Devoir à la Maison n°12

Le but de ce devoir est de résoudre les équations différentielles de la forme

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad (\star)$$

où n est un entier naturel, $a_0, \ldots, a_n$ sont des complexes, et l'inconnue est une fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dérivable n fois .

Soit $P = a_n X^n + \cdots + a_0$ un polynôme à coefficients complexes.

On note $\mathcal{E}_P$ l'équation différentielle $(\star)$ ci-dessus, et E_P l'ensemble de ses solutions.

1. Soit P un polynôme de degré n, c'est-à-dire $P = a_n X^n + \cdots + a_0$ avec $a_n \neq 0$, et y une solution de l'équation $\mathcal{E}_P$, c'est-à-dire une fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dérivable n fois vérifiant l'équation $\mathcal{E}_P$.

   Démontrer que y est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

On note dorénavant $\mathcal{C}^\infty$ l'espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Pour tout polynôme $P = a_n X^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ on définit l'application :

$$\begin{aligned} \Phi_P : \mathcal{C}^\infty &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty \\ y &\longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}. \end{aligned}$$

2. Démontrer que l'application Φ_P est bien définie et que c'est un endormorphisme de $\mathcal{C}^\infty$.

   Quel est son noyau ?

3. Démontrer que l'application $\begin{aligned} \Phi : \mathbb{C}[X] &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{C}^\infty) \\ P &\longmapsto \Phi_P \end{aligned}$ est linéaire.

4. Démontrer que pour tous polynômes $P = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i$ et $Q = \sum_{j=0}^{n} b_j X^j$: $\quad \Phi_{PQ} = \Phi_P \circ \Phi_Q$.

5. Soit P et Q deux polynômes premiers entre eux.

   On souhaite démontrer que $E_{PQ} = E_P \oplus E_Q$.

   On note $R = PQ$.

   (a) Justifier que E_P et E_Q sont des sous-espaces vectoriels de E_R.

   (b) Justifier qu'il existe deux polynômes U et V tels que :

   $$\forall y \in \mathcal{C}^\infty \qquad y = \Phi_P \circ \Phi_U(y) + \Phi_Q \circ \Phi_V(y).$$

   (c) En déduire que $E_R = E_P + E_Q$.

   (d) Démontrer de même que E_P et E_Q sont en somme directe, et conclure.

6. Soit α un complexe, n un entier naturel non-nul et $P = (X - \alpha)^n$.
   (a) Soit $y \in \mathcal{C}^\infty$ et $z : t \mapsto e^{-\alpha t} y(t)$. Démontrer que : $\quad y \in E_P \iff z^{(n)} = 0$
   (b) En déduire que $E_P = \{t \mapsto A(t)e^{\alpha t} \mid A \in \mathbb{C}_{n-1}[X]\}$.
   (c) Donner la dimension de E_P.
7. Démontrer par récurrence forte sur le degré de P :

$$\forall P \in \mathbb{C}[X] \qquad \dim E_P = \deg P.$$

On peut maintenant démontrer (mais ce n'est pas demandé) le théorème suivant :

Théorème. *Soit $a_0, \ldots, a_n$ des complexes et $\mathcal{E}$ l'équation différentielle :*

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Soit $P = a_n X^n + \cdots + a_0$, soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ ses racines complexes, $m_1, \ldots, m_r$ leurs ordres de multiplicité respectifs, si bien que :

$$P = a_n \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k}.$$

Alors les solutions de l'équation différentielle $\mathcal{E}$ sont les fonctions y définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) = \sum_{k=1}^{r} A_k(t) e^{-\alpha_k t} \qquad \textit{avec} \qquad \forall k = 1, \ldots r \quad A_k \in \mathbb{C}_{k-1}[X].$$

De plus, l'ensemble de toutes ces solutions est un espace vectoriel de dimension $\deg P$.

8. Résoudre dans $\mathcal{C}^\infty$ l'équation différentielle :

$$y^{(4)} - 11y^{(2)} + 18y^{(1)} - 8y = 0.$$