Feuille de T. D. A11
Intégration

Exercices de cours

1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note :
$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{t^n}{n!} \cos t \, \mathrm{d}t.$$
Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad |I_n| \leqslant \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}$.
En déduire la limite de la suite (I_n).

2 Soit a un réel strictement positif et f une fonction continue par morceaux sur $[-a, a]$. Démontrer que :

a. Si f est impaire alors : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t) \, \mathrm{d}t = 0$

b. Si f est paire alors : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t) \, \mathrm{d}t = 2\int_0^{a} f(t) \, \mathrm{d}t$.

Utiliser le changement de variable $u = -t$.

3 Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et T-périodique ($T > 0$). Démontrer que :
$$\forall a \in \mathbb{R} \qquad \int_a^{a+T} f(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^{T} f(t) \, \mathrm{d}t.$$

4 En utilisant les sommes de Riemann, calculer :
$$I_1 = \int_1^3 t^2 \, \mathrm{d}t \qquad I_2 = \int_0^1 e^t \, \mathrm{d}t.$$

5 Calculer : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$.

6 Soit $I =]1, +\infty[$ et :
$$\forall x \in I \qquad \Phi(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} \, \mathrm{d}t.$$

a. Calculer $A(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t}$.

b. Démontrer que pour tout $x \in I$:
$$xA(x) \leqslant \Phi(x) \leqslant x^2 A(x).$$

c. Justifier que Φ peut être prolongée par continuité à l'intervalle $\overline{I} = [1, +\infty[$, et que ce prolongement est de classe $\mathcal{C}^1$.

d. Calculer un développement limité de $\Phi(x)$ en $x = 1$ à l'ordre 3.

7 Calculer les dérivées des fonctions suivantes.
$$f_1(x) = \int_2^{2x} \ln t \, \mathrm{d}t \qquad f_2(x) = \int_1^{\sqrt{x}} e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$$
$$f_3(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} \, \mathrm{d}t \qquad f_4(x) = \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{\sqrt{x}} \frac{t \, \mathrm{d}t}{1+t^4} .$$

8 Exprimer l'inégalité Taylor-Lagrange pour la fonction exponentielle avec $a = 0$, $x = 1$, à un ordre n quelconque. En déduire :
$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = e.$$

9 Calculer de deux façons différentes :
$$I = \int_0^{\pi} e^{it} \, \mathrm{d}t.$$

10 Calculer : $\displaystyle I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{t+i} \, \mathrm{d}t$.

Travaux dirigés

1 Démontrer que les suites suivantes convergent et déterminer leurs limites.

a. $\displaystyle u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$ b. $\displaystyle u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{5n-2k}$

c. $\displaystyle u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n^3k^2}{n^6+k^6}$ d. $\displaystyle u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+3nk}}$

e. $\displaystyle u_n = \frac{1}{n}\left(\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{4} + \cdots + \sqrt[n]{2^n}\right)$

f. $\displaystyle u_n = n \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}$ g. $\displaystyle u_n = \prod_{k=1}^{n} \sqrt[n]{1 + \frac{k}{n}}$.

2 Sans utiliser de primitive, calculer :
$$C(x) = \int_0^{x} \cos t \, \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad S(x) = \int_0^{x} \sin t \, \mathrm{d}t.$$

3 Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ calculer :
$$F(x) = \int_0^{x} \lfloor t \rfloor \, \mathrm{d}t.$$
Démontrer que la fonction F est continue.

4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit la fonction :
$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \begin{cases} n^2 & \text{si } \frac{1}{n+1} < t \leqslant \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(t) \, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(t)\right) \mathrm{d}t$.

5 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^1 f = \frac{1}{2}$.
Démontrer que f admet un point fixe.

6 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que :
$$\int_a^b f^2 = \int_a^b f^3 = \int_a^b f^4 .$$
En considérant une combinaison linéaire judicieuse, démontrer que f est constante égale à 0 ou à 1.

7 Soit f l'application définie par :
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a,b) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 \frac{ax+b}{(x+1)(x-2)}\,\mathrm{d}x. \end{array}$$

a. Démontrer que f est linéaire.
b. On pose $u_1 = (1,1)$ et $u_2 = (1,-2)$. Démontrer que la famille (u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}^2$. Donner les coordonnées d'un vecteur quelconque $u = (a,b)$ dans cette base.
c. Calculer $f(u_1)$ et $f(u_2)$.
d. Expliciter $f(a,b)$ pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

8 Déterminer une primitive de f_0, f_1 et f_2 où :
$$f_a(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + a}.$$

9 Calculer les intégrales :
$$F(x) = \int_1^x t \ln t \,\mathrm{d}t \qquad I_1 = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{2t^2 - 6t + 5}$$
$$I_2 = \int_{\ln 7}^{\ln 10} \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x - 1} \qquad I_3 = \int_1^{1000} \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt[3]{t} - 1}.$$

10 Calculer les intégrales suivantes.
$$I_1 = \int_2^8 \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - t} \qquad I_2 = \int_0^1 t^2 (t^3+1)^5 \,\mathrm{d}t$$
$$I_3 = \int_0^1 \frac{3t^2 + t + 1}{t^3 + 1} \qquad I_4 = \int_{-2}^1 \left(\frac{t+3}{t-2}\right)^2 \mathrm{d}t$$
$$I_5 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x + \tan x} \qquad F(x) = \int_0^x t^3 e^{-t^2} \,\mathrm{d}t$$
$$I_6 = \int_{-1}^1 \left(1 - t^2\right)^{\frac{3}{2}} \mathrm{d}t \qquad I_7 = \int_1^{e^\pi} \sin(\ln t) \,\mathrm{d}t$$

11 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note :
$$I_n = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2} \,\mathrm{d}t.$$

a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2n+1}.$$
En déduire que la suite (I_n) converge.
b. Calculer $I_n + I_{n+1}$.
c. Déterminer la limite de la suite :
$$u_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}.$$

12 **Intégrales de Wallis**

Pour tout entier positif n on pose :
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \,\mathrm{d}t.$$

a. Calculer I_0 et I_1.
b. Démontrer que la suite (I_n) est convergente.
c. À l'aide d'une intégration par parties démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (n+2) I_{n+2} = (n+1) I_n.$$
d. Démontrer que la suite $((n+1) I_n I_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et donner sa valeur.
e. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
f. Justifier que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n.$$
En déduire que les suites $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(I_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont équivalentes.
g. Démontrer que : $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

13 Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et :
$$f : x \mapsto \int_0^x (x-t) \varphi(t) \,\mathrm{d}t.$$

a. Justifier que la fonction f est bien définie.
b. Démontrer qu'elle est dérivable et exprimer sa dérivée en fonction de φ.
c. Mêmes questions avec la fonction :
$$g : x \mapsto \int_0^1 \varphi(tx) \,\mathrm{d}t.$$

14 Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et :
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \int_0^x \varphi(t) \cos(x-t) \,\mathrm{d}t.$$

a. Justifier que f est dérivable.
b. Justifier que f est deux fois dérivable et déterminer une équation différentielle dont elle est solution.

15 Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n k^\alpha$.

a. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$:
$$k^\alpha \leqslant \int_k^{k+1} t^\alpha \,\mathrm{d}t \leqslant (k+1)^\alpha.$$
b. En déduire un encadrement de S_n par deux intégrales, puis démontrer que $S_n \sim \dfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.
c. Retrouver ce résultat grâce aux sommes de Riemann.

16 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :
$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

a. Expliciter la formule de Taylor avec reste intégral pour la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ en 0.
b. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite.

17 Pour m et n entiers positifs on pose :

$$I_{mn} = \int_0^1 (1-t)^n t^m \,\mathrm{d}t.$$

Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral pour calculer la valeur de I_{mn}.

18 Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) = \sin x.$$

19 Lemme de Lebesgue v1

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Démontrer que :

$$\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

20 Lemme de Lebesgue v2

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. Démontrer que :

$$\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

a. Si f est constante.

b. Si f est en escalier.

c. Si f est continue par morceaux.

21 Soit f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2 t}.$$

a. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.

b. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, décrire ses variations.

c. Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Calculer $f(x)$ à l'aide du changement de variable $u = \tan t$.

d. En déduire la valeur de : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2 t}$

e. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_{k\pi}^x \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2 t} = f(x-k\pi).$$

22 Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on pose :

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

a. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.

b. Démontrer que f est dérivable, calculer sa dérivée, puis décrire ses variations.

c. Soit $x > 0$. Justifier l'encadrement

$$\forall t \in [x, 2x] \qquad e^x \leqslant e^t \leqslant e^{2x}$$

et en déduire un encadrement de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

d. Donner un encadrement similaire de f sur $\mathbb{R}_-^*$.

e. Déterminer les limites de f en $\pm\infty$.

f. Justifier que f est prolongeable par continuité en 0. On notera f la prolongement obtenu.

g. À l'aide du théorème de limite de la dérivée, démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0.

h. Donner un développement limité à l'ordre 3 de f en 0 .

i. Tracer l'allure de la courbe de f.

23 Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on pose :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{x+t^4}.$$

a. Justifier que la fonction f est bien définie et décroissante.

b. Déterminer sa limite en $+\infty$.

c. Démontrer que pour tout $(x,a) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$|f(x) - f(a)| \leqslant \frac{|x-a|}{xa}.$$

En déduire que f est continue.

d. Démontrer que f est dérivable et donner sa dérivée.

Indication : deviner quelle fonction g conviendrait pour f' et démontrer que f est dérivable de dérivée g.