

TD. C1 Probabilités

Exercices de cours

- ① Soit A, B, C trois événements. Déterminer la probabilité de $A \cup B \cup C$ en fonction des probabilités des événements A, B, C et de leurs intersections.
- ② Un dé est truqué : la probabilité que l'entier $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$ apparaisse est proportionnelle à k .
Donner un espace probabilisé modélisant le lancer de ce dé, puis calculer la probabilité qu'on obtienne un résultat pair.
- ③ On possède une urne contenant 10 boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 10.
Trois fois de suite on pioche une boule, on note le numéro obtenu et on garde la boule.
- a. Donner un espace probabilisé modélisant cette expérience.
- b. Calculer la probabilité des événements :
- B : «On n'obtient jamais le 10.»
 - C : «On obtient au moins une fois le 10.»
 - D : «On obtient le 10 lors du troisième tirage.»
- ④ On jette trois dés. On note X la variable aléatoire égale à la somme des trois dés.
Calculer $P(X = k)$ pour $k = 2, 3, 4, 5, 6, 10$.
- ⑤ Soit $k \in \llbracket 0, 26 \rrbracket$. On pioche k lettres une par une dans un sac contenant les 26 lettres de l'alphabet.
- a. Décrire l'univers modélisant cette expérience. Quel est son cardinal ?
On note S_k l'événement : «le S apparaît lors de l'un des k tirages» et T_k l'événement «le S apparaît lors du k -ème tirage».
- b. Calculer la probabilité de S_k .
Exprimer T_k en fonction de S_k et S_{k-1} et en déduire sa probabilité.
- c. Autre méthode : Calculer directement la probabilité de T_k .
Exprimer S_k en fonction des T_i et en déduire sa probabilité.
- ⑥ Une urne contient une boule noire, deux boules rouges et sept boules blanches.
- a. On pioche simultanément n boules de l'urne ($0 \leq n \leq 10$). Quelle est la probabilité d'obtenir la boule noire ? Au moins une rouge ?
- b. On pioche n fois de suite une boule de l'urne ($n \in \mathbb{N}$) puis on la remet dans l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir la boule noire ? Au moins une rouge ?
- ⑦ Quelle est la probabilité en piochant cinq cartes d'un jeu de Poker d'obtenir un brelan qui n'est ni un full ni un carré ? D'obtenir deux paires mais pas de full ?
On rappelle que le Poker se joue avec un jeu de 52 cartes, réparties en 4 couleurs et 13 valeurs. Une paire est un ensemble de deux cartes de même valeur, un brelan est un ensemble de trois cartes de même valeur, un full est l'union d'un brelan et d'une paire.
- ⑧ On jette deux fois de suite une pièce de monnaie équilibrée.
Quelle est la probabilité que l'on obtienne deux piles sachant que l'on en a obtenu au moins un ?
- ⑨ On pioche des lettres une par une dans un sac contenant les 26 lettres de l'alphabet, sans les remettre.
Pour tout $k \in \llbracket 0, 26 \rrbracket$ on note T_k l'événement : «le S apparaît au tirage k ».
- a. Pour tout $i \in \llbracket 1, 26 \rrbracket$ calculer directement $P_{T_1 \cap \dots \cap T_{i-1}}(\overline{T_i})$.
- b. En déduire la probabilité de l'événement S_k : «le S apparaît lors de l'un des k tirages».

10 On possède un sac avec n jetons numérotés de 1 à n , et n urnes $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$ contenant chacune k boules blanches et $n - k$ boules noires.

On pioche un jeton dans le sac. On obtient un numéro k . On pioche ensuite une boule dans l'urne \mathcal{U}_k .

- Quelle est la probabilité que la boule obtenue soit blanche ?
- La boule obtenue est blanche. Quelle est la probabilité, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, qu'elle provienne de l'urne \mathcal{U}_k ?

11 Démontrer que A et B sont indépendants si et seulement si A et \bar{B} sont indépendants, si et seulement si \bar{A} et B sont indépendants, si et seulement si \bar{A} et \bar{B} sont indépendants.

12 Un jeu de 52 cartes possède 13 cœurs et 4 dames dont la dame de cœur.

On pioche une carte dans ce jeu. On note A et B les événements «on obtient un cœur» et «on obtient une dame». Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Et si on enlève le roi de trèfle du jeu ?

13 On réalise l'expérience consistant à jeter deux dés, un rouge et un bleu, et on définit les événements

A : Le dé rouge donne 6 B : Le dé bleu donne 6 C : La somme des deux dés est égale à 7.

Vérifier que A, B, C sont deux-à-deux indépendants, mais ne sont pas mutuellement indépendants.

14 On jette trois dés. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de six obtenus.

- Déterminer la loi de X .
- Vérifier que l'on obtient bien une loi de probabilité de X .

15 On jette deux dés et on note X la variable aléatoire égale au plus grand numéro obtenu.

- Déterminer $X(\Omega)$ puis $P(X \leq k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.
- En déduire la loi de X .
- Calculer l'espérance de X .

16 Soit X une variable aléatoire finie à valeurs dans \mathbb{N} , et soit $n = \max X(\Omega)$.

Démontrer que : $E(X) = \sum_{k=1}^n P(X \geq k)$.

17 Démontrer la formule donnant $V(aX + b)$ en fonction de $V(X)$, a et b .

18 Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega)$ est un singleton : $X(\Omega) = \{b\}$ avec $b \in \mathbb{R}$.

Déterminer la loi de X , son espérance, sa variance et son écart-type.

19 On pioche une boule dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n , et on note X le numéro obtenu.

Déterminer la loi de X . Calculer son espérance, sa variance et son écart-type.

Travaux dirigés

1 Soit A, B, C trois événements d'un univers Ω . Décrire en terme d'ensembles les événements :

- | | |
|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> Au moins un des événements A, B, C se réalise. A, B, C se réalisent tous les trois. A, B, C ne se réalisent pas tous. Aucun des trois événements A, B, C ne se réalise. | <ol style="list-style-type: none"> A se réalise mais ni B ni C ne se réalisent. A ne se réalise pas mais l'un des deux autres au moins se réalise. Un seulement parmi A et B se réalise. |
|--|---|

2 Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé (Ω, P) . Simplifier :

$$P(A \cup B) + P(\bar{A} \cup B) + P(A \cup \bar{B}) + P(\bar{A} \cup \bar{B})$$

3 Une urne contient une boule rouge, une boule bleue et une boule jaune. On tire plusieurs fois une boule de l'urne, en la remettant à chaque fois. On cherche la probabilité que l'on obtienne les trois couleurs en n tirages ($n \in \mathbb{N}^*$).

a. Dans cette question on fixe n et on note R (respectivement B, J) l'événement «on obtient au moins une boule rouge (respectivement bleue, jaune) en n tirages».

(i) Calculer $P(\bar{R})$, $P(\bar{B})$ et $P(\bar{J})$, puis $P(\bar{R} \cap \bar{B})$, $P(\bar{R} \cap \bar{J})$, $P(\bar{B} \cap \bar{J})$, et $P(\bar{R} \cap \bar{B} \cap \bar{J})$.

(ii) En déduire $P(\bar{R} \cup \bar{B} \cup \bar{J})$.

b. Soit A_n l'événement «lors des n tirages, toutes les couleurs ont été obtenues». Calculer $P(A_n)$.

c. Vérifier la formule obtenue pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

4 Une urne contient 8 boules bleues et 4 boules rouges.

a. On tire simultanément deux boules de l'urne. Quelle est la probabilité de tirer deux bleues? Deux rouges? Une boule de chaque couleur?

b. On tire trois boules maintenant. Quelle est la probabilité de tirer trois boules bleues? Trois boules rouges? Au moins une boule bleue et une boule rouge? Exactement une boule bleue?

5 La probabilité de gagner au Loto est de $\frac{1}{N}$ où N est un entier naturel.

a. En jouant N fois au Loto, quelle est la probabilité de gagner au moins une fois?

b. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}}$ et en déduire une approximation de la probabilité précédente si N est grand.

6 On possède un jeu de $2n$ cartes ($n \geq 1$) composé de n paires d'animaux.

a. Quelle est la probabilité d'obtenir une paire si on pioche deux cartes dans ce jeu?

b. Et si on en pioche trois (avec $n \geq 2$)?

7 Combien faut-il piocher de cartes dans un jeu de 52 cartes pour avoir au moins une chance sur deux d'obtenir l'as de pique :

a. si on pioche les cartes successivement en les gardant?

b. si on les pioche en les remettant après chaque tirage?

8 On pioche deux jetons au hasard dans un sac contenant 10 jetons numérotés de 1 à 10. Soit p la probabilité que la somme des deux numéros obtenus soit paire.

a. Calculer p si les deux tirages sont simultanés.

b. Calculer p si les deux tirages sont successifs avec remise entre les deux.

c. Répondre aux mêmes questions en supposant que le sac contient 11 jetons numérotés de 1 à 11.

9 Soit $k \in \llbracket 1, 26 \rrbracket$. On pioche simultanément k lettres d'un sac contenant les 26 lettres de l'alphabet.

a. Calculer la probabilité que l'on obtienne le A, puis celle que l'on obtienne le B, et enfin celle que l'on obtienne le A et le B.

b. Les événements «obtenir le A» et «obtenir le B» sont-ils indépendants?

c. Calculer la probabilité que l'on obtienne le B sachant que l'on a obtenu le A.

d. Soit $k \in \llbracket 1, 26 \rrbracket$. Calculer la probabilité que l'on obtienne le B sachant que l'on n'a pas obtenu le A.

10 On possède un sac contenant n jetons numérotés de 1 à n (avec $n \geq 2$). On pioche un jeton, on note son numéro k , puis on le remet dans le sac. On pioche ensuite simultanément k jetons dans le sac.

a. Soit i un entier compris entre 1 et n . Quelle est la probabilité que le jeton numéro i soit obtenu au second tirage?

b. Soit i et j deux entiers distincts compris entre 1 et n . Quelle est la probabilité que les jetons i et j soient présents parmi les jetons tirés au second tirage?

11 Une urne contient 1 boule d'or, 2 boules d'argent et 7 boules de bronze, toutes indiscernables au toucher et à la pesée. On pioche ces dix boules une par une, sans les remettre. On souhaite calculer la probabilité de l'événement B : «la boule d'or arrive avant les boules d'argent».

a. Modéliser cette expérience par un univers Ω uniformément probabilisé. Donner son cardinal.

b. Soit $k \in \llbracket 1, 10 \rrbracket$. Calculer la probabilité de l'événement A_k : «la boule d'or est tirée au k -ème tirage».

c. Calculer les probabilités des événements $A_k \cap B$.

d. En déduire la probabilité de l'événement B .

12 Au cours d'un procès deux jurés déclarent un accusé coupable ou non coupable. On suppose que :

- La probabilité que l'accusé soit coupable est de 60%.
- S'il est coupable alors la probabilité que chaque juré le déclare coupable est de 70%, et ceci indépendamment l'un de l'autre.
- Si l'accusé n'est pas coupable, la probabilité que chaque juré le déclare coupable est de 20%, indépendamment l'un de l'autre.

Attention : des événements peuvent être indépendants pour une certaine probabilité mais pas pour une autre.

- a. Calculer la probabilité que chaque juré déclare l'accusé coupable.
- b. Calculer la probabilité que les deux jurés déclarent l'accusé coupable.
- c. Les événements «le premier juré déclare l'accusé coupable» et «le second juré déclare l'accusé coupable» sont-ils indépendants ?
- d. Calculer la probabilité que l'accusé soit non coupable s'il est déclaré coupable par les deux jurés.

13 On évalue un test permettant de détecter la présence d'un certain gène chez un patient.

La probabilité que ce test indique l'absence du gène alors qu'il est présent est $\alpha = \frac{1}{500}$.

La probabilité qu'il indique la présence de gène alors qu'il est absent est $\beta = \frac{1}{100}$.

On note λ la proportion de la population possédant le gène recherché.

- a. Quelle est la fiabilité du test, c'est-à-dire la probabilité qu'il renvoie le bon résultat ?
- b. Une personne est détectée positive au test. Quelle est la probabilité qu'elle possède le gène ?

14 Alphonse essaie de ne pas fumer tous les jours. S'il ne fume pas un certain jour, alors il a une chance sur trois de fumer le lendemain. Par contre s'il fume un certain jour, alors il n'a qu'une chance sur six de fumer le lendemain.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'événement «Alphonse fume le jour n ». On suppose que le jour 0 il a fumé. On note u_n la probabilité de A_n .

- a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
- b. En déduire l'expression générale de u_n . Interpréter la limite de la suite (u_n) .

15 Aldo, Bob et Charlie jouent au frisbee. Lorsque Aldo ou Bob a le frisbee, il l'envoie deux fois sur trois à Charlie, et sinon à l'autre joueur, et lorsque Charlie a le frisbee il l'envoie deux fois sur trois à Aldo et une fois sur trois à Bob.

On note A_n, B_n, C_n les événements «Aldo a le frisbee», «Bob a le frisbee» et «Charlie a le frisbee» à

l'instant n . Soit $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$, $c_n = P(C_n)$, et $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

- a. Exprimer a_{n+1} , b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n , b_n , et c_n . Déterminer la matrice A telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $X_{n+1} = AX_n$.

- b. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}$. Calculer $D = P^{-1}AP$, puis D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer X_n en fonction de X_0 , D , P et n . En déduire les termes généraux de a_n , b_n et c_n , sachant qu'Aldo a le frisbee au début du jeu.

Calculer les limites de a_n , b_n et c_n .

16 Une urne contient 9 boules blanches et 1 boule noire. On effectue des tirages successifs dans l'urne. À chaque tirage, si on obtient une boule blanche alors on la remet dans l'urne et on ajoute une boule blanche de plus.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note B_k l'événement «une boule blanche apparaît au tirage k » et N_k l'événement «la boule noire apparaît pour la première fois au tirage k ».

- a. Combien a-t-on de boules dans l'urne après $k - 1$ tirages si on n'a obtenu que des boules blanches ?
- b. Justifier que $N_k = B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k$. En déduire $P(N_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

- c. Simplifier la somme $\frac{1}{8+k} - \frac{1}{9+k}$. En déduire la probabilité p_n de $\bigcup_{k=1}^n N_k$. Interpréter la limite de p_n .

17 Aldo et Bob jouent avec un dé. À chaque tour Aldo jette le dé, puis Bob jette le dé. Le premier qui obtient 6 gagne la partie.

On utilisera les événements X_k : «Aldo obtient 6 lors de son k -ème tirage» et Y_k : «Bob obtient 6 lors de son k -ème tirage».

- Soit k un entier naturel non-nul. Calculer la probabilité des événements A_k : «Aldo gagne la partie au k -ème tour» et B_k : «Bob gagne la partie au k -ème tour».
- Quelle est la probabilité qu'Aldo gagne la partie durant les n premiers tours? Que Bob gagne la partie durant les n premiers tours? Interpréter les limites de ces deux probabilités lorsque n tend vers $+\infty$.
- On note A l'événement «Aldo gagne la partie» et B l'événement «Bob gagne la partie». On admet que $P(A \cup B) = 1$.
Justifier que $P_{\overline{X_1}}(B) = P(A)$, et en déduire les valeurs de $P(A)$ et de $P(B)$.

18 Une urne contient 1 jeton marqué 1, 2 jetons marqués 2, et ainsi de suite jusqu'à n jetons marqués n . On tire un jeton dans l'urne. Soit X la variable aléatoire égale au numéro obtenu.

- Déterminer la loi de X et vérifier que l'on obtient bien une loi de probabilité.
- Calculer l'espérance et la variance de X .
- On suppose que $n = 25$, et on note $m = E(X)$, $\sigma = \sigma(X)$. Quelle est la probabilité que X soit dans l'intervalle $[m - \sigma, m + \sigma]$? Dans l'intervalle $[m - 2\sigma, m + 2\sigma]$?

19 Soit n un entier strictement positif et X à valeur dans l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$. On suppose que pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ la probabilité de l'événement $(X = k)$ est la moitié de celle de l'événement $(X = k - 1)$.

- Déterminer la loi de X .
- Calculer $P(X \leq k)$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
- En remarquant que $k = \sum_{i=1}^k 1$, calculer l'espérance de X .

20 Une urne contient n boules numérotées de 1 à n , avec $n \geq 1$. On tire une boule de l'urne, on la remet puis on en tire une seconde. On note X la variable aléatoire égale au plus petit numéro obtenu.

- Déterminer $X(\Omega)$, puis pour tout $k \in X(\Omega)$ la probabilité $P(X > k)$.
- En déduire la loi de X . Vérifier que l'on obtient bien une loi de probabilité.
- Calculer l'espérance de X .
- Répondre de nouveau aux questions précédentes en supposant que $n \geq 2$ et que l'on tire les deux boules sans remise.

21 Soit a et n deux entiers tels que $0 \leq a \leq n$.

Soit k un entier tel que $k \leq a$ et $k \leq n - a$.

- Démontrer par dénombrement la formule :
$$\sum_{i=0}^k \binom{a}{i} \binom{n-a}{k-i} = \binom{n}{k}.$$

On possède un sac avec n boules dont a sont blanches. On pioche simultanément k boules dans ce sac. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

- Déterminer la loi de X . Retrouver ainsi la formule de la question précédente.
- Calculer son espérance.