Devoir à la Maison n°12
Endomorphismes nilpotents

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$.

On note id l'identité de E.

Si f est un endomorphisme de E on note $f^0 = \text{id}$ et pour tout entier naturel $k > 0$ on note f^k le composé k fois de f : $f^k = f \circ \cdots \circ f$.

Un endomorphisme f de E est dit *nilpotent* s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Si E est de dimension finie alors il existe un entier p minimal tel que $f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$, que l'on appelle *indice de nilpotence* de f.

Partie A. Exemples

1. Soit $E = \mathbb{R}^3$ et :

$$f : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ (x,y,z) & \longmapsto & (0,x,y) \end{array} \qquad g : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-2y+z, x-2y+z, x-2y+z). \end{array}$$

   Démontrer que f et g sont nilpotents et donner leurs indices de nilpotence.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $D_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$ est nilpotent de donner son indice de nilpotence.

   (b) Démontrer que $D : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$ n'est pas nilpotent.

3. On suppose de nouveau que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque.

   Soit φ un forme linéaire non-nulle sur E et u_0 un vecteur non-nul de E.

   Pour tout $u \in E$ on pose $f(u) = \varphi(u)u_0$.

   (a) Démontrer que f est un endomorphisme de E.

   (b) Démontrer que f est nilpotent si et seulement si $\varphi(u_0) = 0$, et que dans ce cas son indice de nilpotence est égal à 2.

Partie B. Cas de la dimension finie

On suppose dorénavant que E est de dimension finie n.

1. Démontrer que pour tout endomorphisme f de E et tout entier $k \in \mathbb{N}$:

$$\ker f^k \subseteq \ker f^{k+1} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{im} f^{k+1} \subseteq \operatorname{im} f^k$$

2. Soit k et j deux entiers naturels avec $k \leqslant j$. Démontrer que si $\ker f^k = \ker f^{k+1}$ alors $\ker f^j = \ker f^{j+1}$.

Soit f un endomorphisme nilpotent.

3. Justifier qu'il existe un plus petit entier naturel p tel que $f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
   Considérer l'ensemble des $k \in \mathbb{N}$ tels que f^k est nul.
4. Démontrer que la suite $\big(\dim(\ker f^k)\big)_{0 \leqslant k \leqslant p}$ est strictement croissante.
5. Démontrer que $p \leqslant n$.
6. À l'aide du théorème du rang, démontrer que : $\quad p - 1 \leqslant \operatorname{rg} f \leqslant n - 1$.

Partie C. Cas maximal

On suppose toujours que E est de dimension finie n.

Soit f un endomorphisme de E nilpotent d'indice de nilpotence $p = n$.

1. Justifier qu'il existe un vecteur e de E tel que $f^{n-1}(e) \neq 0_E$.
2. Démontrer que la famille $(e, f(e), f^2(e), \dots, f^{n-1}(e))$ est une base de E.

Dans la suite on démontre que les endomorphismes qui commutent avec f sont les endomorphismes g de la forme $g = \alpha_0 \mathrm{id} + \alpha_1 f + \cdots \alpha_{n-1} f^{n-1}$ où $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ sont des scalaires.

3. Soit g un endomorphisme de E commutant avec f, *i.e.*, tel que $f \circ g = g \circ f$.
   (a) Démontrer qu'il existe des scalaires $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ tels que :
   $$g(e) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(e).$$
   (b) Démontrer par interpolation linéaire que $g = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k$.
4. Conclure.