

Programme de colles
Semaine 23
du 30 mars au 3 avril 2026

Questions de cours

Sauf mention explicite il faut connaître l'énoncé et la démonstration.

1. La fonction carré n'est pas uniformément continue sur \mathbb{R} .
2. Calculs d'intégrales : révisions des méthodes vues dans le chapitre A5 (décomposition en éléments simples, intégration par parties, changement de variable).
3. Théorème d'approximation par une fonction en escalier, puis théorème de définition de l'intégrale de Riemann : uniquement les énoncés.
4. Théorème de positivité de l'intégrale.
5. Méthodes des rectangles : définitions de R_n, S_n . Énoncé du théorème.

Exercices

Chapitre A11. Dérivation

- I. Fonction dérivée
- II. Théorèmes
- III. Dérivées successives
- IV. Dérivation des fonctions complexes
- V. Convexité

Chapitre B9. Applications linéaires

- I. Généralités
- II. Image et Noyau
- III. *Projecteurs et symétries* *Hors programme*
- IV. *Formes linéaires* *Hors programme*
- V. *Sous-espaces affines* *Hors programme*

Programme prévisionnel de la semaine suivante

Chapitres B9 (Applications linéaires).

Chapitre A11. Dérivation

Voir programme précédent

Chapitre B9. Applications linéaires

I. Généralités

Application linéaire, caractérisation. Endomorphisme, notations $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}(E)$. Exemples : identité, application nulle, homothéties. Combinaisons linéaires, composées d'applications linéaires. Bilinearté de $(g, f) \mapsto g \circ f$, $\mathcal{L}(E)$ est un anneau. Isomorphismes, notation $\text{GL}(E)$. Restriction à un sev.

Une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions à deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

II. Image et Noyau

Image et image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire. Image et noyau. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité. L'ensemble des solutions de $f(u) = b$ d'inconnue b est un sous-espace affine.

III. Projecteurs et symétries

Définitions des projecteurs et symétrie. Caractérisations : $p \circ p = p$ et $s \circ s = \text{Id}$.

IV. Formes linéaires

Définition, exemples (spécialisation d'un polynôme, d'une fonction, d'une suite). Forme linéaire coordonnée e_i^* . Toute forme linéaire de \mathbb{K}^p dans \mathbb{K} est de la forme $(x_1, \dots, x_p) \mapsto a_1x_1 + \dots + a_px_p$.

Une application de E dans \mathbb{K}^n est linéaire ssi toutes ses composantes sont linéaires.

Droites et hyperplans : une droite est un sev engendré par un vecteur non-nul, un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non-nulle. Si H est un hyperplan alors toute droite vectorielle non contenue dans H en est un supplémentaire. Tout supplémentaire d'une droite vectorielle est un hyperplan. Unicité à homothétie près de la forme linéaire définissant un hyperplan.

V. Sous-espaces affines

Translation, sous-espace affine. Unicité de la direction. Intersection de deux sous-espaces affines.

Théorème : si $f : E \rightarrow F$ est linéaire et $v \in F$ alors l'ensemble des vecteurs $u \in E$ tels que $f(u) = v$ est un sous-espace affine de E . Exemples classiques : ensembles des solutions d'un système linéaire, d'une équation différentielle linéaire.