Chapitre C1
Probabilités

I. Généralités

A. Univers et événements

Définition

On réalise une *expérience aléatoire* et on définit un ensemble Ω appelé *univers*, contenant les résultats possibles.

Remarque. Ainsi l'univers est juste un ensemble. On dit qu'il *modélise* l'expérience. Ces issues possibles sont aussi appelées les *observables*.

Exemples.

- On jette une pièce, elle tombe sur pile ou face.
  Pour cette expérience aléatoire on choisit $\Omega = \{P, F\}$.
- On lance un dé à six faces numérotées de 1 à 6. On choisit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- On jette trois dés simultanément. On choisit pour univers :
$$\Omega = D^3 \qquad \text{où} \qquad D = \{1, \dots, 6\}$$
- On joue au tiercé, 21 chevaux sont au départ.
  On choisit pour univers l'ensemble des triplets (a, b, c) d'entiers distincts compris entre 1 à 21. Ils sont au nombre de $21 \times 20 \times 19 = 7980$.

Remarque. Le programme de première année est limité au cas où l'univers est fini. Dans ce cas on peut noter :
$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\} \qquad \text{avec} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Définitions

Un *événement* est un sous-ensemble de Ω.

Exemple. On lance trois dés. On définit les événements A : «les trois dés donnent le même numéro», B : «on obtient 421» et C : «la somme des dés est égale à 5». Alors :
$$\begin{aligned}
A &= \{(1,1,1), (2,2,2), (3,3,3), (4,4,4), (5,5,5), (6,6,6)\}\\
B &= \{(1,2,4), (1,4,2), (2,1,4), (2,4,1), (4,1,2), (4,2,1)\}\\
C &= \{(1,1,3), (1,3,1), (3,1,1), (1,2,2), (2,1,2), (2,2,1)\}
\end{aligned}$$

Définitions

- L'événement Ω est dit *certain*.
- L'événement $\varnothing$ est dit *impossible*.
- Si ω est un élément de Ω alors le singleton $\{\omega\}$ est appelé *événement élémentaire*.

Définitions

Si A et B sont deux événements alors :

- $A \cap B$ est l'événement «A et B», il a lieu si A et B ont lieu tous les deux.
- $A \cup B$ est l'événement «A ou B», il a lieu si A ou B a lieu.
- $\overline{A}$ est l'événement *contraire* de A, ou l'événement «non A», il a lieu si et seulement si A n'a pas lieu.
- On note $A - B = A \cap \overline{B}$, cet événement a lieu lorsque A a lieu mais pas B.
- A et B sont *incompatibles* s'ils ne peuvent avoir lieu ensemble, donc si $A \cap B = \varnothing$.
- A et B sont *complémentaires* si $A = \overline{B}$, *i.e.*, $A \cap B = \varnothing$ et $A \cup B = \Omega$.
- On dit que A *implique* B si $A \subseteq B$.

Définition

Un *système complet d'événements* est un ensemble $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ d'événements tel que :

- $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$
- Pour tout $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$, si $i \neq j$ alors $A_i \cap A_j = \varnothing$.

Remarque. On dit aussi que l'ensemble des parties A_i est une *partition* de Ω.

Exemple. Pour tout événement A de Ω, la famille $\left(A, \overline{A}\right)$ est un système complet d'événements.

B. Probabilité

Définition

Une *probabilité* sur un univers fini Ω est une application

Définition

Un *espace probabilisé* fini est un couple (Ω, P) où Ω est un univers fini et P est une probabilité sur Ω.

Propositions

Soit (Ω, P) un espace probabilisé. Alors pour tous événements A et B :

(i) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ *(ii)* $P(\overline{A}) =$ *(iii)* $P(\varnothing) =$

(iv) Si $A \subseteq B$ alors

(v) $P(A - B) =$

(vi) $P(A \cup B) =$

Démonstration.

(i) P est une application de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$ donc pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$: $P(A) \in [0,1]$

(ii) Les événements A et $\overline{A}$ sont incompatibles, et $A \cup \overline{A} = \Omega$.
Par additivité $P(A) + P(\overline{A}) = P(\Omega)$. Comme $P(\Omega) = 1$ alors $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

(iii) Comme $\varnothing = \overline{\Omega}$ alors d'après le point précédent $P(\varnothing) = 1 - P(\Omega) = 0$.

(iv) On note $C = B - A$. Alors $B = A \cup C$ et $A \cap C = \varnothing$, *i.e.*, A et C sont incompatibles.
Par additivité $P(B) = P(A) + P(C)$. Comme $P(C) \geqslant 0$ d'après le point *(i)* alors $P(B) \geqslant P(A)$.

(v) On sait que $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ et $(A - B) \cap (A \cap B) = \varnothing$.
Par additivité $P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$, d'où le résultat.

(vi) On voit que $A \cup B = (A - B) \cup B$ et $(A - B) \cap B = \varnothing$.
Par additivité $P(A \cup B) = P(A - B) + P(B)$, puis grâce au point précédent on obtient le résultat. □

▷ **Exercice 1.**

Propositions

Soit (Ω, P) un espace probabilisé, $(A_1, \dots, A_n)$ une famille d'événements.

(i) (Additivité) Si les A_i sont deux-à-deux incompatibles alors :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

(ii) Dans tous les cas :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Démonstration. On démontre ces propriétés simultanément par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation. Si $n = 1$ les propriétés sont évidentes.

Hérédité. Supposons que les propriétés sont acquises pour un $n > 0$ donné, et considérons une famille d'événements $A_1, \dots, A_{n+1}$.

On note $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$ et $B = A_{n+1}$.

(i) Supposons que les A_i sont deux-à-deux incompatibles. Alors A et B sont incompatibles. En effet par distributivité :

$$A \cap B = (A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cap A_{n+1} = (A_1 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_1 \cap A_{n+1}) = \varnothing.$$

Ainsi l'additivité montre que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, ce qui donne grâce à l'hypothèse de récurrence :

$$P(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + P(A_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i).$$

(ii) Dans le cas général, on sait que :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Comme $P(A \cap B) \geqslant 0$ alors :

$$P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B).$$

Grâce à l'hypothèse de récurrence on obtient le résultat :

$$P(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) = P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B) = P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) + P(A_{n+1}) \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i).$$

Les deux propriétés sont donc vraies au rang $n+1$ si elles sont vraies au rang n.
Conclusion. Par récurrence les deux propriétés sont vraies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. □

Corollaire 1

Soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un système complet d'événements. Alors :

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1.$$

Corollaire 2

Si Ω est un univers fini alors :

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = 1.$$

Proposition

Soit $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ une famille de réels
- positifs,
- tels que $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$,

alors il existe une et une seule probabilité P sur Ω telle que :

$$\forall \omega \in \Omega \qquad P(\{\omega\}) = p_\omega.$$

Cette probabilité est définie par :

$$\forall A \in \mathscr{P}(\Omega) \qquad P(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega.$$

Remarques.

- On retient : *Une probabilité sur un univers fini est entièrement déterminée par les probabilités des événements élémentaires.*
- Une famille $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ de réels positifs de somme égale à 1 est appelée *distribution de probabilité* sur Ω.

  Cette famille peut également être vue comme une application de Ω dans $[0,1]$.

  La proposition ci-dessus signifie que les distributions de probabilités sur Ω correspondent bijectivement aux probabilités sur Ω.

▷ **Exercice 2.**

Définition

Soit Ω un univers fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. On définit alors une probabilité P sur Ω en posant :

$$\forall \omega \in \Omega \qquad P(\{\omega\}) = \frac{1}{n}.$$

Cette probabilité est appelée *probabilité uniforme* sur Ω.

On dit également qu'il y a *équiprobabilité* sur Ω.

Proposition

Si Ω est muni de la probabilité uniforme alors pour tout événement A :

$$P(A) = \frac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card} \Omega}$$

Exemple 1. On possède un sac contenant 100 jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 à 100. On pioche un jeton dans ce sac.

Quelle est la probabilité d'obtenir un multiple de 3 ?

C. Utilisation du dénombrement

Cadre

- Les résultats de cette partie ne seront utilisés que sur un univers muni de la probabilité uniforme.
- On note E un ensemble à n éléments ($n \in \mathbb{N}^*$).

  On rappelle qu'une k-*liste* est un k-uplet d'éléments de E.

Résumé

- Le nombre de k-listes d'éléments de E est :
- Le nombre de k-listes d'éléments distincts de E est :
- Le nombre de parties à k éléments de E est :

1. Listes

Exemple 2. Pour une course de 21 chevaux, quelle est la probabilité que le cheval n°13 arrive dans le tiercé de tête ?

Exemple 3. On possède une urne contenant 10 boules numérotées de 1 à 10.

Trois fois de suite on pioche une boule, on note le numéro obtenu et on la remet dans l'urne.

a. Donner un espace probabilisé modélisant cette expérience.

b. Calculer la probabilité des événements :
   - A : «On obtient uniquement des 10.»
   - B : «On n'obtient jamais le 10.»
   - C : «On obtient au moins une fois le 10.»
   - D : «On obtient exactement une fois le 10.»

▷ **Exercice 3.**

Exemple 4. On jette simultanément deux dés.

Soit X la variable aléatoire égale à la somme des deux dés, c'est à dire que pour tout entier k l'événement $(X = k)$ est l'événement "la somme des deux dés est égale à k".

Déterminer les probabilités des événements $(X = k)$ pour $k = 1, 2, 3, 4, 7$.

▷ **Exercice 4.**

Exemple 5.

On possède un sac contenant n jetons indiscernables numérotés de 1 à n ($n \in \mathbb{N}^*$).

On pioche les jetons un par un dans ce sac. Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$ on note :

- A_k : le jeton 1 est pioché au k-ème tirage.
- B_k : le jeton 2 est pioché au k-ème tirage.
- C_k : le jeton 2 est pioché au k-ème tirage, le jeton 1 est pioché avant.
- C : le jeton 2 est pioché après le jeton 1.

a. Calculer les probabilités des événements A_k et B_k.

b. On suppose que $1 \leqslant j < k \leqslant n$. Calculer la probabilité de l'événement $A_j \cap B_k$.

c. En déduire la probabilité de l'événement C_k.

d. En déduire la probabilité de l'événement C.

▷ **Exercice 5.**

2. Combinaisons

Exemple 6. On pioche simultanément 4 boules d'une urne contenant 14 boules : 5 boules blanches, 3 boules noires et 6 boules rouges.

Calculer la probabilité des événements :

- A : On obtient 4 boules rouges.
- B : On obtient 2 rouges, une noire et une blanche.
- C : On obtient au moins une boule noire.
- D : On obtient au moins une noire et une blanche.

Proposition (Schéma hypergéométrique)

Soit $\mathcal{U}$ un ensemble de N objets, dont a ont la propriété A.
On pioche simultanément n objets dans cet ensemble ($0 \leqslant n \leqslant N$).
Soit k un entier.
La probabilité d'obtenir exactement k objets dotés de la propriété A est :

Remarque. Cette probabilité est non-nulle si :

$$\text{Max}\,\{0, n + a - N\} \leqslant k \leqslant \text{Min}\,\{a,n\}$$

▷ **Exercice 6.**

Exemple 7. Le Poker se joue avec un jeu de 52 cartes, réparties en 4 couleurs (pique, cœur, carreau et trèfle) et 13 valeurs (as, roi, dame, valet, de 10 à 2).

Chaque joueur reçoit une *main* de cinq cartes.

a. Déterminer le nombre de mains possibles.
b. Quelle est la probabilité d'avoir dans sa main un Poker (4 cartes de même valeur) ? Une suite (5 cartes qui se suivent) ?

On peut compter de la même façon la probabilité d'obtenir une paire (deux cartes de même valeur), deux paires, un brelan (trois cartes de même valeur), une couleur (cinq cartes de même couleur), un full (un brelan et une paire).

▷ **Exercice 7.**

II. Probabilités conditionnelles

A. Définition

Définition

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et A un événement de probabilité non-nulle. Pour tout $B \subseteq \Omega$ on note :

Ce réel est appelé *probabilité de B sachant A*.

Proposition

P_A est une probabilité sur Ω.

Définition

On dit que P_A est une *probabilité conditionnelle*.

Plus précisément c'est la *probabilité conditionnée par A*.

Remarque. Les propriétés d'une probabilité donnent des formules comme :

- $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$
- Si $C \subseteq B$ alors : $P_A(C) \leqslant P_A(B)$
- Si $(B_1, \ldots, B_n)$ est un système complet d'événements alors : $\sum_{i=1}^{n} P_A(B_i) = 1$

Démonstration.

▷ **Exercice 8.**

B. Propriétés

Proposition

Soit A et B deux événements de probabilités non-nulles. Alors :

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = P_B(A)P(B)$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser la définition des probabilités conditionnelles :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad \text{et} \qquad P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad \square$$

Théorème : Formule des probabilités composées

Soit n un entier naturel non-nul, et $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille d'événements telle que $P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$ est non-nulle. Alors :

Démonstration.

▷ **Exercice 9.**

Remarque. Lien avec les arbres de probabilités.

Théorème : Formule des probabilités totales

Soit $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ un système complet d'événements de probabilités non-nulles. Alors pour tout événement B :

Exemple. Soit A un événement ni impossible, ni certain. Alors pour tout événement B :

$$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)$$

Démonstration.

Exemple 8. On possède un dé et une pièce. On jette le dé. Si on obtient le chiffre k alors on jette k fois la pièce. Quelle est la probabilité de n'obtenir que des Piles ?

Remarque. Lien avec les arbres de probabilités.

Théorème : inversion cause-effet

Soit A et B deux événements de probabilités non-nulles. Alors :

Démonstration.

Remarque : Formule de Bayes. En combinant les deux formules précédentes, on obtient la proposition suivante.

Soit $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ un système complet d'événements de probabilités non-nulles et B un événement de probabilité non-nulle. Alors pour tout $k \in \{1,\ldots,n\}$:

$$P_B(A_k) = \frac{P_{A_k}(B)P(A_k)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B)P(A_i)}$$

Exemple 8 (suite). On n'a obtenu que des Piles. Quelle est la probabilité que le dé ait donné k ?

▷ **Exercice 10.**

C. Événements indépendants

Définition

Deux événements A et B sont dits *indépendants* pour la probabilité P si :

Proposition

On suppose que A est de probabilité non-nulle.
Dans ce cas A et B sont indépendants si et seulement si :

▷ **Exercice 11.**

Exemple 9. Une urne contient $n \geqslant 2$ boules dont a sont noires et les autres sont blanches. On pioche deux boules de suite dans cette urne, sans remise. On note A l'événement «la première boule est noire» et B l'événement «la seconde boule est noire».

a. Calculer $P(A)$, $P(B)$, puis $P(A \cap B)$.

b. A et B sont-ils indépendants ?

▷ **Exercice 12.**

Définition

Des événements $A_1, \dots, A_n$ sont *mutuellement indépendants* si pour tous entiers $i_1 \dots i_m$ tels que $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_m \leqslant n$:

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_m}) = P(A_{i_1}) \times \cdots \times P(A_{i_m}).$$

Exemple. On jette n fois un dé, et on note A_i l'événement : le tirage i donne un 6. Alors les événements $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants.

Remarques.

- (Autre écriture) Soit $I = \{1, \dots, n\}$. Les A_i sont mutuellement indépendants si
$$\forall J \subseteq I \qquad P\Big(\bigcap_{j \in J} A_j\Big) = \prod_{j \in J} P(A_j).$$
- L'indépendance mutuelle a lieu dès que l'on répète des expériences identiques et indépendantes.
- L'indépendance des A_i deux-à-deux n'implique pas leur indépendance mutuelle.

▷ **Exercice 13.**

III. Variables aléatoires

A. Définitions

Définition

Soit Ω un univers fini et E un ensemble.

Une *variable aléatoire* sur Ω à valeurs dans E est une fonction de Ω dans E.

Si X est une variable aléatoire alors $X(\Omega)$ est l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre.

Une *variable aléatoire réelle* est une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Une variable aléatoire réelle est *entière* si $X(\Omega) \subseteq \mathbb{Z}$.

Notations

Soit X une variable aléatoire réelle. On note :

- $X = x$ l'événement $X^{-1}(\{x\})$ où x est un réel
- $X \leqslant x$ l'événement $X^{-1}(]-\infty, x])$
- $a \leqslant X \leqslant b$ l'événement $X^{-1}([a, b])$ où a et b sont deux réels
- $X \in A$ l'événement $X^{-1}(A)$ où A est une partie de $\mathbb{R}$
- etc.

Proposition

L'ensemble $\{(X = x) \mid x \in X(\Omega)\}$ est un système complet d'événements.

Démonstration. Tout élément ω de Ω admet une image $x = X(\omega)$ dans $X(\Omega)$, donc appartient à l'événement $(X = x)$. Ceci montre que $\Omega = \bigcup_{x \in X(\Omega)} (X = x)$.

Si x et y sont deux éléments distincts de $X(\Omega)$, alors $(X = x) \cap (X = y) = \varnothing$ car si un élément ω était dans cette intersection alors on aurait $X(\omega) = x$ et $X(\omega) = y$. $\square$

Remarques.

- L'événement $(X = x)$ est l'ensemble des éléments ω de Ω tels que $X(\omega) = x$, donc il existe plusieurs façons d'écrire cette partition :
$$\Omega = \bigcup_{x \in X(\Omega)} (X = x) = \bigcup_{x \in X(\Omega)} X^{-1}(\{x\}) = \bigcup_{x \in X(\Omega)} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}.$$
- Plus généralement, si $f : E \to F$ est une application surjective alors la famille $\{f^{-1}(\{y\}) \mid y \in F\}$ est une partition de E.

Définition

Une *loi de probabilité* de X est une application $P_X : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ vérifiant :

Remarques.

- Si $P : \mathscr{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ est une probabilité sur Ω alors l'application $x \mapsto P(X = x)$ est une loi de probabilité de X.

  On notera généralement $P(X = x)$ au lieu de $P_X(x)$.
- Si $p : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ est une loi de probabilité de X alors :

$$\forall x \in E \qquad 0 \leqslant p(x) \leqslant 1.$$

  Ceci car tous les $p(x)$ sont positifs et leur somme est égale à 1, donc ils sont tous inférieurs ou égaux à 1 :

$$1 - p(x) = \sum_{\substack{y \in X(\Omega) \\ y \neq x}} p(y) \geqslant 0.$$

- Notons $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Alors une loi de probabilité de X est une application $x_i \mapsto p_i$ où les p_i sont des éléments de $[0, 1]$ dont la somme est égale à 1.

▷ **Exercice 14.**

Définition

La fonction $x \mapsto P(X \leqslant x)$ est appelée *fonction de répartition* de X.

Remarque. La fonction de répartition permet de retrouver la loi de X.

Par exemple si X est entière alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$P(X = k) =$$

▷ **Exercice 15.**

B. Espérance, variance, écart-type

Définitions

Soit X une variable aléatoire réelle sur un univers fini.

- L'*espérance mathématique* de X est le réel :

- La *variance* de X est l'espérance de la variable aléatoire $(X - E(X))^2$:

- L'*écart-type* de X est la racine carrée de la variance :

Remarques.

- L'espérance mathématique correspond à la *moyenne* d'une série statistique.
  C'est la valeur moyenne de X sur un grand nombre d'expériences.
- La variance et l'écart type sont des paramètres de dispersion. Plus ils sont grands, plus la variable aléatoire X peut être éloignée de son espérance. On constate en général que
  - Dans 60% des cas X est dans l'intervalle $[E(X) - \sigma(X), E(X) + \sigma(X)]$.
  - Dans 95% des cas X est dans l'intervalle $[E(X) - 2\sigma(X), E(X) + 2\sigma(X)]$.
- Si X a une unité, alors $E(X)$ et $\sigma(X)$ ont également cette unité.

▷ **Exercice 16.**

Définition alternative de l'espérance

Soit X une variable aléatoire sur un univers fini. Alors l'espérance de X est :

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})$$

<u>Démonstration</u>. L'écriture $(X = x) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$ donne :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x) = \sum_{x \in X(\Omega)} \left(x \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) = x}} P(\{\omega\}) \right).$$

On en déduit :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) = x}} x P(\{\omega\}) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{\omega \in X^{-1}(\{x\})} X(\omega) P(\{\omega\}).$$

L'ensemble des $X^{-1}(\{x\})$ pour x parcourant $X(\Omega)$ est une partition de Ω donc :

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\}).$$ □

C. Propriétés

Théorème de transfert

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers fini Ω. Soit f une fonction de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. Alors :

Remarque. Si $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ est une fonction alors $Y = f(X)$ est une variable aléatoire réelle sur Ω.

De plus $Y(\Omega) = f(X(\Omega))$, et si P_X est une loi de probabilité de X alors on obtient une loi de probabilité P_Y de Y en posant pour tout $y \in Y(\Omega)$:

$$P_Y(y) = P_X(f^{-1}(\{y\})) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega)\\ f(x)=y}} P_X(x).$$

On écrit plutôt : $\quad P(Y = y) = P(X \in f^{-1}(\{y\})) = \displaystyle\sum_{\substack{x \in X(\Omega)\\ f(x)=y}} P(X = x)$

Exemple. Dans le cas où $f(x) = x^2$: $\quad P(X^2 = 4) = P(X = 2) + P(X = -2)$

Démonstration. En notant $Y = f(X)$:

$$E(Y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} yP(Y = y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \left(\sum_{\substack{x \in X(\Omega)\\ f(x)=y}} yP(X = x) \right) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x).$$

Il s'agit bien du résultat que l'on voulait démontrer. □

Corollaire

Soit a et b deux réels. Alors :

Démonstration pour l'espérance.

▷ **Exercice 17.**

Exemple. La variable aléatoire $Y = X - E(X)$ est dite *centrée*, elle vérifie :

$E(Y) =$ $V(Y) =$

La variable aléatoire $T = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est dite *centrée réduite*, elle vérifie :

$E(T) =$ $\sigma(T) =$

Proposition (Formule de König-Huyghens)

Johann Samuel König (ou Kœnig), Allemagne, 1712 – 1757,
Christian Huygens (ou Huyghens), Hollande, 1629 – 1695.

Pour toute variable aléatoire X sur un univers fini Ω :

Remarque. On utilise le théorème de transfert pour calculer $E(X^2)$:

Démonstration.

▷ **Exercices 18, 19.**