, x_p) \mapsto a_1x_1 + \cdots + a_px_p$.

Une application de E dans $\mathbb{K}^n$ est linéaire ssi toutes ses composantes sont linéaires.

Droites et hyperplans : une droite est un sev engendré par un vecteur non-nul, un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non-nulle. Si H est un hyperplan alors toute droite vectorielle non contenue dans H en est un supplémentaire. Tout supplémentaire d'une droite vectorielle est un hyperplan. Unicité à homothétie près de la forme linéaire définissant un hyperplan.

IV. Projecteurs et symétries

Définitions des projecteurs et symétrie. Caractérisations : $p \circ p = p$ et $s \circ s = \mathrm{Id}$.

Chapitre A10. Développements limités

I. Généralités

Définition d'un DL en 0 à l'ordre n. Lien avec la continuité et la dérivabilité. Troncature, unicité, parité des DL. Forme normalisée.

Développements limités des fonctions usuelles : $\frac{1}{1+x}$, $\ln(1 + x)$, e^x, $\cos x$, $\sin x$, $(1 + x)^\alpha$, $\arctan x$, et $\tan x$ à l'ordre 3.

II. Calculs de développements limités

Somme, produit, composition, quotient de DL. Primitivation. Formule de Taylor Young, corollaire : une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ admet un DL à tout ordre.

IV. Développements limités en un point quelconque

On pose $h = x - a$, on obtient un DL en a.

V. Applications

Calculs de limites. Tangente et position relative. Asymptotes et position relative. Développement asymptotique.