TD. C2
Variables aléatoires

Exercices de cours

1 Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un univers fini. Démontrer que X est constante si et seulement si sa variance est nulle (utiliser le théorème de transfert.)

2 Soit a et b deux entiers avec $a \leqslant b$ et X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'ensemble $[\![a, b]\!]$.
Déterminer l'espérance et la variance de X.

3 Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire X suivant une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$.

4 Aldo et Bob jouent à pile ou face avec une pièce truquée qui donne pile avec la probabilité $p \in]0,1[$.
Bob donne 30 euros à Aldo, puis il jette dix fois la pièce. Il récupère 8 euros à chaque Pile qu'il obtient.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de Piles obtenus, Y la variable aléatoire égale au gain de Bob.

a. Justifier que X suit une loi binomiale, donner ses paramètres et son espérance.
b. Exprimer Y en fonction de X et calculer $E(Y)$.
c. À quelle condition Bob a-t-il intérêt à jouer ?

5 On possède un sac contenant n jetons numérotés de 1 à n (avec $n \geqslant 2$).
On pioche l'un après l'autre deux jetons de ce sac, sans les remettre, et on note X et Y les variables aléatoires égales au premier et au second numéro obtenu.

a. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).
   En déduire ses lois marginales, ainsi que leurs espérances et leurs variances.
b. Déterminer directement la loi de X.
   Donner, pour tout $i \in X(\Omega)$, la loi de Y conditionnée par $X = i$.
   Retrouver ainsi la loi du couple (X, Y).
c. Calculer la covariance du couple (X, Y) et la variance de $X + Y$.
d. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
e. Calculer le coefficient de corrélation linéaire du couple (X, Y).
   Que peut-on dire de ses valeurs extrêmes ?

6 Soit (X, Y) le couple de variables aléatoires dont la loi est donnée par le tableau suivant :

$Y \backslash X$	0	1	2
0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$

Calculer les espérances de X, Y et XY, puis les variances de X et de Y. Que peut-on en déduire ?

Travaux dirigés

1 Soit X une variable aléatoire finie à valeurs dans $\mathbb{N}$. La *fonction génératrice* de X est définie par :
$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad G_X(t) = \sum_{k \in X(\Omega)} P(X = k)t^k$$

a. Justifier que deux variables aléatoires X et Y suivent la même loi si et seulement si elles ont même fonction génératrice.
b. Que valent $G_X(1)$ et $G'_X(1)$?
c. Exprimer $V(X)$ en fonction de G_X, G'_X et G''_X.
d. On suppose que X suit une loi binomiale.
   Utiliser la fonction génératrice de X pour retrouver $E(X)$ et $V(X)$.
e. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   Démontrer que si X et Y sont indépendantes alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.
   On pourra remarquer que $G_X(t) = E(t^X)$.

2 Soit X suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.
Déterminer l'espérance de $\frac{1}{1+X}$.

3 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $U = X + Y$ et $V = X - Y$.

a. Déterminer la loi conjointe du couple (U, V) puis ses lois marginales.
b. Calculer la covariance du couple (U, V).
   Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

4 Démontrer que deux variables aléatoire de Bernoulli sont indépendantes si et seulement si leur covariance est nulle.

5 On jette n dés ($n \geqslant 1$), et on note X et Y les variables aléatoires égales aux nombres de 1 et de 6 obtenus.

a. Déterminer les lois suivies par X et Y, leurs espérances et leurs variances.

b. Reconnaître, pour tout $j \in Y(\Omega)$, la loi de X sachant $Y = j$.

c. En déduire la loi conjointe du couple (X, Y).

d. X et Y sont-elles indépendantes ?

e. Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Vérifier par le calcul.

f. Calculer la covariance du couple (X, Y) puis son coefficient de corrélation linéaire.

6 On pioche deux boules successivement et sans remise dans une urne contenant n boules dont a noires, avec $0 < a < n$, les autres étant blanches.

On note X_1 et X_2 les variables aléatoires égales à 1 si la première boule, respectivement la seconde, est noire, et à 0 sinon.

a. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2), ainsi que ses lois marginales.

b. Démontrer que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

c. Calculer la covariance du couple (X_1, X_2).

d. Soit $X = X_1 + X_2$. Quel sens donner à X ?

Calculer la loi de X, son espérance et sa variance.

7 On pioche une par une et sans remise des boules d'une urne contenant n boules indiscernables ($n \geqslant 2$) dont une est blanche, une est noire, et les autres sont rouges.

Soit X et Y les variables aléatoires égales aux rangs d'arrivée respectifs de la boule blanche et de la boule noire.

a. Donner les lois de X, Y, leurs espérances et leurs variances.

b. Donner la loi conjointe du couple (X, Y).

c. Donner la loi de $Z = X - Y$, puis son espérance et sa variance.

d. En déduire la covariance du couple (X, Y), puis la variance de $X + Y$.

e. Donner la loi de $D = |X - Y|$, puis son espérance et sa variance.

8 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. On suppose que X suit une loi binomiale de paramètres (n, p) et que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, si $X = k$ a lieu alors Y suit une loi binomiale de paramètres (k, a).

a. Déterminer la loi de Y.

b. Reconnaître cette loi et expliquer.

9 On tire simultanément trois boules d'une urne contenant a boules rouges, b boules jaunes et c boules bleues, avec a, b, c strictement supérieurs à 1. On note X, Y, Z les variables aléatoires égales aux nombres de boules rouges, jaunes et bleues respectivement.

a. Démontrer que X, Y, Z ne sont pas deux-à-deux indépendantes.

b. Calculer $E(X) + E(Y) + E(Z)$.

c. Démontrer que $V(X + Y) = V(Z)$.

10 On lance d fois un dé équilibré ($d \in \mathbb{N}^*$) et on note n le nombre de six obtenus. On lance n fois une pièce qui donne pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$. On définit les variables aléatoires :

Z : le nombre de six obtenus aux lancers du dé,
X : le nombre de piles obtenus,
Y : le nombre de faces obtenus.

a. Quelle est la loi de Z ?

b. Pour n fixé quelle est la loi de X sachant $Z = n$?

c. En déduire la loi de X. Reconnaître cette loi, décrire de même la loi de Y.

d. Calculer la covariance du couple (X, Y), puis son coefficient de corrélation linéaire.

11 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires tel que $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$ avec $n \geqslant 1$, et pour tout couple (i, j) de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$:

$$P(X = i \cap Y = j) = \begin{cases} \lambda & \text{si } 0 \leqslant i + j \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a. Calculer la valeur de λ.

b. Calculer les lois de X et de Y.

Ces variables sont-elles indépendantes ?

c. Calculer la loi de $Z = X + Y$.

d. Calculer les espérances de X, Y et Z.

e. Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que Z suit la même loi que $aX + b$.

f. En déduire la valeur du coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.

12 Un repas réunit n convives ($n \geqslant 2$) portant tous un chapeau. En partant chacun prend un chapeau au hasard.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ on note A_i l'événement «le convive i part avec son propre chapeau».

a. Déterminer la probabilité des événements A_i et $A_i \cap A_j$ pour tous $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

b. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de convives qui partent avec leurs propres chapeaux.

Calculer l'espérance de X puis sa variance.

13 Soit N et a entiers tels que $0 < a < N$. On possède une urne contenant N boules, dont a sont noires et $b = N - a$ sont blanches.

On pioche sans remise n boules successivement dans l'urne, avec $n \in [\![0, N]\!]$.

Pour tout $k = 1, \dots, n$ on note X_k la variable aléatoire égale à 1 si la k-ème boule est noire, et à 0 sinon.

a. Déterminer, pour tout $k = 1, \dots, n$, la loi de X_k.

b. Déterminer, pour tout $i, j = 1, \dots, n$, la loi de $X_i X_j$.

c. Soit $X = X_1 + \cdots + X_n$.

Calculer l'espérance et la variance de X.

d. Reproduire l'exercice en supposant que l'on remet la boule obtenue après chaque tirage.

Que retrouve-t-on ?

Comparer l'espérance et la variance obtenues avec celles de la partie précédente.

14 Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de lois identiques et indépendantes, d'espérance m et d'écart-type σ.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$T_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n).$$

a. Déterminer l'espérance et l'écart-type de T_n en fonction de m, σ et n.

b. Démontrer que pour tout $a > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} P(|T_n - m| \geqslant a) = 0$$

c. Calculer l'espérance de la variable aléatoire :

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - T_n)^2$$

15 Soit X une variable aléatoire, d'espérance m et d'écart-type σ. Soit a un réel strictement positif.

a. Démontrer que pour tout $t > 0$:

$$E\big((X - m + t)^2\big) = \sigma^2 + t^2$$

b. En déduire que pour tout $t > 0$:

$$P(X - m \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2 + t^2}{(a+t)^2}$$

c. Démontrer que :

$$P(X - m \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$$

d. En considérant la variable aléatoire $-X$, démontrer que :

$$P(|X - m| \geqslant a) \leqslant \frac{2\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$$

Cette majoration est-elle meilleure que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ?