Chapitre C2
Variables aléatoires

I. Lois usuelles

A. Loi constante

Définition

Une variable aléatoire X suit une loi *constante*, ou *certaine*, si elle ne peut prendre qu'une seule valeur, *i.e.*, si $X(\Omega)$ est un singleton : $X(\Omega) = \{b\}$ où b est un réel.

Proposition

Si X suit une loi constante égale à b alors :

$$E(X) = b \qquad V(X) = 0 \qquad \sigma(X) = 0$$

▷ **Exercice 1.**

B. Loi uniforme

Définition

Une variable aléatoire X suit une loi *uniforme* de *paramètre* $n \in \mathbb{N}^*$ si :

$$X(\Omega) = [\![1, n]\!] \qquad \text{et} \qquad \forall k \in X(\Omega) \qquad P(X = k) = \frac{1}{n}$$

On note alors $X \sim \mathcal{U}(n)$ ou $X \hookrightarrow \mathcal{U}(n)$.

Proposition

Si X suit une loi uniforme de paramètre n alors :

$$E(X) = \qquad V(X) = \qquad \sigma(X) =$$

Démonstration. Voir exercice de cours 19 de la feuille de TD C1. □

Remarque. Plus généralement, si E est un ensemble fini alors X suit une loi uniforme sur E si pour x appartenant à E les $P(X = x)$ sont égaux. On note alors $X \sim \mathcal{U}(E)$.

▷ **Exercice 2.**

C. Loi de Bernoulli

Définition

(Jacques Bernoulli, Suisse, 1654 – 1705). Une variable aléatoire suit une *loi de Bernoulli* de *paramètre* $p \in [0,1]$ si elle prend les valeurs 1 et 0, avec les probabilités respectives p et $q = 1 - p$:

On note alors $X \sim \mathscr{B}(p)$ ou $X \sim \mathscr{B}(1,p)$.

Proposition

Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p alors :

$E(X) =$ $V(X) =$ $\sigma(X) =$

▷ **Exercice 3.**

Remarques.

- La loi de Bernoulli est la loi indicatrice d'un événement A de probabilité p :
  La variable aléatoire prend la valeur 1 si A a lieu et 0 sinon.
- Une variable aléatoire suit une loi de Bernoulli si et seulement si $X(\Omega) = \{0,1\}$.
  Son paramètre est alors $p = P(X = 1)$.

D. Loi binomiale

Définition

On réalise n expériences identiques et indépendantes. Soit A un événement pouvant résulter de cette expérience, et p la probabilité de A. On note $q = 1 - p$.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de réalisations de l'événement A au cours des n expériences. On dit alors que X suit une *loi binomiale* de *paramètres* n et p, et on note $X \sim \mathscr{B}(n,p)$.

Proposition

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p alors :

$X(\Omega) =$ $\forall k \in X(\Omega)$ $P(X = k) =$

$E(X) =$ $V(X) =$

Remarques.

- Si $n = 1$ alors on retrouve la loi de Bernoulli, ce qui justifie la notation $\mathscr{B}(1, p)$ pour celle-ci.
- La formule du binôme montre qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité de X.

Démonstration. Sur n expériences le nombre de réalisation de l'événement A est un entier compris entre 0 et n, donc $X(\Omega) = \{0, \dots, n\}$

Soit k un entier compris entre 0 et n. L'événement $X = k$ se produit si au cours des n expériences l'événement A a lieu exactement k fois. Dans ce cas l'événement contraire $\overline{A}$ a lieu $(n - k)$ fois.

Parmi les n expériences, k d'entre elles voient l'événement A se produire. Le nombre de façons de choisir k expériences parmi n est $\binom{n}{k}$.

Si les k expériences sont fixées, la probabilité que l'événement A se réalise lors de ces k expériences et l'événement B se réalise lors des $(n - k)$ autres expériences est $p^k q^{n-k}$, car toutes les expériences sont mutuellement indépendantes.

On obtient donc $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$. □

Démonstration de la formule pour l'espérance.

Démonstration de la formule pour la variance.

On calcule $E(X(X-1))$ plutôt que $E(X^2)$:

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\, P(X = k) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\, \frac{n!}{k!(n-k)!}\, p^k q^{n-k} \\ &= n(n-1) \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} p^k q^{n-k} = n(n-1)p^2 \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} p^i q^{n-2-i} \\ &= n(n-1)p^2 \end{aligned}$$

▷ **Exercice 4.**

II. Couples de variables aléatoires

A. Définitions

Définition

Un *couple de variables aléatoires* est un couple (X, Y) de variables aléatoires définies sur un même univers.

Exemple 1. On jette deux dés. On nomme X et Y les variables aléatoires égales respectivement au plus petit et au plus grand numéro obtenu.
Calculer la loi conjointe du couple (X, Y), puis les lois marginales de X et de Y.

Définitions

La *loi conjointe* du couple (X, Y) est la donnée des réels :

$$\begin{array}{ll} & P(X = x \ \cap \ Y = y) \\ \text{ou} & P(X = x, Y = y) \qquad \text{pour tout } x \in X(\Omega) \text{ et } y \in Y(\Omega). \end{array}$$

Les *lois marginales* du couple (X, Y) sont les lois de X et de Y.

Remarque. Un couple de variables aléatoires sur Ω est une *fonction vectorielle* sur Ω, c'est-à-dire une fonction de Ω dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{rcl} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$$

Proposition

Les lois marginales sont données par les formules :

$$\begin{array}{llcl} \forall x \in X(\Omega) & P(X = x) & = & \displaystyle\sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x \ \cap \ Y = y) \\ \forall y \in Y(\Omega) & P(Y = y) & = & \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x \ \cap \ Y = y) \end{array}$$

Démonstration. La famille $\{Y = y \mid y \in Y(\Omega)\}$ est un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne, quel que soit $x \in X(\Omega)$:

$$P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P_{Y=y}(X = x)\, P(Y = y)$$

Ceci donne la première formule, la seconde se démontre de façon similaire. □

Remarques.

- En conséquence :

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x, Y = y) = 1$$

- La connaissance de la loi conjointe du couple (X, Y) permet de retrouver les lois marginales, mais l'inverse est faux.

▷ **Exercice 5 (a).**

B. Propriétés

Définition

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. On dit que X et Y *suivent la même loi* si :

On note alors $X \sim Y$.

Remarque. Ceci ne signifie pas que X et Y sont égales.

Exemple. On jette deux dés. Soit X et Y les variables aléatoires égales aux numéros donnés respectivement par le premier et le second dé.

Alors X et Y sont différentes mais suivent toutes les deux la loi $\mathscr{U}(6)$.

Proposition

Si $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ est une fonction et X et Y sont deux variables aléatoires suivant la même loi alors $f(X)$ et $f(Y)$ suivent la même loi.

Proposition (Croissance de l'espérance)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires sur Ω.
On suppose que $X \leqslant Y$, *i.e.*, que pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \leqslant Y(\omega)$. Alors $E(X) \leqslant E(Y)$.

<u>Démonstration</u>. On utilise l'autre définition de l'espérance. Comme :

$$\forall \omega \in \Omega \qquad X(\omega) \leqslant Y(\omega) \qquad \text{et} \qquad P(\{\omega\}) \geqslant 0$$

Alors par somme :

$$\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\}) \leqslant \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) P(\{\omega\})$$

Ceci donne bien $E(X) \leqslant E(Y)$. $\square$

Exemple. On jette deux dés. Soit X_1 et X_2 les variables aléatoires égales aux numéro du premier dé et du second dé.

Soit $X = \operatorname{Max}\{X_1, X_2\}$.

Théorème de transfert généralisé

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires, et $f : X(\Omega)\times Y(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors l'espérance de la variable aléatoire $f(X,Y)$ est :

$$E(f(X,Y)) = \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} f(x,y)P(X=x\cap Y=y)$$

<u>Démonstration</u>. Il s'agit du théorème de transfert, en notant Z la variable aléatoire égale au couple (X,Y), *i.e.*,

$$\begin{aligned} Z : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \omega &\longmapsto (X(\omega),Y(\omega)). \end{aligned}$$ □

Exemple. L'espérance du produit de deux variables aléatoires X et Y est :

$$E(XY) = \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} xyP(X=x\cap Y=y)$$

C. Lois conditionnelles

Définitions

Soit A un événement et X une variable aléatoire, tous deux définis sur un univers Ω. La *loi de X conditionnée par A*, ou la *loi de X sachant A* est l'ensemble des réels :

$$P_A(X=x) \qquad \text{avec } x \text{ parcourant } X(\Omega)$$

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires. La *loi de X conditionnée par Y*, ou la *loi de X sachant Y* est l'ensemble des réels :

$$P_{Y=y}(X=x) \qquad \text{avec } (x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$$

▷ **Exercice 5 (b).**

D. Somme de variables aléatoires

Proposition

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires finies entières. Soit $Z = X+Y$ leur somme. Alors pour tout $n\in Z(\Omega)$:

$$P(Z=n) =$$

<u>Démonstration</u>. Soit $N = \max X(\Omega)$. La famille $\{X=k \mid 0\leqslant k\leqslant N\}$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, pour tout $n\in Z(\Omega)$:

$$P(Z=n) = \sum_{k=0}^{N} P_{X=k}(Z=n)P(X=k) = \sum_{k=0}^{N} P(Z=n\cap X=k)$$

Or : $\qquad (Z=n\cap X=k) = (X+Y=n\cap X=k) = (Y=n-k\cap X=k)$

D'où le résultat, en ajoutant que cet événement est impossible si $k\geqslant n$. □

Théorème (Linéarité de l'espérance)

Pour tout couple de variables aléatoires (X, Y) et tous réels a et b :

Remarque. Ceci est faux en général pour $V(X+Y)$ et $\sigma(X+Y)$.

Démonstration.

E. Covariance

Définition

La *covariance* d'un couple de variables aléatoires (X, Y) est :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)])$$

Proposition (Formule de König-Huyghens)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires sur un univers fini. Alors :

Démonstration. Il suffit d'utiliser la linéarité de l'espérance. □

Remarque. Par théorème de transfert généralisé :

▷ **Exercice 5 (c).**

Remarques.

- Pour toute variable aléatoire X :

$$\mathrm{Cov}(X, X) =$$

- La covariance peut être positive ou négative. Lorsqu'elle est négative, ceci signifie que la variable Y a tendance à prendre des grandes valeurs lorsque X en prend des petites, et vice-versa.
- De façon analogue à la formule $V(aX + b) = a^2V(X)$:

$$\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \qquad \mathrm{Cov}(aX + b, cY + d) =$$

Nous verrons que la covariance est *bilinéaire*.

Proposition

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. Alors :

$$V(X + Y) =$$

Remarque. La covariance peut donc être calculée par la formule :

Démonstration.

III. Indépendance

A. Variables aléatoires indépendantes

Définition

Deux variables aléatoires X et Y sont *indépendantes* si :

On note alors $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Remarque. Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout $y \in Y(\Omega)$ la loi de X sachant $Y = y$ est égale à la loi de X :

$$\forall y \in Y(\Omega) \quad \forall x \in X(\Omega) \qquad P_{Y=y}(X = x) = P(X = x)$$

Proposition

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si :

$$\forall A \subseteq X(\Omega) \quad \forall B \subseteq Y(\Omega) \qquad P((X,Y) \in A \times B) = P(X \in A) \times P(Y \in B)$$

Démonstration. Le sens indirect est évident, en posant $A = \{x\}$ et $B = \{y\}$.
Pour le sens direct, on suppose que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, et on considère A une partie de $X(\Omega)$, B une partie de $Y(\Omega)$. Alors :

$$P(X \in A) = \sum_{a \in A} P(X = a) \qquad \text{et} \qquad P(Y \in B) = \sum_{b \in B} P(Y = b)$$

Par indépendance de X et Y on en déduit :

$$P(X \in A) \times P(Y \in B) = \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} P(X = a \cap Y = b)$$

Ceci donne, comme prévu :

$$P(X \in A) \times P(Y \in B) = \sum_{(a,b) \in A \times B} P(X = a \cap Y = b) = P((X,Y) \in A \times B) \qquad \square$$

Remarque. Si deux variables aléatoires sont indépendantes alors on peut retrouver leur loi conjointe à partir de leurs lois marginales.

Exemple. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires indépendantes dont les lois sont données par les tableaux ci-dessous.

x	0	3	5	6
$P(X = x)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

y	1	2	3
$P(Y = y)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{2}{10}$

Alors la loi conjointe du couple (X, Y) est donnée par le tableau suivant.

Y \ X					Loi de Y
Loi de X					

▷ **Exercice 5 (d).**

Proposition

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.
Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes alors les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ le sont aussi.

Exemple. Si X et Y sont indépendantes alors X^2 et Y^2 sont indépendantes.

Démonstration. On vérifie la définition de l'indépendance de deux variables aléatoires :

$$\forall x \in f(X(\Omega)) \quad \forall y \in g(Y(\Omega))$$
$$P(f(X) = x \cap g(Y) = y) = P(f(X) = x) \times P(g(Y) = y)$$

Pour ceci on écrit :

$$P(f(X) = x) \times P(g(Y) = y) = P(X \in f^{-1}(\{x\})) \times P(Y \in g^{-1}(\{y\}))$$

Comme X et Y sont indépendantes alors par propriété :

$$\begin{aligned} P(f(X) = x) \times P(g(Y) = y) &= P\big((X, Y) \in f^{-1}(\{x\}) \times g^{-1}(\{y\})\big) \\ &= P\Big(\big(X \in f^{-1}(\{x\})\big) \cap \big(Y \in g^{-1}(\{y\})\big)\Big) \\ &= P(f(X) = x \cap g(Y) = y) \end{aligned}$$

L'égalité est démontrée pour tout $x \in f(X(\Omega))$ et $y \in g(Y(\Omega))$ donc les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes. □

Remarque. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On généralise la notion de couple de variables aléatoires aux n-uplets de variables aléatoires définies sur un même univers Ω : un n-uplet $(X_1, \dots, X_n)$ de variables aléatoires réelles sur Ω est une application de Ω dans $\mathbb{R}^n$.

Définition

Des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ définies sur un même univers sont *mutuellement indépendantes* si :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i(\Omega) \qquad P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)$$

Proposition

Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes si et seulement si pour toute famille $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de $\prod_{i=1}^{n} \mathscr{P}(X_i(\Omega))$ les événements $(X_i \in A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont mutuellement indépendants.

Proposition (Lemme des coalitions)

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, p un entier tel que $1 \leqslant p < n$. Soit f une fonction de p variables, définie sur $\prod_{i=1}^{p} X_i(\Omega)$, g une fonction de $n-p$ variables, définie sur $\prod_{i=p+1}^{n} X_i(\Omega)$.
Alors les variables aléatoires $f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Remarque. Ceci se généralise à plus de deux coalitions.

B. Indépendance et corrélation

Remarque. Les formules pour la covariance montrent que pour tout couple de variables aléatoires (X, Y) :

$$E(XY) = E(X)E(Y) \iff V(X+Y) = V(X) + V(Y) \iff \operatorname{Cov}(X, Y) = 0$$

Dans cette situation on dit que X et Y sont *décorrélées*.

Proposition

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. Si X et Y sont indépendantes alors :

(i) $E(XY) = E(X)E(Y)$ *(ii)* $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ *(iii)* $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$.

La réciproque est fausse en général.

Démonstration.

T.S.V.P.

Remarques.

- La propriété $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ est toujours vraie, alors que la propriété $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ est vraie si X et Y sont indépendantes.
- Si X et Y sont indépendantes alors :

$$V(X-Y) =$$

▷ **Exercice 6.**

Corollaire

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-uplet de variables aléatoires. Si les X_k sont deux-à-deux indépendantes alors :

$$V(X_1 + \cdots + X_n) = V(X_1) + \cdots + V(X_n)$$

<u>Démonstration</u>. On démontre par récurrence que :

$$V(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

Le corollaire en découle. □

Remarque. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires non constantes.
Le *coefficient de corrélation linéaire* de X et Y est le réel :

$$r = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Nous démontrerons qu'il est toujours compris entre -1 et 1 : $r \in [-1, 1]$

Si X et Y sont indépendantes alors $r = 0$.

Si $r = \pm 1$ alors il existe a et b tels que $P(Y = aX + b) = 1$: X et Y sont linéairement corrélées.

Si $r = 1$ alors a est positif, si $r = -1$ alors a est négatif.

▷ **Exercice 5 (e).**

C. Application à la loi binomiale

Lemme

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, X suivant une loi binomiale de paramètres (n, p), et Y suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. Alors $X + Y$ suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n + 1, p)$.

Démonstration. On note $q = 1 - p$, et $Z = X + Y$

On vérifie également que :

$$P(Z = 0) = P(X = 0 \cap Y = 0) = P(X = 0)P(Y = 0) = q^{n+1}$$

$$\text{et} \qquad P(Z = n + 1) = P(X = n \cap Y = 1) = P(X = n)P(Y = 1) = p^{n+1}$$

La variable aléatoire Z suit donc bien une loi $\mathscr{B}(n + 1, p)$. □

Corollaire

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$.

Alors $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.

Démonstration. Par récurrence sur n, en utilisant le lemme précédent. □

Remarque. Ceci donne par linéarité : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$

Comme de plus les X_i sont mutuellement indépendantes alors : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$

On en déduit que : $E(X) = \sum_{k=1}^{n} p = np \qquad V(X) = \sum_{i=1}^{n} pq = npq$

Ceci prouve de nouveau les formules pour l'espérance et la variance d'une loi binomiale.

Corollaire

Soit X et Y deux variables indépendantes, X suivant une loi binomiale de paramètres (n, p), et Y suivant une loi binomiale de paramètres (m, p). Alors $Z = X + Y$ suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n + m, p)$.

Démonstration. On pose $Y = \sum_{k=1}^{m} Y_k$ et on applique le lemme m fois. $\square$

IV. Inégalités probabilistes

Théorème - Inégalité de Markhov

Andreï Markhov, Russie, 1856 – 1922. Soit X une variable aléatoire sur un univers fini, positive (i.e., telle que $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}_+$). Alors :

Remarques.

- Ce théorème est très général, il est valable pour toute variable aléatoire dès qu'elle admet une espérance.
- Si a grandit alors X a de moins en moins de chances d'être supérieur à a. En particulier la limite de $P(X \geqslant a)$ est nulle lorsque a tend vers $+\infty$.
- L'inégalité est évidente si $a \leqslant E(X)$, car alors $\frac{E(X)}{a} \geqslant 1$.

Démonstration.

Théorème - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Irénée-Jules Bienaymé, France, 1796 – 1878, Pafnouti Tchebychev, Russie, 1821-1894.
Si X est une variable aléatoire sur un univers fini alors :

Remarques.

- Ce théorème est également très général, il est valable pour toute variable aléatoire dès qu'elle admet une espérance et une variance.
- Si a est grand alors X est rarement hors de l'intervalle $]E(X) - a, E(X) + a[$.

  Ceci montre qu'une variable aléatoire est rarement éloignée de sa moyenne.

  De plus, comme la majoration fait intervenir la variance, celle-ci est bien un paramètre de dispersion.
- L'inégalité est évidente si $a \leqslant \sigma(X)$, car alors $\frac{V(X)}{a^2} \geqslant 1$.

Démonstration. Soit $Y = (X - E(X))^2$.

Cette variable aléatoire est positive donc on peut lui appliquer l'inégalité de Markhov.

Soit a un réel strictement positif. Alors a^2 est strictement positif donc d'après l'inégalité de Markhov :

$$P(Y \geqslant a^2) \leqslant \frac{E(Y)}{a^2}$$

Par définition de la variance : $E(Y) = E((X - E(X))^2) = V(X)$

De plus :

$$Y \geqslant a^2 \iff (X - E(X))^2 \geqslant a^2 \iff |X - E(X)| \geqslant a$$

On en déduit bien :

$$P(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}. \qquad \square$$