Feuille de T. D. C1
Probabilités

Exercices de cours

1 Soit A, B, C trois événements. Déterminer la probabilité de $A \cup B \cup C$ en fonction des probabilités des événements A, B, C et de leurs intersections.

2 Un dé est truqué : la probabilité que l'entier $k \in \{1, \dots, 6\}$ apparaisse est proportionnelle à k.
Donner un espace probabilisé modélisant le lancer de ce dé, puis calculer la probabilité qu'on obtienne un résultat pair.

3 On possède une urne contenant 10 boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 10.
Trois fois de suite on pioche une boule, on note le numéro obtenu et on garde la boule.

a. Donner un espace probabilisé modélisant cette expérience.

b. Calculer la probabilité des événements :
- B : «On n'obtient jamais le 10.»
- C : «On obtient au moins une fois le 10.»
- D : «On obtient le 10 lors du troisième tirage.»

4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On jette n fois une pièce équilibrée.

a. Donner un espace probabilisé modélisant cette expérience.

b. Calculer la probabilité des événements :
- A : «On obtient uniquement des piles.»
- B : «On obtient aucun pile.»
- C : «On obtient au moins un pile.»
- D : «On obtient une et une seule fois pile.»

5 On jette deux fois de suite une pièce de monnaie équilibrée.

a. Quelle est la probabilité que l'on obtienne au moins un pile ? Deux piles ?

b. Quelle est la probabilité que l'on obtienne deux piles sachant que l'on en a obtenu au moins un ?

c. Quelle est la probabilité que l'on obtienne deux piles sachant que le premier tirage a donné un pile ?

6 On pioche des lettres une par une dans un sac contenant les 26 lettres de l'alphabet, sans les remettre. Pour tout $k \in \{0, \dots, 26\}$ on note T_k l'événement : «le S apparaît au tirage k».

a. Pour tout $i \in \{1, \dots, 26\}$ calculer directement $P_{\overline{T_1} \cap \dots \cap \overline{T_{i-1}}}(\overline{T_i})$.

b. En déduire la probabilité de l'événement S_k : «le S apparaît lors de l'un des k tirages».

7 On possède un sac avec n jetons numérotés de 1 à n, et n urnes $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$ contenant chacune k boules blanches et $n-k$ boules noires.
On pioche un jeton dans le sac. On obtient un numéro k. On pioche ensuite une boule dans l'urne $\mathcal{U}_k$.

a. Quelle est la probabilité que la boule obtenue soit blanche ?

b. La boule obtenue est blanche. Quelle est la probabilité, pour $k \in \{1, \dots, n\}$, qu'elle provienne de l'urne $\mathcal{U}_k$?

8 Démontrer que A et B sont indépendants si et seulement si A et $\overline{B}$ sont indépendants, si et seulement si $\overline{A}$ et B sont indépendants, si et seulement si $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

9 Un jeu de 52 cartes possède 13 cœurs et 4 dames dont la dame de cœur.

On pioche une carte dans ce jeu. On note A et B les événements «on obtient un cœur» et «on obtient une dame». Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Et si on enlève le roi de trèfle du jeu ?

10 On réalise l'expérience consistant à jeter deux dés, un rouge et un bleu, et on définit les événements

A : Le dé rouge donne 6 B : Le dé bleu donne 6 C : La somme des deux dés est égale à 7.

Vérifier que A, B, C sont deux-à-deux indépendants, mais ne sont pas mutuellement indépendants.

11 On jette deux dés et on note X la variable aléatoire égale au plus grand numéro obtenu.

a. Déterminer $X(\Omega)$ puis $P(X \leqslant k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.

b. En déduire la loi de X.

c. Calculer l'espérance de X.

12 Soit X une variable aléatoire finie à valeurs dans $\mathbb{N}$, et soit $n = \max X(\Omega)$.

Démontrer que : $\displaystyle E(X) = \sum_{k=1}^{n} P(X \geqslant k)$.

13 Démontrer la formule donnant $V(aX + b)$ en fonction de $V(X)$, a et b.

14 Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega)$ est un singleton : $X(\Omega) = \{b\}$ avec $b \in \mathbb{R}$.

Déterminer la loi de X, son espérance, sa variance et son écart-type.

15 On pioche une boule dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, et on note X le numéro obtenu.

a. Déterminer la loi de X.

b. Calculer son espérance, sa variance et son écart-type.

Travaux dirigés

1 Soit A, B, C trois événements d'un univers Ω. Décrire en terme d'ensembles les événements :

a. Au moins un des événements A, B, C se réalise.

b. A, B, C se réalisent tous les trois.

c. A, B, C ne se réalisent pas tous.

d. Aucun des trois événements A, B, C ne se réalise.

e. A se réalise mais ni B ni C ne se réalisent.

f. A ne se réalise pas mais l'un des deux autres au moins se réalise.

g. Un seulement parmi A et B se réalise.

2 Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé (Ω, P). Simplifier :

$$P(A \cup B) + P(\overline{A} \cup B) + P(A \cup \overline{B}) + P(\overline{A} \cup \overline{B})$$

3 Soit n un entier strictement positif et $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ un système complet d'événements. On suppose que pour tout $k \in \{2, \ldots, n\}$ la probabilité de l'événement A_k est la moitié de celle de l'événement A_{k-1}.

a. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, calculer $P(A_k)$ en fonction de n et k.

b. On pose $B_k = \bigcup_{i=k}^{n} A_i$. Déterminer $P(B_k)$.

4 Une urne contient une boule rouge, une boule bleue et une boule jaune. On tire plusieurs fois une boule de l'urne, en la remettant à chaque fois. On cherche la probabilité que l'on obtienne les trois couleurs en n tirages ($n \in \mathbb{N}^*$).

a. Dans cette question on fixe n et on note R (respectivement B, J) l'événement «on obtient au moins une boule rouge (respectivement bleue, jaune) en n tirages».

  (i) Calculer $P(\overline{R})$, $P(\overline{B})$ et $P(\overline{J})$, puis $P(\overline{R} \cap \overline{B})$, $P(\overline{R} \cap \overline{J})$, $P(\overline{B} \cap \overline{J})$, et $P(\overline{R} \cap \overline{B} \cap \overline{J})$.

  (ii) En déduire $P(\overline{R} \cup \overline{B} \cup \overline{J})$.

b. Soit A_n l'événement «lors des n tirages, toutes les couleurs ont été obtenues». Calculer $P(A_n)$.

c. Vérifier la formule obtenue pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

$\boxed{5}$ La probabilité de gagner au Loto est de $\frac{1}{N}$ où N est un entier naturel.

a. En jouant N fois au Loto, quelle est la probabilité de gagner au moins une fois ?

b. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} (1-x)^{\frac{1}{x}}$ et en déduire une approximation de la probabilité précédente si N est grand.

$\boxed{6}$ Au cours d'un procès deux jurés déclarent un accusé coupable ou non coupable. On suppose que :

- La probabilité que l'accusé soit coupable est de 60%.
- S'il est coupable alors la probabilité que chaque juré le déclare coupable est de 70%, et ceci indépendamment l'un de l'autre.
- Si l'accusé n'est pas coupable, la probabilité que chaque juré le déclare coupable est de 20%, indépendamment l'un de l'autre.

Attention : des événements peuvent être indépendants pour une certaine probabilité mais par pour une autre.

a. Calculer la probabilité que chaque juré déclare l'accusé coupable.

b. Calculer la probabilité que les deux jurés déclarent l'accusé coupable.

c. Les événements «le premier juré déclare l'accusé coupable» et «le second juré déclare l'accusé coupable» sont-ils indépendants ?

d. Calculer la probabilité que l'accusé soit non coupable s'il est déclaré coupable par les deux jurés.

$\boxed{7}$ On évalue un test permettant de détecter la présence d'un certain gène chez un patient.

La probabilité que ce test indique l'absence du gène alors qu'il est présent est $\alpha = \frac{1}{500}$.

La probabilité qu'il indique la présence de gène alors qu'il est absent est $\beta = \frac{1}{100}$.

On note λ la proportion de la population possédant le gène recherché.

a. Quelle est la fiabilité du test, c'est-à-dire la probabilité qu'il renvoie le bon résultat ?

b. Une personne est détectée positive au test. Quelle est la probabilité qu'elle possède le gène ?

$\boxed{8}$ Alphonse essaie de ne pas fumer tous les jours. S'il ne fume pas un certain jour, alors il a une chance sur trois de fumer le lendemain. Par contre s'il fume un certain jour, alors il n'a qu'une chance sur six de fumer le lendemain.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'événement «Alphonse fume le jour n». On suppose que le jour 0 il a fumé. On note u_n la probabilité de A_n.

a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

b. En déduire l'expression générale de u_n. Interpréter la limite de la suite (u_n).

$\boxed{9}$ Aldo, Bob et Charlier jouent au frisbee. Lorsque Aldo ou Bob a le frisbee, il l'envoie deux fois sur trois à Charlie, et sinon à l'autre joueur, et lorsque Charlie a le frisbee il l'envoie deux fois sur trois à Aldo et une fois sur trois à Bob.

On note A_n, B_n, C_n les événements «Aldo a le frisbee», «Bob a le frisbee» et «Charlie a le frisbee» à l'instant n. Soit $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$, $c_n = P(C_n)$, et $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

a. Exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n, et c_n. Déterminer la matrice A telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $X_{n+1} = AX_n$.

b. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}$. Calculer $D = P^{-1}AP$, puis D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer X_n en fonction de X_0, D, P et n. En déduire les termes généraux de a_n, b_n et c_n, sachant qu'Aldo a le frisbee au début du jeu.
Calculer les limites de a_n, b_n et c_n.

10 Une urne contient 9 boules blanches et 1 boule noire. On effectue des tirages successifs dans l'urne. À chaque tirage, si on obtient une boule blanche alors on la remet dans l'urne et on ajoute une boule blanche de plus.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note B_k l'événement «une boule blanche apparaît au tirage k» et N_k l'événement «la boule noire apparaît pour la première fois au tirage k».

a. Combien a-t-on de boules dans l'urne après $k-1$ tirages si on n'a obtenu que des boules blanches ?

b. Justifier que $N_k = B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap N_k$. En déduire $P(N_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

c. Simplifier la somme $\frac{1}{8+k} - \frac{1}{9+k}$. En déduire la probabilité p_n de $\bigcup\limits_{k=1}^{n} N_k$. Interpréter la limite de p_n.

11 Aldo et Bob jouent avec un dé. À chaque tour Aldo jette le dé, puis Bob jette le dé. Le premier qui obtient 6 gagne la partie.

On utilisera les événements X_k : «Aldo obtient 6 lors de son k-ème tirage» et Y_k : «Bob obtient 6 lors de son k-ème tirage».

a. Soit k un entier naturel non-nul. Calculer la probabilité des événements A_k : «Aldo gagne la partie au k-ème tour» et B_k : «Bob gagne la partie au k-ème tour».

b. Quelle est la probabilité qu'Aldo gagne la partie durant les n premiers tours ? Que Bob gagne la partie durant les n premiers tours ? Interpréter les limites de ces deux probabilités lorsque n tend vers $+\infty$.

c. On note A l'événement «Aldo gagne la partie» et B l'événement «Bob gagne la partie». On admet que $P(A \cup B) = 1$.
Justifier que $P_{\overline{X_1}}(B) = P(A)$, et en déduire les valeurs de $P(A)$ et de $P(B)$.

12 Une urne contient 1 jeton marqué 1, 2 jetons marqués 2, et ainsi de suite jusqu'à n jetons marqués n. On tire un jeton dans l'urne. Soit X la variable aléatoire égale au numéro obtenu.

a. Déterminer la loi de X et vérifier que l'on obtient bien une loi de probabilité.

b. Calculer l'espérance et la variance de X.

c. On suppose que $n = 25$, et on note $m = E(X)$, $\sigma = \sigma(X)$. Quelle est la probabilité que X soit dans l'intervalle $[m - \sigma, m + \sigma]$? Dans l'intervalle $[m - 2\sigma, m + 2\sigma]$?

13 Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, avec $n \geqslant 1$. On tire une boule de l'urne, on la remet puis on en tire une seconde. On note X la variable aléatoire égale au plus petit numéro obtenu.

a. Déterminer $X(\Omega)$, puis pour tout $k \in X(\Omega)$ la probabilité $P(X > k)$.

b. En déduire la loi de X. Vérifier que l'on obtient bien une loi de probabilité.

c. Calculer l'espérance de X.

d. Répondre de nouveau aux questions précédentes en supposant que $n \geqslant 2$ et que l'on tire les deux boules sans remise.