



La fonction racine carrée est uniformément continue alors qu'elle n'est pas lipschitzienne, donc la réciproque est fautive en général.

(ii) Cette propriété est immédiate.

La fonction carré est continue mais n'est pas uniformément continue, donc la réciproque est fautive en général.  $\square$

**Théorème de Heine.** *Si une fonction est continue sur un segment alors elle est uniformément continue.*

Démonstration.



## II. Définition de l'intégrale

Dans toute cette partie,  $I$  désigne un segment  $[a, b]$  avec  $a < b$ .

### A. Fonctions en escalier

#### Définitions.

(i) Une subdivision de  $I$  est une suite de réels  $(x_0, \dots, x_n)$  telle que :

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

(ii) Une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est dite en escalier s'il existe une subdivision  $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$  de  $I$  telle que  $f$  est constante sur chaque intervalle  $]x_{k-1}, x_k[$ .

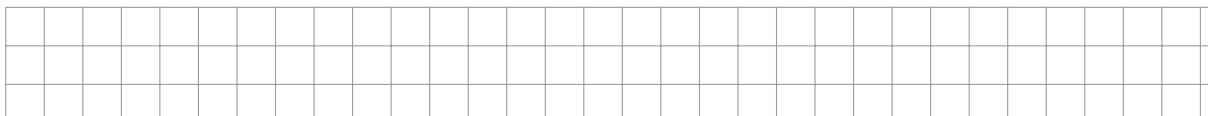
Cette subdivision est alors dite adaptée à la fonction  $f$ .



**Exemple.** La fonction partie entière  $x \mapsto [x]$  est en escalier sur tout segment.

**Définition.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction en escalier. Soit  $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$  une subdivision de  $I$  adaptée à  $f$ , et  $y_k$  la valeur de  $f$  sur l'intervalle  $]x_{k-1}, x_k[$ , pour tout  $k = 1 \dots n$ .

On appelle intégrale de  $f$  sur  $I$  et on note  $\int_I f$  le réel :



**Remarque.** L'intégrale de  $f$  ne dépend pas de la subdivision choisie.

Elle ne dépend pas non plus des valeurs de  $f$  aux points de cette subdivision.

**Proposition.** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions en escalier. Alors il existe une subdivision de  $I$  adaptée à  $f$  et à  $g$ .

Démonstration. Soit  $(x_0, \dots, x_n)$  une subdivision adaptée à  $f$  et  $(y_0, \dots, y_m)$  une subdivision adaptée à  $g$ . L'ensemble  $\{x_0, \dots, x_n\} \cup \{y_0, \dots, y_m\}$  contient un certain nombre de réels distincts que l'on note  $z_0, \dots, z_p$  en les ordonnant.

La subdivision  $(z_0, \dots, z_p)$  est adaptée à  $f$  et à  $g$  car elle contient tous les  $x_i$  et les  $y_j$ .  $\square$

**Lemme (Croissance de l'intégrale des fonctions en escalier).**

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions en escalier. Si  $f \leq g$  alors  $\int_I f \leq \int_I g$ .

Démonstration. Soit  $(x_0, \dots, x_n)$  une subdivision adaptée à  $f$  et à  $g$ . Pour tout  $k = 1, \dots, n$ , soit  $y_k$  et  $z_k$  les valeurs respectives de  $f$  et de  $g$  sur l'intervalle  $]x_{k-1}, x_k[$ .

Si l'inégalité  $f \leq g$  a lieu alors :  $\forall k = 1, \dots, n \quad y_k \leq z_k$

Dans ce cas, comme les  $x_k - x_{k-1}$  sont tous positifs on en déduit par somme :

$$\sum_{k=1}^n y_k (x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n z_k (x_k - x_{k-1})$$

Ceci donne exactement  $\int_I f \leq \int_I g$ . □

**Propositions.**

(i) Les combinaisons linéaires de fonctions en escalier sur  $I$  sont en escalier.

(ii) Le produit d'un nombre fini de fonctions en escalier sur  $I$  est en escalier.

Démonstration. En effet, si  $f_1, \dots, f_n$  sont des fonctions en escalier alors il existe une subdivision de  $I$  adaptée à toutes les  $f_i$ . □

**Lemme (Linéarité de l'intégrale des fonctions en escalier).**

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions en escalier et  $\lambda$  un réel. Alors :  $\int_I (\lambda f + g) = \lambda \int_I f + \int_I g$

Démonstration. C'est une conséquence de la linéarité de la somme.

On choisit une subdivision  $(x_0, \dots, x_n)$  adaptée à  $f$  et à  $g$ , et on note  $y_k$  et  $z_k$  les valeurs respectives de  $f$  et de  $g$  sur l'intervalle  $]x_{k-1}, x_k[$ .

Alors la fonction  $\lambda f + g$  est en escalier, de valeur  $(\lambda y_k + z_k)$  sur chaque intervalle  $]x_{k-1}, x_k[$ , donc :

$$\int_I (\lambda f + g) = \sum_{k=1}^n (\lambda y_k + z_k) (x_k - x_{k-1})$$

Par linéarité de la somme :

$$\int_I (\lambda f + g) = \lambda \sum_{k=1}^n y_k (x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^n z_k (x_k - x_{k-1}) = \lambda \int_I f + \int_I g$$

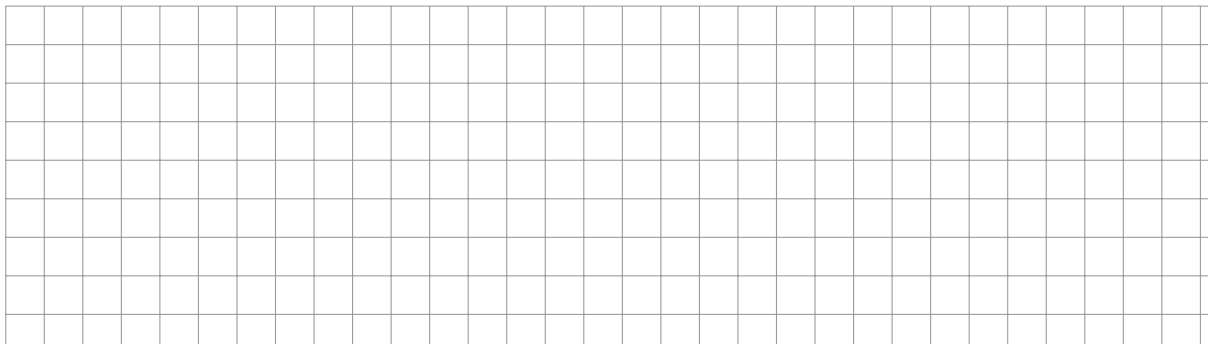
L'intégration des fonctions en escalier est donc linéaire. □

## B. Fonctions continues par morceaux

On note toujours  $I$  un segment.

**Définition.** Une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est dite continue par morceaux s'il existe une subdivision  $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$  de  $I$  telle que :

- (i)  $f$  est continue sur chaque intervalle  $]x_{k-1}, x_k[$ .
- (ii)  $f$  admet une limite finie à gauche en chaque point  $x_1, \dots, x_n$  et une limite finie à droite en chaque point  $x_0, \dots, x_{n-1}$ .



**Définition (suite).** Si  $I$  est un intervalle quelconque, on dit que  $f$  est continue par morceaux sur  $I$  si elle est continue par morceaux sur tout segment inclus dans  $I$ .

**Notation.** On note  $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  continues par morceaux.

**Remarque.** Une fonction continue est continue par morceaux :  $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{C}_m(I, \mathbb{R})$

### Propositions.

- (i) *Une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.*
- (ii) *La somme et le produit de fonctions continues par morceaux sont continues par morceaux.*

On en déduit que  $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{R})$  est un espace vectoriel et un anneau.

### Démonstration.

- (i) Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue par morceaux sur le segment  $I$ , et  $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$  une subdivision de  $I$  adaptée à  $f$ . Pour tout  $k = 1, \dots, n$  on note  $f_k$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $]x_{k-1}, x_k[$ .

Comme  $f_k$  admet des limites finies en  $x_{k-1}$  et en  $x_k$  alors elle est prolongeable par continuité sur le segment  $[x_{k-1}, x_k]$ . On note  $\bar{f}_k$  le prolongement par continuité obtenu.

Une fonction continue sur un segment est bornée, donc  $\bar{f}_k$  est bornée. Par restriction  $f_k$  est bornée. Ceci montre que  $f$  est bornée sur  $\bigcup_{k=1}^n ]x_{k-1}, x_k[$ .

Comme les valeurs de  $f$  aux points  $x_0, \dots, x_n$  sont en nombre fini elles sont bornées, et donc finalement  $f$  est bornée sur  $I$ .

- (ii) Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues par morceaux, alors il existe une subdivision adaptée aux deux fonctions. Sur chaque intervalle  $]x_{k-1}, x_k[$  de cette subdivision les fonctions  $f + g$  et  $fg$  sont continues. Par somme et produit de limites elles admettent des limites finies à gauche et à droite aux bornes de ces intervalles.

Donc elles sont continues par morceaux.

Ajoutons que pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  la fonction  $\lambda f$  est continue par morceaux, car la fonction  $g : x \mapsto \lambda$  est continue par morceaux.  $\square$

**Théorème (Approximation par une fonction en escalier).** Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur un segment  $I$  et  $\varepsilon$  un réel strictement positif.

Alors il existe deux fonctions  $f_1$  et  $f_2$  en escalier sur  $I$  telles que :

$$\forall x \in I \quad f(x) - \varepsilon \leq f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x) \leq f(x) + \varepsilon$$

Démonstration. On démontre qu'il existe une fonction en escalier  $f_1$  comprise entre  $f - \varepsilon$  et  $f$ , puis on pose  $f_2 = f_1 + \varepsilon$ .

On commence par supposer que  $f$  est continue.

Alors  $f$  est continue sur le segment  $I$  donc d'après le théorème de Heine elle est uniformément continue. Comme  $\varepsilon > 0$  on en déduit :

$$\exists \eta > 0 \quad \forall (x, y) \in I^2 \quad |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \quad (1)$$

On note  $I = [a, b]$  avec  $a < b$ . On crée une subdivision de ce segment de pas  $h$  plus petit que  $\eta$ . Pour ceci on pose  $n = \left\lceil \frac{b-a}{\eta} \right\rceil$ , puis :

$$\forall k = 0, \dots, n \quad x_k = a + kh \quad \text{avec} \quad h = \frac{b-a}{n}$$

Comme  $n \geq \frac{b-a}{\eta}$  alors  $h \leq \eta$ , et  $x_0 = a$ ,  $x_n = b$ .

Pour tout  $k = 0, \dots, n-1$ , soit  $y_k = \inf_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} f(x)$ .

On définit la fonction en escalier  $f_1$  par :

$$\forall k = 0, \dots, n \quad \forall x \in [x_k, x_{k+1}[ \quad f_1(x) = y_k$$

Cette fonction est bien en escalier, et par définition des  $y_k$  :

$$\forall k = 0, \dots, n \quad \forall x \in [x_k, x_{k+1}[ \quad f_1(x) \leq f(x)$$

Ceci montre que  $f_1 \leq f$ . Démontrons que :  $\forall x \in I \quad f(x) - \varepsilon \leq f_1(x)$

Pour ceci on fixe un élément  $x$  de  $I$ . Alors il existe  $k \in \{0, \dots, n\}$  tel que  $x \in [x_k, x_{k+1}[$  (il suffit de poser  $k = \left\lfloor \frac{x-a}{h} \right\rfloor$ ). Donc  $f_1(x) = y_k$  par définition de  $f_1$ .

On a supposé que  $f$  est continue, et  $y_k$  est la borne inférieure de  $f$  sur le segment  $[x_k, x_{k+1}]$ , donc elle est atteinte : il existe  $x'_k \in [x_k, x_{k+1}]$  tel que  $f(x'_k) = y_k$ .

Les points  $x$  et  $x'_k$  appartiennent au segment  $[x_k, x_{k+1}]$ , lequel est de largeur  $h$ , donc  $|x - x'_k| \leq h \leq \eta$ . D'après l'assertion (1) ceci implique que  $|f(x) - f(x'_k)| \leq \varepsilon$  donc  $|f(x) - y_k| \leq \varepsilon$  puis  $|f(x) - f_1(x)| \leq \varepsilon$ .

Ceci montre que  $f(x) - f_1(x) \leq \varepsilon$ , donc  $f(x) - \varepsilon \leq f_1(x)$ .

Finalement pour tout  $x \in I$  on a  $f(x) - \varepsilon \leq f_1(x) \leq f(x)$ , donc le résultat est démontré dans le cas où la fonction  $f$  est continue.

Supposons maintenant que  $f$  est continue par morceaux.

Soit  $(x_0, \dots, x_n)$  une subdivision adaptée à  $f$ . Sur chaque intervalle  $]x_{k-1}, x_k[$  la fonction  $f$  est continue donc il existe une fonction en escalier  $f_{1,k}$  telle que  $f - \varepsilon \leq f_{1,k} \leq f$  sur  $]x_{k-1}, x_k[$ .

On définit alors la fonction  $f_1$  par :

$$\forall k = 1, \dots, n \quad f_{1|_{]x_{k-1}, x_k[}} = f_{1,k} \quad \text{et} \quad \forall k = 0, \dots, n \quad f_1(x_k) = f(x_k)$$

Alors la fonction  $f_1$  est en escalier et elle vérifie  $f - \varepsilon \leq f_1 \leq f$ . □

### C. Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

**Théorème.** (Bernhard Riemann, Allemagne, 1826 – 1866)) Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur un segment  $I = [a, b]$ . On note :

- $\mathcal{E}_1$  l'ensemble des fonctions en escalier sur  $I$  inférieures à  $f$
- $\mathcal{E}_2$  l'ensemble des fonctions en escalier sur  $I$  supérieures à  $f$ .

Alors l'ensemble

$$\left\{ \int_I f_1 \mid f_1 \in \mathcal{E}_1 \right\}$$

admet une borne supérieure, l'ensemble

$$\left\{ \int_I f_2 \mid f_2 \in \mathcal{E}_2 \right\}$$

admet une borne inférieure, et ces deux bornes sont égales.



Démonstration. On note :

$$I_1 = \text{Sup} \left\{ \int_I f_1 \mid f_1 \in \mathcal{E}_1 \right\} \quad I_2 = \text{Inf} \left\{ \int_I f_2 \mid f_2 \in \mathcal{E}_2 \right\}$$

On démontre le résultat en trois étapes :

- (i)  $I_1$  et  $I_2$  sont bien définies.
- (ii)  $I_1 \leq I_2$
- (iii)  $\forall \varepsilon > 0 \quad I_2 - I_1 \leq \varepsilon$ .

(i) Comme la fonction  $f$  est continue par morceaux sur le segment  $I$  alors elle est bornée.

On note  $m$  et  $M$  ses bornes :  $f(I) \subseteq [m, M]$ .

La fonction constante égale  $m$  est en escalier, inférieure à  $f$ . La fonction constante égale à  $M$  est en escalier, supérieure à  $f$ . Ceci montre que  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$  ne sont pas vides.

De plus, si  $f_1$  est une fonction de  $\mathcal{E}_1$ , alors  $f_1 \leq f \leq M$ , donc  $\int_I f_1 \leq \int_I M$  d'après le lemme de croissance de l'intégrale des fonctions en escalier.

L'ensemble des intégrales des éléments de  $\mathcal{E}_1$  est donc majoré par  $\int_I M$ . Il est non-vidé donc d'après la propriété de la borne supérieure il admet une borne supérieure, que l'on note  $I_1$ .

De même l'ensemble des intégrales des éléments de  $\mathcal{E}_2$  est minoré par  $\int_I m$ , non-vidé, donc il admet une borne inférieure, que l'on note  $I_2$ .

(ii) Si  $f_1 \in \mathcal{E}_1$  et  $f_2 \in \mathcal{E}_2$  alors  $f_1 \leq f \leq f_2$ , donc  $\int_I f_1 \leq \int_I f_2$  d'après le lemme de croissance de l'intégrale des fonctions en escalier.

La fonction  $f_2$  est un majorant de l'ensemble des  $\int_I f_1$  pour  $f_1 \in \mathcal{E}_1$ , donc  $I_1 \leq \int_I f_2$ .

Ainsi  $I_1$  est un minorant de l'ensemble des  $\int_I f_2$  pour  $f_2 \in \mathcal{E}_2$ , donc  $I_1 \leq I_2$ .

(iii) Soit  $\varepsilon > 0$ . Alors  $\frac{\varepsilon}{2(b-a)} > 0$ . D'après le théorème d'approximation par une fonction en escalier il existe  $f_1 \in \mathcal{E}_1$  et  $f_2 \in \mathcal{E}_2$  telles que :

$$f - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \leq f_1 \leq f \leq f_2 \leq f + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Ceci donne :

$$0 \leq f_2 - f_1 \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Par les lemmes de croissance et de linéarité :

$$0 \leq \int_I f_2 - \int_I f_1 \leq \int_I \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$$

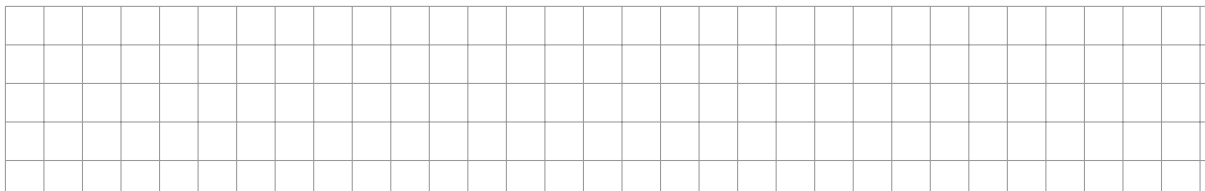
On sait que  $\int_I f_1 \leq I_1$  et  $\int_I f_2 \geq I_2$ , donc  $\int_I f_2 - \int_I f_1 \geq I_2 - I_1$ , ce qui donne  $I_2 - I_1 \leq \varepsilon$ .

Les deux bornes  $I_1$  et  $I_2$  sont bien définies et vérifient :  $\forall \varepsilon > 0 \quad 0 \leq I_2 - I_1 \leq \varepsilon$

Elles sont donc égales :  $I_1 = I_2$ . □

**Définition.** On appelle intégrale de  $f$  sur  $I$  la borne commune définie par le théorème.

**Notations.** L'intégrale de  $f$  sur  $I$  est notée :



**Remarque.** L'intégrale d'une fonction est l'aire sous la courbe, en comptant négativement les parties où la fonction est négative.





### III. Propriétés

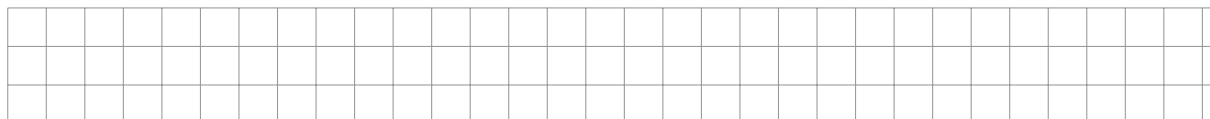
#### A. Linéarité

**Proposition - Linéarité de l’intégrale.** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues par morceaux sur un segment  $I = [a, b]$ , et  $\lambda, \mu$  deux réels. Alors :

$$\int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$$

**Remarque.** En d’autres termes l’application  $\mathcal{C}_m(I) \rightarrow \mathbb{R}$  est linéaire.

$$f \mapsto \int_I f$$



**Lemme.** Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur un segment  $I$ . Soit  $\mathcal{E}_1$  l’ensemble des fonctions en escalier inférieures à  $f$ .

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de fonctions de  $\mathcal{E}_1$  telles que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Sup}_{x \in I} (f(x) - f_n(x)) = 0$

Alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n = \int_I f$

**Démonstration.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on note  $\varepsilon_n = \text{Sup}_{x \in I} (f(x) - f_n(x))$ . Alors la suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers 0 et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in I \quad f_n(x) \leq f(x) \leq f_n(x) + \varepsilon_n$$

La fonction  $f_n$  est en escalier, et la fonction  $x \mapsto \varepsilon_n$  est constante donc en escalier. Ainsi la fonction  $f_n + \varepsilon_n$  est en escalier.

Par définition de l’intégrale, comme  $f_n$  est une fonction en escalier inférieure à  $f$  et  $f_n + \varepsilon_n$  est une fonction en escalier supérieure à  $f$  alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_I f_n \leq \int_I f \leq \int_I (f_n + \varepsilon_n)$$

En effet,  $\int_I f$  est la borne supérieure de l’ensemble des intégrales des fonctions en escalier inférieures à  $f$  et la borne inférieure de l’ensemble des intégrales des fonctions en escalier supérieures à  $f$ .

La fonction  $f_n + \varepsilon_n$  est en escalier donc on peut appliquer le lemme de linéarité pour l’intégrale des fonctions en escalier :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_I (f_n + \varepsilon_n) = \int_I f_n + \int_I \varepsilon_n = \int_I f_n + (b - a)\varepsilon_n$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_I f - (b - a)\varepsilon_n \leq \int_I f_n \leq \int_I f$$

Par hypothèse la suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers 0, donc par théorème d’encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n = \int_I f \quad \square$$

Démonstration de la linéarité. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors  $\frac{1}{2n} > 0$  donc d'après le théorème d'approximation par des fonctions en escalier il existe deux fonctions en escalier  $f_n$  et  $g_n$  telles que :

$$f - \frac{1}{2n} \leq f_n \leq f \quad \text{et} \quad g - \frac{1}{2n} \leq g_n \leq g$$

Par somme :

$$f + g - \frac{1}{n} \leq f_n + g_n \leq f + g$$

On déduit de ces trois encadrements :

$$0 \leq f - f_n \leq \frac{1}{2n} \quad 0 \leq g - g_n \leq \frac{1}{2n} \quad 0 \leq (f + g) - (f_n + g_n) \leq \frac{1}{n}$$

En d'autres termes :

$$0 \leq \text{Sup}_I (f - f_n) \leq \frac{1}{2n} \quad 0 \leq \text{Sup}_I (g - g_n) \leq \frac{1}{2n} \quad 0 \leq \text{Sup}_I (f + g - (f_n + g_n)) \leq \frac{1}{n}$$

Ceci est valable pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  donc par théorème d'encadrement on obtient :

$$\text{Sup}_I (f - f_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{Sup}_I (g - g_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{Sup}_I (f + g - (f_n + g_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

D'après le lemme précédent ceci implique :

$$\int_I f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f \quad \int_I g_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I g \quad \int_I (f_n + g_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I (f + g)$$

Les fonctions  $f_n + g_n$  sont en escalier donc on peut appliquer le lemme de linéarité pour l'intégrale des fonctions en escalier :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_I (f_n + g_n) = \int_I f_n + \int_I g_n$$

Par unicité de la limite :

$$\int_I (f + g) = \int_I f + \int_I g$$

On démontre de même que pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  :  $\int_I (\lambda f) = \lambda \int_I f$

En effet ce résultat est évident si  $\lambda = 0$ , et sinon on choisit une suite de fonctions en escalier  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f_n \leq f \leq f_n + \frac{1}{|\lambda|n}$$

Grâce au lemme on obtient  $\int_I f_n \rightarrow \int_I f$  et  $\int_I \lambda f_n \rightarrow \int_I \lambda f$ .

Par linéarité de l'intégrale des fonctions en escalier  $\int_I \lambda f_n = \lambda \int_I f_n$ , puis par unicité de la limite  $\int_I \lambda f = \lambda \int_I f$ .  $\square$

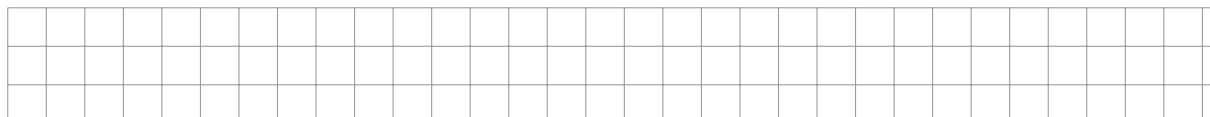
### B. Inégalités

**Proposition - Croissance de l'intégrale.** *Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues par morceaux sur un segment  $I = [a, b]$ .*

$$\text{Si } \forall t \in [a, b] \quad f(t) \leq g(t) \quad \text{alors} \quad \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt.$$

**Remarque.** En d'autres termes l'application  $\mathcal{C}_m(I) \rightarrow \mathbb{R}$  est croissante.

$$f \mapsto \int_I f$$



Démonstration. Si  $f \leq g$  alors  $g - f \geq 0$ .

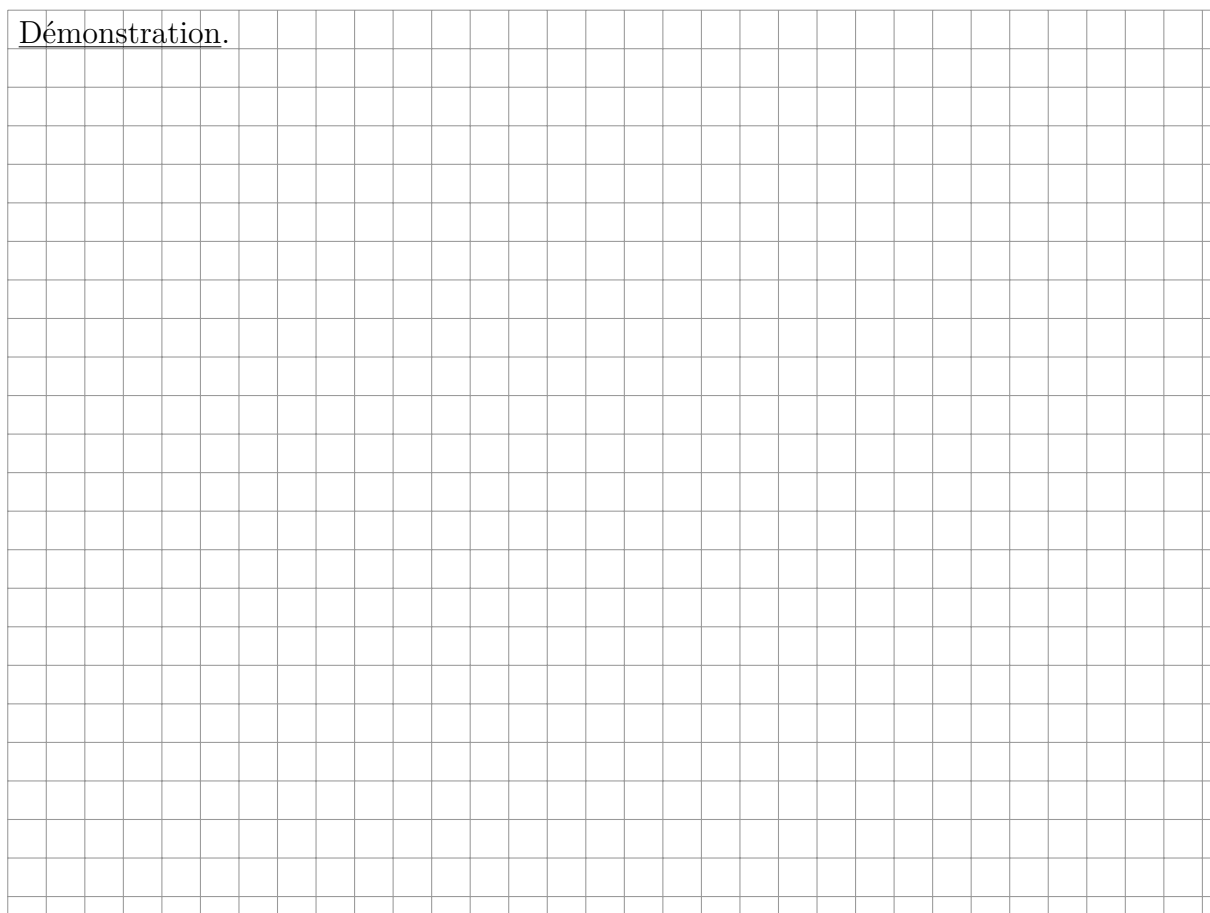
La fonction nulle est en escalier donc par définition de l'intégrale :  $\int_I 0 \leq \int_I (g - f)$

Par linéarité on en déduit :  $\int_I f \leq \int_I g$  □

**Théorème - Positivité.** *Si  $f$  est continue et positive sur un segment  $[a, b]$ , alors :*

$$\int_a^b f(t) dt = 0 \quad \implies \quad f = 0$$

**Corollaire.** *L'intégrale d'une fonction continue de signe constant est nulle si et seulement si la fonction est nulle.*







## IV. Sommes de Riemann

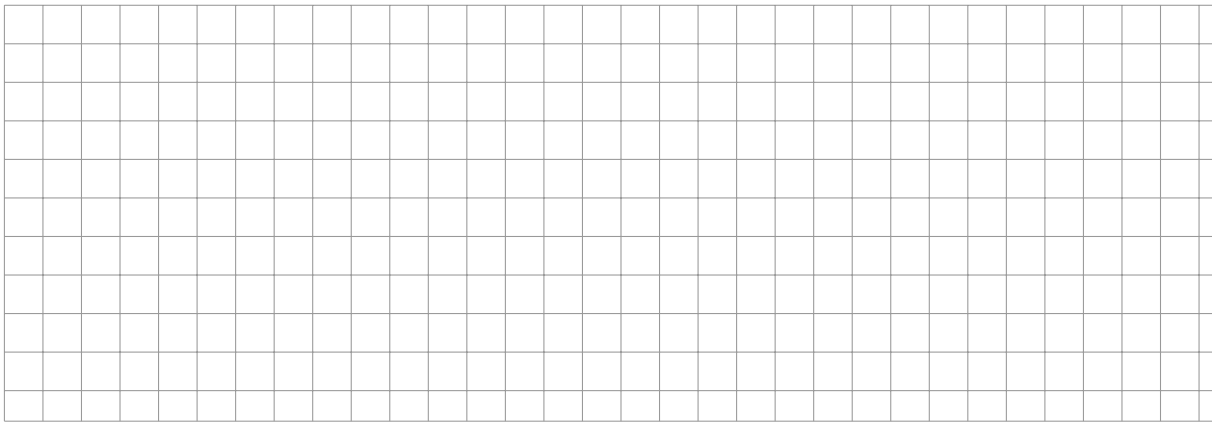
### A. Méthode des rectangles

**Définition.** Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur un segment  $I = [a, b]$ , et  $n$  un entier strictement positif. Pour tout  $k = 0, \dots, n$  on pose :

$$x_k = a + k \frac{b-a}{n}$$

Ainsi la suite  $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$  est une subdivision de  $I$  à pas constant. Les sommes de Riemann de la méthode des rectangles sont les réels :

$$R_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \quad \text{et} \quad S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$$



**Théorème.** Si  $f$  est continue par morceaux sur  $[a, b]$  alors les suites  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  convergent vers  $\int_a^b f(t) dt$ .

Démonstration. La convergence de  $(S_n)$  se déduit de celle de  $(R_n)$ , puisque :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = R_n + \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a))$$

On se contente donc de démontrer la convergence de  $(R_n)$ .

On ajoute cependant une hypothèse : on suppose que  $f$  est lipschitzienne.

(Voir démonstration à part) □

**Remarque.** De plus si  $f$  est lipschitzienne alors la convergence est en  $O\left(\frac{1}{n}\right)$  :

$$\left( R_n - \int_a^b f(t) dt \right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

▷ **Exercice 4.**

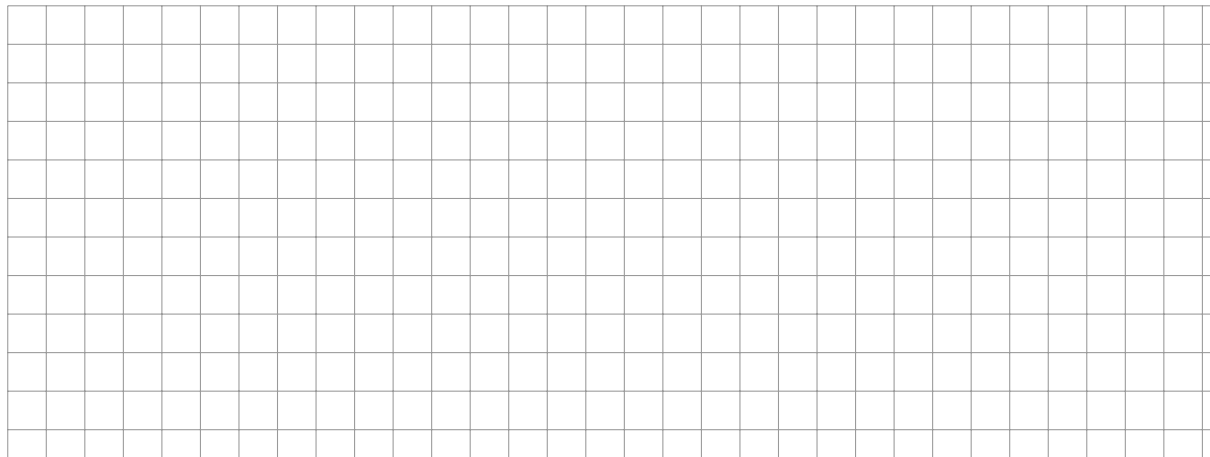
**Exemple 2.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  soit  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$ . Démontrer que  $(u_n)$  est convergente et calculer sa limite.

▷ **Exercice 5.**

**B. Méthode des trapèzes**

**Définition.** Les sommes de Riemann de la méthode des trapèzes sont définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad T_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}$$



**Remarque.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $T_n = \frac{R_n + S_n}{2}$

En conséquence, la suite  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge également vers  $\int_a^b f(t) dt$  si  $f$  est continue par morceaux.

On peut démontrer que si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  alors la convergence est en  $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  :

$$\left(T_n - \int_a^b f(t) dt\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

## V. Théorèmes

### A. Théorème fondamental

**Théorème Fondamental.** (Isaac Newton, Grande-Bretagne, 1642 – 1727 et Gottfried Leibniz, Allemagne, 1646 – 1716)

Soit  $I$  un intervalle non-vide,  $a$  un point de  $I$ , et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

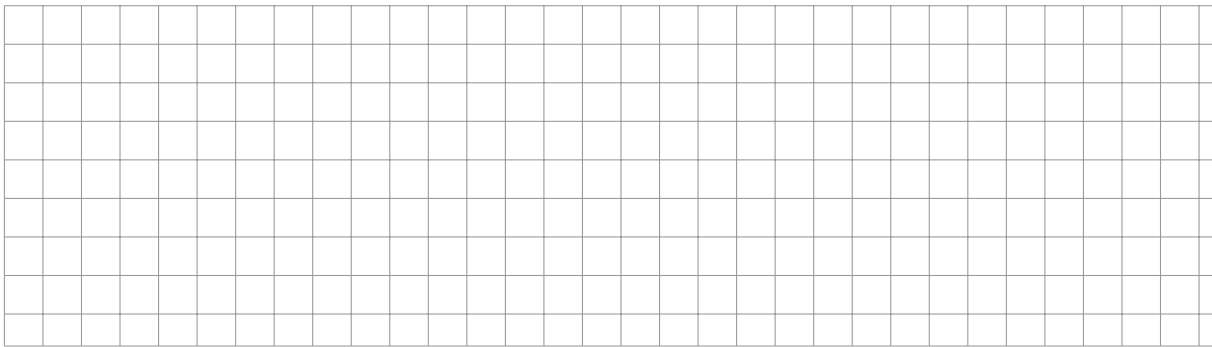
Alors la fonction  $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une primitive de  $f$ .

$$x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

**Corollaire 1.** Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive.

**Définition.** Soit  $f$  une fonction continue sur un segment  $[a, b]$ . On appelle valeur moyenne de  $f$  le réel :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$



**Proposition.** Une fonction continue atteint sa moyenne.

En d'autres termes, si  $f$  est continue sur  $[a, b]$  alors il existe  $c \in [a, b]$  tel que :

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Démonstration. La fonction  $f$  est continue sur le segment  $[a, b]$  donc par théorème son image est un segment. On note  $[m, M]$  celui-ci, ce qui donne :

$$\forall t \in [a, b] \quad m \leq f(t) \leq M$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_a^b m dt \leq \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b M dt$$

En divisant par  $(b-a)$  on en déduit que  $m \leq \mu \leq M$ , i.e.,  $\mu$  est dans le segment  $[m, M]$ . Comme  $[m, M] = f([a, b])$  alors il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = \mu$ .  $\square$

Démonstration du théorème fondamental. (Voir feuille à part)  $\square$

**Corollaire 2.** Soit  $I$  un intervalle non-vide,  $a$  un point de  $I$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On note pour tout  $x \in I$  :  $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$

- (i)  $\Phi$  est l'unique primitive de la fonction  $f$  qui s'annule en  $a$ .
- (ii) Soit  $b$  un autre point de  $I$ , et  $F$  une primitive de  $f$ . Alors :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$



**Remarque.** Si  $f$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur le segment  $[a, b]$  alors :

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$$

Ceci donne une démonstration de l'inégalité des accroissements finis en utilisant la croissance des intégrales.

Démonstration.

**Exemple 3.** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on pose :  $f(x) = \int_0^x e^{-t^2/2} dt$

- Justifier que  $f$  est bien définie et impaire.
- Démontrer que  $f$  est dérivable et donner sa dérivée.
- Justifier que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , donner son développement limité en 0 à l'ordre 3.
- (i) Démontrer que :  $\forall t \in [1, +\infty[ \quad e^{-t^2/2} \leq e^{-t/2}$   
En déduire une majoration de  $f$  sur cet intervalle.  
(ii) Démontrer que  $f$  admet une limite finie en  $+\infty$ .
- Tracer la courbe de  $f$ .

**Exemple 4.** Soit  $I = ]1, +\infty[$ . Pour tout  $x \in I$  on pose :  $\Phi(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$

- Justifier que la fonction  $f : t \mapsto \frac{1}{\ln t}$  admet une primitive sur  $I$ .
- Justifier que  $\Phi$  est bien définie sur  $I$ .
- Justifier que  $\Phi$  est dérivable sur  $I$  et donner sa dérivée.

▷ **Exercices 6, 7.**



## VI. Intégrales des fonctions complexes

**Définition.** Soit  $I = [a, b]$  un segment, et  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue par morceaux. On définit alors l'intégrale de  $f$  par :

$$\int_a^b f = \int_a^b \operatorname{Re}(f) + i \int_a^b \operatorname{Im}(f)$$

▷ **Exercices 9, 10.**

**Remarque.** La linéarité, la relation de Chasles, l'intégration par parties, le théorème de changement de variable, les formules de Taylor sont valides pour les fonctions complexes. La croissance n'est plus valide.

**Proposition.** (*Inégalité triangulaire*) Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  continue par morceaux. Alors l'intégrale de son module est inférieure au module de son intégrale :

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

Démonstration. Soit  $r = \left| \int_a^b f \right|$  et  $\theta$  un argument de  $\int_a^b f$ , si bien que  $\int_a^b f = r e^{i\theta}$ .

Soit  $g(t) = e^{-i\theta} f(t)$ . Par linéarité :

$$\int_a^b g(t) dt = e^{-i\theta} \int_a^b f(t) dt = r$$

Or

$$\int_a^b g(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(g(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(g(t)) dt$$

donc

$$\int_a^b \operatorname{Im}(g(t)) dt = 0 \quad \text{et} \quad r = \int_a^b \operatorname{Re}(g(t)) dt \geq 0$$

Puisque  $|\operatorname{Re}(g)| \leq |g|$  alors par inégalité triangulaire et croissance pour les fonctions réelles :

$$r = \left| \int_a^b \operatorname{Re}(g) \right| \leq \int_a^b |\operatorname{Re}(g)| \leq \int_a^b |g| = \int_a^b |f|$$

Ceci donne l'inégalité recherchée. □

**Remarque.** Dans le cas où  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$  alors l'inégalité triangulaire implique l'inégalité des accroissements finis pour les fonctions complexes : si  $|f'| \leq M$  sur  $[a, b]$  alors :

$$|f(b) - f(a)| \leq M(b - a)$$