Lycée Bellevue – Toulouse **Année 2025-2026**
MPSI – Mathématiques

Programme de colles
Semaine 24
du 6 au 10 avril 2026

Questions de cours

Sauf mention explicite il faut connaître l'énoncé et la démonstration.

1. Théorème fondamental de l'analyse, en admettant l'égalité de la moyenne.
2. Second corollaire du théorème fondamental.
3. Énoncés : formule de Taylor avec reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange. Démonstration de cette dernière en supposant $a \leqslant x$.
4. Une famille libre maximale est une base.

Exercices

Chapitre B9. Applications linéaires

I. Généralités
II. Image et Noyau
III. Projecteurs et symétries
IV. Formes linéaires
V. Sous-espaces affines

Programme prévisionnel de la semaine suivante

Chapitre A12 (Intégration).

Chapitre B9. Applications linéaires

I. Généralités

Application linéaire, caractérisation. Endomorphisme, notations $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{L}(E)$. Exemples : identité, application nulle, homothéties. Combinaisons linéaires, composées d'applications linéaires. Bilinéartié de $(g,f) \mapsto g \circ f$, $\mathscr{L}(E)$ est un anneau. Isomorphismes, notation $\mathrm{GL}(E)$. Restriction à un sev.

Une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions à deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

II. Image et Noyau

Image et image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire. Image et noyau. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité. L'ensemble des solutions de $f(u) = b$ d'inconnue b est un sous-espace affine.

III. Projecteurs et symétries

Définitions des projecteurs et symétrie. Caractérisations : $p \circ p = p$ et $s \circ s = \mathrm{Id}$.

IV. Formes linéaires

Définition, exemples (spécialisation d'un poynôme, d'une fonction, d'une suite). Forme linéaire coordonnée e_i^*. Toute forme linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}$ est de la forme $(x_1, \dots, x_p) \mapsto a_1x_1 + \cdots + a_px_p$.

Une application de E dans $\mathbb{K}^n$ est linéaire ssi toutes ses composantes sont linéaires.

Droites et hyperplans : une droite est un sev engendré par un vecteur non-nul, un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non-nulle. Si H est un hyperplan alors toute droite vectorielle non contenue dans H en est un supplémentaire. Tout supplémentaire d'une droite vectorielle est un hyperplan. Unicité à homothétie près de la forme linéaire définissant un hyperplan.

V. Sous-espaces affines

Translation, sous-espace affine. Unicité de la direction. Intersection de deux sous-espaces affines.

Théorème : si $f : E \to F$ est linéaire et $v \in F$ alors l'ensemble des vecteurs $u \in E$ tels que $f(u) = v$ est un sous-espace affine de E. Exemples classiques :ensembles des solutions d'un système linéaire, d'une équation différentielle linéaire.