Corrigé du T. D. B10
Dimension

1 Soit $E = \mathbb{R}^3$, $F = \text{Vect}\,(u_1, u_2)$ avec : $\quad u_1 = (3, 10, 10) \quad$ et $\quad u_2 = (6, 7, -6)$.
Soit $G = \{\,(x, y, z) \in E \mid\ 10x - 6y + 3z = 0\}$.

a. Donner la dimension de F est démontrer qu'il est inclus dans G.

b. Justifier que G ne peut être de dimension 3 et en déduire que $F = G$.

a. Les vecteurs u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre. Cette famille est génératrice de F par définition de F. Elle est donc une base de F, et F est de dimension 2.
Les vecteurs u_1 et u_2 appartiennent à G car ils satisfont son équation :
En effet $10 \times 3 - 6 \times 10 + 3 \times 10 = 0$ et $10 \times 6 - 6 \times 7 + 3 \times (-6) = 0$.
De plus G est le noyau de la forme linéaire $(x, y, z) \mapsto 10x - 6y + 3z$ donc il est un sous-espace vectoriel de E. Il est donc stable par combinaisons linéaires.
Comme il contient u_1 et u_2 alors il contient $\text{Vect}\,(u_1, u_2)$, ce qui montre que F est inclus dans G.

b. On sait que G est un sous-espace vectoriel de E et que E est de dimension 3.
Si G est de dimension 3 alors par théorème :

$$(G \subseteq E \quad \text{et} \quad \dim G = \dim E) \quad \Longrightarrow \quad G = E$$

Mais G est différent de E : par exemple le vecteur $e_1 = (1, 0, 0)$ ne satisfait pas l'équation $10x - 6y + 3z = 0$, donc il n'appartient pas à G alors qu'il appartient à E.
On en déduit, par l'absurde, que G n'est pas de dimension 3. Comme il est un sous-espace vectoriel de E qui est de dimension 3 alors il est de dimension inférieure ou égale à 2 : $\quad \dim G \leqslant 2$.
De plus F est un sous-espace vectoriel de G est $\dim F = 2$, donc : $\quad \dim G \geqslant 2$.
Ainsi $\dim G = 2$, puis par théorème :

$$(F \subseteq G \quad \text{et} \quad \dim F = \dim G) \quad \Longrightarrow \quad F = G$$

On a démontré que $F = G$.

2 Soit $E = \mathbb{R}^4$. Déterminer le rang des familles de vecteurs suivantes :
$\mathcal{F}_1 = ((1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1))$
$\mathcal{F}_2 = ((1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 0))$
$\mathcal{F}_3 = \varnothing$
$\mathcal{F}_4 = ((1, 0, 0, 0), (2, 0, 0, 0), \ldots, (n, 0, 0, 0))\; n \in \mathbb{N}^*$
$\mathcal{F}_5 = ((1, 0, 0, 0), (2, 1, 0, 0), (3, 2, 1, 0),$
$\quad (4, 3, 2, 1), (5, 4, 3, 2))$

- Notons $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (0,0,1,1)$, $u_3 = (0,0,0,1)$ les trois vecteurs de $\mathcal{F}_1$.
  On constate que pour tout $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_E &\implies (\lambda_1, 0, \lambda_2, \lambda_2 + \lambda_3) = (0,0,0,0) \\ &\implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{aligned}$$

  Ceci montre que la famille $\mathcal{F}_1$ est libre.
  Elle est donc de rang 3 : $\operatorname{rg} \mathcal{F}_1 = 3$
  En effet, par définition le rang de la famille $\mathcal{F}_1$ est la dimension de $\operatorname{Vect}(\mathcal{F}_1)$, l'espace vectoriel qu'elle engendre. Or il est évident qu'elle est génératrice de cet espace vectoriel, donc c'est une base de celui-ci, qui ainsi est de dimension 3.
- On note $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (1,1,0,0)$, $u_3 = (1,1,1,0)$, $u_4 = (0,1,1,0)$ les quatre vecteurs de $\mathcal{F}_2$.
  On constate que $u_4 = u_3 - u_1$, donc :

$$\operatorname{Vect}(\mathcal{F}_2) = \operatorname{Vect}(u_1, u_2, u_3)$$

  La famille (u_1, u_2, u_3) est libre car pour tout $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_E &\implies (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_3, 0) = (0,0,0,0) \\ &\implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{aligned}$$

  Elle est donc un base de $\operatorname{Vect}(\mathcal{F}_2)$, lequel est donc de dimension 3, ce qui montre que la famille $\mathcal{F}_2$ est de rang 3 : $\operatorname{rg} \mathcal{F}_2 = 3$
- La famille vide engendre l'espace vectoriel réduit au vecteur nul : $\operatorname{Vect}(\varnothing) = \{0_E\}$
  Cet espace vectoriel est de dimension nulle, donc la famille vide est de rang nul : $\operatorname{rg} \mathcal{F}_3 = 0$
- Tous le vecteurs de la famille $\mathcal{F}_4$ sont des multiples de $u_1 = (1,0,0,0)$, donc :

$$\operatorname{Vect}(\mathcal{F}_4) = \operatorname{Vect}((1,0,0,0))$$

  Le vecteur $(1,0,0,0)$ est non-nul donc la famille $((1,0,0,0))$ est libre. Elle est donc une base de $\operatorname{Vect}(\mathcal{F}_4)$, lequel est ainsi de dimension 1, et donc la famille $\mathcal{F}_4$ est de rang 1 : $\operatorname{rg} \mathcal{F}_4 = 1$
- La famille $\mathcal{F}_5$ est une famille de cinq vecteurs de E, qui est de rang 4. Elle ne peut donc pas être de rang supérieur à 4.
  On note $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (2,1,0,0)$, $u_3 = (3,2,1,0)$, $u_4 = (4,3,2,1)$, $u_5 = (5,4,3,2)$ ses vecteurs. Alors on constate que :

$$2u_4 - u_3 = (8,6,4,2) - (3,2,1,0) = (5,4,3,2) = u_5$$

  Ainsi le vecteur u_3 est combinaison linéaires des vecteurs u_1, u_2, u_3, u_4, et donc :

$$\operatorname{Vect}(\mathcal{F}_5) = \operatorname{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$$

  Démontrons que la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est libre.

Soit λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 des scalaires tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = 0_E$. Alors :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

L'unique solution de ce système est $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (0,0,0,0)$, et donc la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est libre.

L'espace vectoriel qu'elle engendre est donc de dimension 4, ce qui montre que la famille $\mathcal{F}_5$ est de rang 4 : $\operatorname{rg} \mathcal{F}_5 = 4$

3 Démontrer qu'il existe une unique forme linéaire $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\varphi(1,1,1) = 3 \qquad \varphi(1,2,3) = 5 \qquad \varphi(1,3,6) = -2$$

Calculer $\varphi(u)$ pour tout élément $u = (x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$.

Notons $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,2,3)$ et $u_3 = (1,3,6)$.

On démontre que cette famille est libre. Soit λ_1, λ_2, λ_3 trois scalaires tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Alors ils satisfont le système :

$$S : \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Les opérations $(L_3 \leftarrow L_3 - L_2)$ puis $(L_2 \leftarrow L_2 - L_1)$ donnent :

$$S \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

L'opération $(L_3 \leftarrow L_3 - L_2)$ donne $\lambda_3 = 0$, puis on obtient $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 = 0$.

On a démontré que :

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \qquad \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0_{\mathbb{R}}$$

La famille (u_1, u_2, u_3) est donc libre.

Or elle contient trois vecteurs, et $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3. C'est donc une famille libre maximale de $\mathbb{R}^3$, et donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

On sait qu'une application linéaire est uniquement déterminée par l'image d'une base.

Or 3, 5, -2 sont trois éléments de $\mathbb{R}$, donc il existe une et une seule application linéaire φ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\varphi(u_1) = 3 \qquad \varphi(u_2) = 5 \qquad \varphi(u_3) = -2$$

On calcule maintenant $\varphi(u)$ pour tout vecteur $u = (x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$.

On sait que :

$$\varphi(1,1,1)=3 \qquad \varphi(1,2,3)=5 \qquad \varphi(1,3,6)=-2$$

Par linéarité de φ on calcule successivement :

$$\begin{aligned}
&\varphi(0,1,2)=\varphi(1,2,3)-\varphi(1,1,1)=2\\
&\varphi(0,1,3)=\varphi(1,3,6)-\varphi(1,2,3)=-7\\
&\varphi(0,0,1)=\varphi(0,1,3)-\varphi(0,1,2)=-9\\
&\varphi(0,1,0)=\varphi(0,1,2)-2\varphi(0,0,1)=20\\
&\varphi(1,0,0)=\varphi(1,1,1)-\varphi(0,1,0)-\varphi(0,0,1)=-8
\end{aligned}$$

On donc obtenu :

$$\varphi(e_1)=-8 \qquad \varphi(e_2)=20 \qquad \varphi(e_3)=-9$$

On peut donc en déduire :

$$\varphi(x,y,z)=\varphi(xe_1+ye_2+ze_3)=x\varphi(e_1)+y\varphi(e_2)+z\varphi(e_3)$$

Soit :

$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \qquad \varphi(x,y,z)=-8x+20y-9z$$

On vérifie que :

$$\varphi(1,1,1)=3 \qquad \varphi(1,2,3)=5 \qquad \varphi(1,3,6)=-2$$

4 Soit f l'application linéaire définie par :

$$f:\begin{array}{rcl}\mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (3x+3y+3z+3t,3x-3y+z+t,2x+2y+z+t)\end{array}$$

Calculer le noyau de f et démontrer que f est surjective.

Le noyau de f est l'ensemble des vecteurs (x,y,z,t) de $\mathbb{R}^4$ tels que $f(x,y,z,t)=(0,0,0)$, donc satisfaisant le système :

$$S:\left\{\begin{array}{l}3x+3y+3z+3t=0\\3x-3y+z+t=0\\2x+2y+z+t=0\end{array}\right.$$

On applique l'algorithme du pivot de Gauss :

$$S \iff \left\{\begin{array}{l}x+y+2z+2t=0\\-6y-5z-5t=0\\-3z-3t=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}x=0\\y=0\\z=-t\end{array}\right.$$

On en déduit :

$$\ker f=\{(0,0,-t,t)\mid t\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}\left((0,0,-1,1)\right)$$

Le vecteur $(0, 0, -1, 1)$ est non-nul, donc il forme une famille libre, celle-ci engendre le noyau de f, donc en est une base, et ainsi le noyau de f est de dimension 1.

D'après le théorème du rang, comme f est une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ alors :

$$\dim\ker f + \dim\operatorname{im} f = \dim\mathbb{R}^4$$

On en déduit : $\quad \dim\operatorname{im} f = 3$

Or l'image de f est incluse dans $\mathbb{R}^3$. Ainsi :

$$\operatorname{im} f \subseteq \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad \dim\operatorname{im} f = \dim\mathbb{R}^3 \qquad \text{donc} \qquad \operatorname{im} f = \mathbb{R}^3$$

Comme $\operatorname{im} f = \mathbb{R}^3$ alors f est surjective.

1 Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ on considère les sous-espaces vectoriels :

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z, t) \in E \mid 3x - y - z = 2y + t = 0\} \\ G &= \operatorname{Vect}(u_1, u_2, u_3) \quad \text{où} \quad u_1 = (1, -1, 2, 2) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\; u_2 = (2, 1, 4, -2) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\; u_3 = (1, 2, 2, -4) \end{aligned}$$

Donner une base et la dimension des sous-espaces vectoriels F, G, $F \cap G$, et $F + G$.

- Pour le sous-espace vectoriel F on écrit :

  $$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z, t) \in E \mid z = 3x - y \quad \text{et} \quad t = -2y\} \\ &= \left\{(x, y, 3x - y, -2y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \operatorname{Vect}((1, 0, 3, 0), (0, 1, -1, -2)) \end{aligned}$$

  On pose $v_1 = (1, 0, 3, 0)$ et $v_2 = (0, 1, -1, -2)$. Alors la famille (v_1, v_2) est génératrice de F. Elle est libre car ses deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Donc c'est une base de F.

  Elle contient deux vecteurs donc F est de dimension 2.
- La famille (u_1, u_2, u_3) engendre le sous-espace vectoriel G. On remarque que $u_3 = u_2 - u_1$, donc u_3 est combinaison linéaire de u_1 et u_2, et ainsi la famille (u_1, u_2) est génératrice de G.

  Or elle est libre car les vecteurs u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, donc c'est une base de G, et comme elle contient deux vecteurs alors G est de dimension 2.
- Soit u un vecteur de $F \cap G$.

  Alors $u \in G$ donc il existe deux scalaires λ_1 et λ_2 tels que $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$, ce qui s'écrit :

  $$u = (\lambda_1 + 2\lambda_2, -\lambda_1 + \lambda_2, 2\lambda_1 + 4\lambda_2, 2\lambda_1 - 2\lambda_2)$$

  Comme $u \in F$ alors il vérifie ses équations, ce qui donne :

  $$3(\lambda_1 + 2\lambda_2) - (-\lambda_1 + \lambda_2) - (2\lambda_1 + 4\lambda_2) = 2(-\lambda_1 + \lambda_2) + (2\lambda_1 - 2\lambda_2) = 0$$

Ces équations donnent par équivalence : $\lambda_2 = -2\lambda_1$
On en déduit :

$$u = \lambda_1 u_1 - 2\lambda_1 u_2 = \lambda_1(u_1 - 2u_2) = \lambda_1(-3,-3,-6,6) = -3\lambda_1(1,1,2,-2)$$

On pose $w_1 = (1,1,2,-2)$. On vient de montrer que si $u \in F \cap G$ alors $u \in \text{Vect}\,(w_1)$, ce qui donne : $F \cap G \subseteq \text{Vect}\,(w_1)$

Réciproquement, comme $w_1 = -\frac{1}{3}(u_1 - 2u_2)$ alors $w_1 \in G$ et comme w_1 vérifie les équations $3x - y - z = 2y + t = 0$ alors $w_1 \in F$. Ainsi $w_1 \in F \cap G$ et comme $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E alors il est stable par combinaisons linéaires, et donc $\text{Vect}\,(w_1) \subseteq F \cap G$.

Par double inclusion : $F \cap G = \text{Vect}\,(w_1)$

La famille (w_1) est génératrice de $F \cap G$. Elle est libre car elle contient un unique vecteur et celui-ci est non-nul. Donc c'est une base de $F \cap G$. Finalement, $F \cap G$ est de dimension 1.

- D'après la formule de Grassmann :

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

On calcule : $\dim(F+G) = 2 + 2 - 1 = 3$

Il reste à donner une base de $F+G$. Comme $F = \text{Vect}\,(v_1, v_2)$ et $G = \text{Vect}\,(u_1, u_2)$ alors :

$$F + G = \text{Vect}\,(u_1, u_2, v_1, v_2)$$

La famille (u_1, u_2, v_1, v_2) est génératrice de $F+G$, mais elle ne peut être libre car elle contient quatre vecteurs alors que $F+G$ est de dimension trois.

On essaie donc d'exprimer l'un de ses quatre vecteurs comme combinaison linéaire des trois autres.

On sait que $w_1 = -\frac{1}{3}(u_1 - 2u_2)$. Or :

$$w_1 = (1,1,2,-2) = (1,0,3,0) + (1,1,-1,-2) = v_1 + v_2$$

On peut en déduire, par exemple : $v_2 = -\frac{1}{3}(u_1 - 2u_2) - v_1$
Ainsi v_2 est combinaison linéaire des vecteurs u_1, u_2, v_1, donc :

$$F + G = \text{Vect}\,(u_1, u_2, v_1)$$

La famille (u_1, u_2, u_3) est génératrice de $F+G$. Or elle contient trois vecteurs et $F+G$ et de dimension 3, donc c'est une famille génératrice minimale, et ainsi c'est une base de $F+G$.
Grâce à ce dernier théorème, il est inutile de démontrer que la famille (u_1, u_2, v_1) est libre.

2 Dans $E = \mathbb{R}^3$ on note F le sous-espace vectoriel engendré par $u_1 = (7, 5, 0)$ et $u_2 = (6, 10, 5)$.

a. Démontrer que F est le plan vectoriel d'équation $5x - 7y + 8z = 0$.

b. Soit G la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u_3 = (8, 9, 3)$. Démontrer que G est un supplémentaire de F dans E.

a. Notons F' le plan vectoriel d'équation $5x - 7y + 8z = 0$. Alors on peut écrire :

$$\begin{aligned} F' &= \{(x,y,z) \in E \mid 5x - 7y + 8z = 0\} = \left\{ \left(x, y, -\frac{5}{8}x + \frac{7}{8}y\right) \;\middle|\; (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \operatorname{Vect}\left(\left(1, 0, -\frac{5}{8}\right), \left(0, 1, \frac{7}{8}\right) \right) \end{aligned}$$

Ceci montre que F' est bien un sous-espace vectoriel de E.

On constate que les vecteurs $u_1 = (7, 5, 0)$ et $u_2 = (6, 10, 5)$ vérifient l'équation $5x - 7y + 8z = 0$, ils appartiennent donc à F' : $\quad (u_1, u_2) \subseteq F'$

Comme F' est un sous-espace vectoriel de E alors il est stable par combinaisons linéaires, et ainsi : $\quad \operatorname{Vect}(u_1, u_2) \subseteq F'$

Ceci montre que $F \subseteq F'$.

Les vecteurs u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, donc la famille (u_1, u_2) est libre. Elle est génératrice de F, donc elle forme une base de F. Ainsi F est de dimension 2.

De même les vecteurs $v_1 = \left(1, 0, -\frac{5}{8}\right)$ et $v_2 = \left(0, 1, \frac{7}{8}\right)$ ne sont pas colinéaires, donc la famille (v_1, v_2) est libre. Elle est génératrice de F', donc elle forme une base de F'. Ainsi F' est de dimension 2.

Finalement $F \subseteq F'$ avec $\dim F = \dim F'$. Par théorème on en déduit que $F = F'$, *i.e.*, F est bien le sous-ensemble de E d"équation $5x - 7y + 8z = 0$.

b. Montrons que $F \cap G = \{0_E\}$.

Tout élément de $F \cap G$ s'écrit $u = \alpha u_3 = (8\alpha, 9\alpha, 3\alpha)$ car il appartient à G. Il vérifie l'équation $5x - 7y + 8z = 0$, ce qui donne $\alpha = 0$. Ainsi $F \cap G$ ne peut contenir que le vecteur nul. Or il contient bien ce vecteur, et donc : $\quad F \cap G = \{0_E\}$

Comme le vecteur u_3 est non-nul alors il forme une famille libre, et comme il engendre G alors il forme une base de G. Ainsi G est de dimension 1.

Finalement on a obtenu : *(i)* $\quad F \cap G = \{0_E\}$

(ii) $\quad \dim F + \dim G = \dim E \qquad$ car $\qquad 2 + 1 = 3$

Par théorème, ceci implique que F et G sont supplémentaires dans E : $\quad E = F \oplus G$

Une autre méthode aurait été de démontrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre. Elle constitue alors une famille libre maximale de E, et donc une base de E.

Par théorème, dans ce cas les sous-espaces vectoriels $F = \operatorname{Vect}(u_1, u_2)$ et $G = \operatorname{Vect}(u_3)$ sont supplémentaires dans E. On dit alors que la base (u_1, u_2, u_3) est adaptée à la somme directe $E = F \oplus G$.

3 Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ on considère la famille $\mathcal{F}$ composée des vecteurs :

$$u_1 = (1, -1, -1, -1) \qquad u_2 = (2, 0, 2, 0) \qquad u_3 = (-1, -1, 2, -1)$$

a. Démontrer que cette famille est libre.

b. Soit G l'ensemble des vecteurs (x, y, z, t) tels que $y = t$. Démontrer que $\operatorname{Vect} \mathcal{F} = G$ par inclusion puis en raisonnant sur la dimension.

c. Compléter $\mathcal{F}$ en une base de E.

a. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_E$. Alors :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Par opérations élémentaires ce système équivaut aux systèmes :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{puis} \qquad \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 5\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

On en déduit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. On a démontré que :

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \qquad \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_E \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

La famille (u_1, u_2, u_3) est donc libre.

b. Par énoncé :

$$G = \{ (x, y, z, t) \in E \mid y = t \}$$

On justifie que G est un sous-espace vectoriel :

$$G = \left\{ (x, y, z, y) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \operatorname{Vect} \left((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0) \right)$$

Comme les vecteurs $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 0)$ appartiennent à E alors G est un sous-espace vectoriel de E.

Les vecteurs u_1, u_2, u_3 satisfont l'équation $y = t$, ils appartiennent donc à G :

$$(u_1, u_2, u_3) \subseteq G$$

Or G est un sous-espace vectoriel, donc il est stable par combinaisons linéaires, et ainsi :

$$\operatorname{Vect} (u_1, u_2, u_3) \subseteq G$$

Ceci montre que $\operatorname{Vect} (\mathcal{F}) \subseteq G$.

On a même les inclusions :

$$\operatorname{Vect} (\mathcal{F}) \subseteq G \subseteq E$$

Celles-ci donnent les inégalités :

$$\dim \operatorname{Vect}(\mathcal{F}) \leqslant \dim G \leqslant \dim E$$

La famille $\mathcal{F}$ est génératrice de $\operatorname{Vect}(\mathcal{F})$. Elle est libre d'après la question précédente. Elle est donc une base de $\operatorname{Vect}(\mathcal{F})$, et ainsi $\operatorname{Vect}(\mathcal{F})$ est de dimension 3. Or $E = \mathbb{R}^4$ donc :

$$3 \leqslant \dim G \leqslant 4$$

Comme la dimension d'un espace vectoriel est un entier alors $\dim G = 3$ ou $\dim G = 4$.

Si $\dim G = 4$ alors $G \subseteq E$ avec $\dim G = \dim E$, ce qui donne $G = E$. Or le vecteur $e_2 = (0, 1, 0, 0)$ appartient à E mais pas à G (il ne satisfait pas l'équation $y = t$), ce qui est une contradiction.

En conséquence $\dim G = 3$. Alors $\operatorname{Vect}(\mathcal{F}) \subseteq G$ avec $\dim \operatorname{Vect}(\mathcal{F}) = \dim G$, et qui montre que $\operatorname{Vect}(\mathcal{F}) = G$.

c. La famille $\mathcal{F}$ est une famille libre de vecteurs de E. D'après le théorème de la base incomplète elle peut être complétée en une base de E.

Comme E est de dimension 4, alors il lui manque un vecteur.

Il suffit de choisir un vecteur de E ne satisfaisant pas l'équation $y = t$. Par exemple $e_2 = (0, 1, 0, 0)$.

En effet, comme ce vecteur ne satisfait par l'équation $y = t$ alors il n'appartient pas à G, donc il n'appartient pas à $\operatorname{Vect}(\mathcal{F})$ (d'après la question précédente), donc la famille $\mathcal{F} \cup \{e_1\}$ est libre.

Démontrons ceci. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 e_2 = 0_E$$

Si $\lambda_4 \neq 0$ alors :

$$e_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_4} u_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_4} u_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_4} u_3$$

Ceci est impossible car nous venons de justifier que e_2 n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$.

Ainsi $\lambda_4 = 0$, puis :

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_E$$

Nous savons depuis la première question que la famille $\mathcal{F}$ est libre, donc ceci implique $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, et ainsi nous avons démontré que la famille $\mathcal{F} \cup \{e_1\}$ est libre.

Cette famille est une famille libre de quatre vecteurs de E, lequel est de dimension 4, donc c'est une famille libre maximale, et ainsi par théorème c'est une base de E.

On a bien complété la famille libre $\mathcal{F}$ en une base de E.

$\boxed{4}$ Soit $E = \mathbb{R}^4$ et F, G, H les sous-ensembles de E d'équations respectives :

$$F : x - 2y + 2t = 3y + z = 0$$
$$G : 4x - 2y + z = 2x + z + 2t = 0$$
$$H : x + t = x - y - z = 0$$

a. Justifier que F, G, H sont des sous-espaces vectoriels de E et donner leurs dimensions.

b. Calculer $F \cap G$ et $F \cap H$.

c. En déduire que $F + G = E$, puis démontrer que $F + H$ est le sous-ensemble de E d'équation $x + y + z + 2t = 0$.

a. On obtient

$$\begin{array}{lll} F = \operatorname{Vect}(u_1, u_2) & \text{avec} & u_1 = (2, 1, -3, 0) \quad \text{et} \quad u_2 = (-2, 0, 0, 1) \\ G = \operatorname{Vect}(v_1, v_2) & \text{avec} & v_1 = (1, 0, -4, 1) \quad \text{et} \quad v_2 = (0, 1, 2, -1) \\ H = \operatorname{Vect}(w_1, w_2) & \text{avec} & w_1 = (1, 0, 1, -1) \quad \text{et} \quad w_2 = (0, 1, -1, 0) \end{array}$$

Les vecteurs u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2 appartenant à E, ceci montre que F, G, H sont des sous-espaces vectoriels de E.

De plus les familles (u_1, u_2), (v_1, v_2), (w_1, w_2) sont génératrices respectivement de F, G, H.

Elles sont libres car composées de deux vecteurs non colinéaires.

Donc ce sont des bases respectives de F, G, H, et ainsi ces trois sous-espaces vectoriels sont de dimension 2.

b. Un vecteur $u = (x, y, z, t)$ appartient à $F \cap G$ si et seulement si il satisfait les équations de F et de G, donc le système :

$$\begin{cases} x - 2y + 2t = 0 \\ 3y + z = 0 \\ 4x - 2y + z = 0 \\ 2x + z + 2t = 0 \end{cases}$$

Soit A la matrice de ce système. Par opérations élémentaires :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 1 & -8 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -10 & 1 & -8 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -19 & 20 \\ 0 & 0 & -7 & 6 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & 6 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

Le système est donc de Cramer. En conséquence le vecteur u appartient à $F \cap G$ si et seulement si il est nul, et ainsi $F \cap G = \{0_E\}$.

Le vecteur $u = (x, y, z, t)$ appartient à $F \cap H$ si et seulement si il satisfait le système :

$$\begin{cases} x - 2y + 2t = 0 \\ 3y + z = 0 \\ x + t = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

Soit B la matrice de ce système. Par opérations élémentaires :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$F \cap H = \left\{ \left(-t, \tfrac{1}{2}t, -\tfrac{3}{2}t, t\right) \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left((2, -1, 3, -2)\right)$$

Comme le vecteur $(2, -1, 3, -2)$ n'est pas nul alors $F \cap H$ est une droite vectorielle, et donc de dimension 1.

c. D'après la formule de Grassmann :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = 2 + 2 - 0 = 4$$
$$\dim(F + H) = \dim F + \dim H - \dim(F \cap H) = 2 + 2 - 1 = 3$$

Comme $F + G \subseteq E$ et $\dim(F + G) = \dim E$ alors par théorème $F + G = E$.
Soit K le sous-ensemble de E d'équation $x + y + z + 2t = 0$.
Alors K est le noyau de la forme linéaire non-nulle $\varphi : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & x + y + z + 2t. \end{array}$
En conséquence K est un hyperplan de E. Comme E est de dimension 4 alors K est de dimension 3.
Les vecteurs u_1, u_2, w_1, w_2 satisfont l'équation $x + y + z + 2t = 0$, donc appartiennent à K. Comme K est stable par combinaisons linéaires alors il contient $\operatorname{Vect}(u_1, u_2, w_1, w_2)$ c'est-à-dire $F + H$.
Comme $F + H \subseteq K$ et $\dim(F + H) = \dim K$ alors par théorème $F + H = K$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Soit $E = \mathbb{R}^4$ puis :

$$F = \{ (x, y, z, t) \in E \mid x - y + z - t = 0 \}$$

a. Déterminer la dimension de F.

Soit G le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $u_1 = (1, 2, 3, 4)$ et $u_2 = (4, 3, 2, 1)$.

b. Démontrer que $F + G = E$. En déduire la dimension de $F \cap G$.

c. Déterminer une base d'un supplémentaire de $F \cap G$ dans F.

a. On obtient une famille génératrice de F :

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z,t) \mid t = x-y+z\} \\ &= \left\{(x,y,z,x-y+z) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &= \operatorname{Vect}((1,0,0,1),(0,1,0,-1),(0,0,1,1)) \end{aligned}$$

On note $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,1,0,-1)$, $v_3 = (0,0,1,1)$.
Ces trois vecteurs appartiennent à E. Comme $F = \operatorname{Vect}(v_1,v_2,v_3)$ alors F est un sous-espace vectoriel de E, et la famille (v_1,v_2,v_3) est génératrice de F.
Montrons que cette famille est libre.
Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_E$. Alors :

$$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3) = (0,0,0,0)$$

Ceci implique : $\quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$
On a donc démontré que la famille (v_1,v_2,v_3) est libre. Or elle engendre F, donc c'est une base de F.
Ainsi F est dimension 3 : $\quad \dim F = 3$

b. Comme $F \subseteq F+G$ alors $\dim F \leqslant \dim(F+G)$, *i.e.*, $3 \leqslant \dim(F+G)$.
De plus F et G sont des sous-espaces vectoriels de E donc $F+G \subseteq E$, et ainsi $\dim(F+G) \leqslant \dim E = 4$.
Or la dimension d'un espace vectoriel est un entier, donc $\dim(F+G) = 3$ ou $\dim(F+G) = 4$.
Supposons que $\dim(F+G) = 3$. Alors :

$$F \subseteq (F+G) \qquad \text{et} \qquad \dim F = \dim(F+G)$$

Ceci implique que $F = F+G$. Or on remarque que le vecteur $u_1 = (1,2,3,4)$ n'appartient pas à F, car il ne satisfait pas l'équation $x-y+z-t=0$ (cette équation s'écrit d'ailleurs $x+z = y+t$).
Or $u_1 \in G$ donc $u_1 \in F+G$. Finalement $u_1 \notin F$ et $u_1 \in F+G$, donc on ne peut avoir $F = F+G$.
On en déduit que $\dim(F+G) = 4$. Alors :

$$(F+G) \subseteq E \qquad \text{et} \qquad \dim(F+G) = \dim(E)$$

Ceci implique que $F+G = E$.

On connaît la formule de Grassmann :

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Comme $G = \operatorname{Vect}(u_1,u_2)$, avec u_1 et u_2 non colinéaires, alors la famille (u_1,u_2) est libre et génératrice de G, donc c'est une base de G, et ainsi G est de dimension 2.
La formule de Grassmann donne :

$$\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F+G) = 3+2-4 = 1$$

c. On commence par chercher une base de $F \cap G$.

On rappelle que $G = \text{Vect}\,(u_1, u_2)$ avec $u_1 = (1,2,3,4)$ et $u_2 = (4,3,2,1)$. Ainsi $u_1 + u_2 = (5,5,5,5)$ appartient à G, donc $w_1 = (1,1,1,1)$ appartient à G.

Or le vecteur w_1 appartient aussi à F car il satisfait l'équation $x - y + z - t = 0$.

Ainsi $w_1 \in F \cap G$. Il est non-nul donc il forme une famille libre de $F \cap G$. Comme $F \cap G$ est de dimension 1 alors la famille (w_1) est libre maximale, donc c'est une base de $F \cap G$.

On en déduit que $F \cap G = \text{Vect}\,(w_1)$ avec $w_1 = (1,1,1,1)$.

On rappelle que l'on a noté $v_1 = (1,0,0,1)$ et $v_2 = (0,1,0,-1)$.

Les vecteurs w_1, v_1, v_2 appartiennent à F. Démontrons qu'ils forment une famille libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 v_1 + \lambda_3 v_2 = 0_E$. Alors :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 \phantom{{}+\lambda_3} = 0 \\ \lambda_1 \phantom{{}+\lambda_2} + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Ce système implique : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

On a donc démontré que la famille (w_1, v_1, v_2) est libre.

Or c'est une famille de trois vecteurs de F, qui est de dimension 3. Elle est donc libre maximale dans F et ainsi c'est une base de F.

On sait que $F \cap G = \text{Vect}\,(w_1)$, et on pose $H = \text{Vect}\,(v_1, v_2)$. Alors par théorème de la base adaptée $F \cap G$ et H sont supplémentaires dans F.

La famille (v_1, v_2) est donc une base d'un supplémentaire de $F \cap G$ dans F.

$\boxed{6}$ Soit $E = \mathbb{K}^n$ avec $n \geqslant 2$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de E. Soit F l'ensemble des n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ de E tels que :

$$\forall k = 2, \ldots, n-1 \qquad 2x_k = x_{k-1} + x_{k+1}$$

a. Prouver que F est un sous-espace vectoriel de E.

b. Démontrer que les vecteurs $u_1 = (1, \ldots, 1)$ et $u_2 = (1, 2, \ldots, n)$ sont éléments de F.

c. On note $G = \text{Vect}\,(e_3, \ldots e_n)$. Démontrer que $F \cap G = \{0_E\}$.

d. Que peut-on en déduire sur la dimension de F ?

a. On utilise la caractérisation des sous-espaces vectoriels.

(i) Par énoncé F est un sous-ensemble de E : $F \subseteq E$.

(ii) Le vecteur nul de E est $0_E = (0, \ldots, 0)$, il s'écrit $(x_1, \ldots, x_n)$ avec les x_k tous nuls, donc toutes les équations $2x_k = x_{k-1} + x_{k+1}$ sont satisfaites, et ainsi il appartient à F : $0_E \in F$.

(iii) Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ deux éléments de F. Alors :

$$\forall k = 2, \ldots, n-1 \qquad 2x_k = x_{k-1} + x_{k+1} \quad \text{et} \quad 2y_k = y_{k-1} + y_{k+1}$$

Soit λ un scalaire. Alors :

$$\lambda x + y = (\lambda x_1 + y_1, \dots, \lambda x_n + y_n)$$

Pour tout $k = 2, \dots, n-1$ on peut écrire :

$$\begin{aligned} 2(\lambda x_k + y_k) &= \lambda 2x_k + 2y_k \\ &= \lambda(x_{k-1} + x_{k+1}) + (y_{k-1} + y_{k+1}) \\ &= (\lambda x_{k-1} + y_{k-1}) + (\lambda x_{k+1} + y_{k+1}) \end{aligned}$$

Ceci montre que $\lambda x + y \in F$.

On a démontré que F est stable par combinaison linéaire :

$$\forall (x,y) \in F^2 \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \lambda x + y \in F$$

D'après la caractérisation, F est un sous-espace vectoriel de E.

b. Le vecteur $u_1 = (1, \dots, 1)$ s'écrit $u_1 = (x_1, \dots, x_n)$ avec $x_k = 1$ pour tout $k = 1, \dots, n$. Alors $2x_k = 2$ et $x_{k-1} + x_{k+1} = 2$, donc u_1 vérifie les équations de F, et ainsi $u_1 \in F$.
Le vecteurs $u_2 = (1, 2, \dots, n)$ s'écrit $u_2 = (x_1, \dots, x_n)$ avec $x_k = k$ pour tout $k = 1, \dots, n$. Alors $2x_k = 2k$ et $x_{k-1} + x_{k+1} = (k-1) + (k+1) = 2k$, donc u_2 vérifie les équations de F, et ainsi $u_2 \in F$.

c. Comme $G = \mathrm{Vect}\,(e_3, \dots, e_n)$ alors :

$$\begin{aligned} G &= \left\{ (0, 0, x_3, \dots, x_n) \mid (x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-2} \right\} \\ &= \{ (x_1, \dots, x_n) \in E \mid x_1 = x_2 = 0 \} \end{aligned}$$

Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ un élément de $F \cap G$.
Comme $x \in G$ alors $x_1 = x_2 = 0$.
Comme $x \in F$ alors : $\forall k = 2, \dots, n-1 \qquad 2x_k = x_{k-1} + x_{k+1}$
Cette dernière équation s'écrit : $\forall k = 2, \dots, n-1 \qquad x_{k+1} = 2x_k - x_{k-1}$
On démontre par *récurrence double finie* que la propriété $\mathcal{P}_k : x_k = 0$ est vraie pour tout $k = 1, \dots, n$.
<u>Initialisation.</u> Comme $x \in G$ alors $x_1 = x_2 = 0$, donc les propriétés $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont vraies.
<u>Hérédité.</u> Supposons que pour un certain $k \in \{2, \dots, n-1\}$ les propriétés $\mathcal{P}_{k-1}$ et $\mathcal{P}_k$ sont vraies, *i.e.*, $x_{k-1} = x_k = 0$. Comme $x \in F$ alors $x_{k+1} = 2x_k - x_{k-1}$ donc $x_{k+1} = 0$. La propriété $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.
<u>Conclusion.</u> On a démontré que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont vraies et :

$$\forall k = 2, \dots, n-1 \qquad (\mathcal{P}_{k-1} \text{ et } \mathcal{P}_k) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{P}_{k+1}$$

Par récurrence double finie on en déduit :

$$\forall k = 1, \dots, n \qquad \mathcal{P}_k \text{ est vraie : } \; x_k = 0$$

Ceci signifie que $x = 0_E$.
On a démontré que $F \cap G \subseteq \{0_E\}$. L'inclusion réciproque est vraie aussi car F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, donc : $F \cap G = \{0_E\}$

d. On utilise dans la suite la formule de Grassmann :

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Comme $F \cap G = \{0_E\}$ alors : $\dim(F \cap G) = 0$

La famille $(e_3, \ldots, e_n)$ est libre car elle est incluse dans la base canonique qui est une famille libre. Elle est également génératrice de G, donc c'est une base de G. Elle contient $n-2$ vecteurs donc G est de dimension $n-2$: $\dim G = n-2$

Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E alors $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E, et donc : $\dim(F+G) \leqslant \dim E = n$.

La formule de Grassmann donne donc :

$$\dim F = \dim(F+G) - (n-2) \leqslant 2$$

Dans la question 2 on a démontré que les vecteurs u_1 et u_2 appartiennent à F. Or ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc ils forment une famille libre.
Comme F contient une famille libre de deux vecteurs, alors F est de dimension au moins 2 : $\dim F \geqslant 2$

Finalement, $\dim F \leqslant 2$ et $\dim F \geqslant 2$ donc $\dim F = 2$: F est de dimension 2.

7 Soit H et H' deux hyperplans distincts d'un espace vectoriel E de dimension n. Déterminer $H + H'$ et en déduire la dimension de $H \cap H'$.

Par propriété, comme H et H' sont des hyperplans de E alors ils sont de dimension $n-1$.
Comme H et H' sont distincts alors il existe un vecteur u_0 appartenant à H' mais pas à H. En effet, dans le cas contraire on aurait $H' \subseteq H$, mais comme H et H' sont de même dimension alors ceci impliquerait l'absurdité $H = H'$.
Soit $D = \text{Vect}\,(u_0)$. Par théorème, comme $u_0 \notin H$ alors H et D sont supplémentaires, et ainsi $H + D = E$.
Comme $u_0 \in H'$ alors $D \subseteq H'$ puis $H + D \subseteq H + H'$.
On a donc $E \subseteq H + H' \subseteq E$, et ainsi $H + H' = E$.
D'après la formule de Grassmann :

$$\dim H \cap H' = \dim H + \dim H' - \dim(H+H') = (n-1) + (n-1) - n = n-2$$

L'espace vectoriel $H \cap H'$ est donc de dimension 2.

8 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ puis :

$$F = \{\, P \in E \mid P(1) = P(2) = 0\}$$

a. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E et en donner une base.
b. Démontrer que $\mathbb{R}_1[X]$ est un supplémentaire de F dans E.

a. Par propriété des polynômes, P admet 1 et 2 pour racines si et seulement si il est multiple de $(X-1)$ et de $(X-2)$.
Ainsi F est l'ensemble des polynômes de E s'écrivant $P=(X-1)(X-2)Q$ où Q est un polynôme. Comme les polynômes de E sont de dimension au plus n alors Q est de dimension au plus $n-2$, *i.e.*, $Q=\sum_{k=0}^{n-2} a_k X^k$ avec $a_0,\dots,a_{n-2}$ réels. Ainsi :

$$F=\Big\{(X-1)(X-2)(a_0+a_1X+\cdots+a_{n-2}X^{n-2}) \;\Big|\; (a_0,\dots,a_{n-2})\in\mathbb{R}^{n-1}\Big\}$$

Ceci donne :

$$\begin{aligned} F &= \Big\{a_0X(X-1)(X-2)+\cdots+a_{n-2}X^{n-2}(X-1)(X-2) \;\Big|\; (a_0,\dots,a_{n-2})\in\mathbb{R}^{n-1}\Big\} \\ &= \operatorname{Vect}\Big(X^k(X-1)(X-2) \mid k=0,\dots,n-2\Big) \end{aligned}$$

Les polynômes $P_k=X^k(X-1)(X-2)$ pour $k=0\dots,n-2$ sont éléments de E, donc par propriété F est un sous-espace vectoriel de E.
De plus la famille $(P_0,\dots,P_{n-2})$ est génératrice de F, elle est libre car ses éléments sont de degrés échelonnés, donc c'est une base de F.
Cette famille contient $n-1$ éléments donc finalement F est de dimension $n-1$

b. Si P est un élément de $F\cap\mathbb{R}_1[X]$ alors P est de degré au plus 1 et admet au moins deux racines. Par propriété des polynômes ceci n'est possible que si P est le polynôme nul : un polynôme de degré n a au plus n racines.
Le polynôme nul est bien élément de $F\cap\mathbb{R}_1[X]$ car F et $\mathbb{R}_1[X]$ sont des sous-espaces vectoriels de E, donc $F\cap\mathbb{R}_1[X]=\{0_E\}$.
De plus $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$ et $\mathbb{R}_1[X]$ est de dimension 2 donc :

$$\dim E=\dim F+\dim\mathbb{R}_1[X]$$

Par théorème, F est $\mathbb{R}_1[X]$ sont supplémentaires dans E :

$$E=F\oplus\mathbb{R}_1[X]$$

On peut ajouter que la division euclidienne par $(X-1)(X-2)$ donne la décomposition d'un polynôme P selon cette somme directe :
Pour tout $P\in E$ il existe un couple (Q,R) tel que

$$P=(X-1)(X-2)Q+R \qquad \text{avec} \qquad \deg R<\deg(X-1)(X-2)=2.$$

En effet $(X-1)(X-2)Q$ appartient à F et R appartient à $\mathbb{R}_1[X]$.

$\boxed{9}$ Soit n un entier naturel. On note $\mathcal{M}=\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, puis $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}$ contenant les matrices respectivement triangulaires supérieures et triangulaires inférieures.

a. Déterminer les sous-espaces $\mathcal{T}+\mathcal{T}'$ et $\mathcal{T}\cap\mathcal{T}'$, donner leurs dimensions.
b. Démontrer que l'application $M\mapsto {}^tM$ est un automorphisme de $\mathcal{M}$.
Quelle est l'image de $\mathcal{T}$ par cet automorphisme ?
c. Déduire des deux questions précédentes la dimension de $\mathcal{T}$ et de $\mathcal{T}'$.
d. Retrouver ce résultat directement en exhibant des bases de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$.

a. Toute matrice s'écrit comme somme d'une matrice triangulaire supérieure et d'une matrice triangulaire inférieure. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{T} + \mathcal{T}'$$

On en déduit que $\mathcal{T} + \mathcal{T}' = \mathcal{M}$.

On rappelle que pour i et j entiers entre 1 et n on note E_{ij} la matrice ne contenant que des zéros sauf le coefficient de la ligne i et de la colonne j qui vaut 1.
Alors la famille $\{E_{ij} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$ est la base canonique de $\mathcal{M}$.
Elle contient n^2 éléments, ce qui montre que $\mathcal{M}$ est de dimension n^2.

Les matrices triangulaires supérieures et inférieures sont les matrices diagonales, on note $\mathcal{D} = \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, et donc :

$$\mathcal{T} \cap \mathcal{T}' = \mathcal{D}$$

Les matrices diagonales s'écrivent :

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} E_{ii}$$

La famille $\{E_{ii} \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ est génératrice de $\mathcal{D}$.
Elle est libre car elle est extraite de la base canonique qui est libre, donc c'est une base de $\mathcal{D}$.
Elle contient n éléments, donc $\mathcal{D}$ est de dimension n.

b. Soit $\Phi : M \to {}^tM$ l'application de transposition. Pour toute matrice carrée M on a ${}^t({}^tM) = M$, donc $\Phi \circ \Phi = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}}$. Ceci montre que Φ est un automorphisme, égal à sa propre réciproque.
Si A est une matrice triangulaire supérieure alors ${}^tA$ est triangulaire inférieure, donc $\Phi(\mathcal{T}) = \mathcal{T}'$.

c. La formule de Grassmann donne :

$$\dim(\mathcal{T} + \mathcal{T}') = \dim \mathcal{T} + \dim \mathcal{T}' - \dim(\mathcal{T} \cap \mathcal{T}')$$

En conséquence :

$$n^2 = \dim \mathcal{T} + \dim \mathcal{T}' - n$$

Comme Φ est un isomorphisme alors il conserve la dimension, donc $\dim \varphi(\mathcal{T}) = \dim \mathcal{T}$, et comme $\Phi(\mathcal{T}) = \mathcal{T}'$ alors $\dim \mathcal{T} = \dim \mathcal{T}'$.
On a donc $n^2 + n = \dim \mathcal{T}$, on en déduit :

$$\dim \mathcal{T} = \dim \mathcal{T}' = \frac{n(n+1)}{2}$$

d. Les matrices triangulaires supérieures s'écrivent :

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij}E_{ij}$$

La famille $\{E_{ij} \mid 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\}$ est génératrice de $\mathcal{T}$.
Elle est libre car elle est extraite de la base canonique qui est libre, donc c'est une base de $\mathcal{T}$.
Elle contient $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ éléments, donc $\mathcal{T}$ est de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

De même la famille $\{E_{ij} \mid 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n\}$ est une base de $\mathcal{T}'$, donc $\mathcal{T}'$ est aussi de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

10 Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on définit sur $\mathbb{R}$:

$$f_k : t \mapsto \cos^k t \qquad \text{et} \qquad g_k : t \mapsto \cos(kt)$$

a. Démontrer que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.

b. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n \in \operatorname{Vect}(g_0, \ldots, g_n)$$

c. Déduire des questions précédentes que la famille $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.

On note E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a. Soit n un entier naturel et $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ des scalaires tels que :

$$\lambda_0 f_0 + \cdots + \lambda_n f_n = 0_E$$

Ceci signifie :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \lambda_0 \cos^0(t) + \cdots + \lambda_n \cos^n t = 0_{\mathbb{R}}$$

Notons $P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_n X^n$. L'égalité ci-dessus devient :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad P(\cos t) = 0$$

Or tout réel x de l'intervalle $[-1, 1]$ admet un antécédent par la fonction cosinus, donc $P(x) = 0$ pour tout $x \in [-1, 1]$. Ainsi le polynôme P admet une infinité de racines, donc il est nul.
Comme P est nul alors $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$, et ceci montre que la famille $(f_0, \ldots, f_n)$ est libre.
Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f_k \mid k \in \mathbb{N})$ est libre.

b. Pour tout entier naturel n on note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $f_n \in \text{Vect}\,(g_0, \dots, g_n)$.
On démontre par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation. Comme $f_0 = g_0 = 1$ alors $f_0 \in \text{Vect}\,(g_0)$.
Hérédité. Admettons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un entier $n \geqslant 0$. Alors f_n est combinaison linéaire de $g_0, \dots, g_n$, donc il existe des scalaires $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \cos^n x = \lambda_0 \cos(0x) + \cdots \lambda_n \cos(nx) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cos(kx)$$

La formule

$$\cos x \cos y = \tfrac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$$

donne :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \qquad \cos^{n+1} x &= \sum_{k=0}^{n} \tfrac{\lambda_k}{2}(\cos(k+1)x + \cos(k-1)x) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \tfrac{\lambda_{k-1}}{2} \cos(kx) + \sum_{k=-1}^{n-1} \tfrac{\lambda_{k+1}}{2} \cos(kx) \end{aligned}$$

Comme $\cos(-x) = \cos x$ on peut finalement écrire :

$$f_{n+1} = \tfrac{\lambda_0}{2} g_1 + \tfrac{\lambda_1}{2} g_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \Big(\tfrac{\lambda_{k-1}+\lambda_{k+1}}{2}\Big) g_k + \tfrac{\lambda_{n-1}}{2} g_n + \tfrac{\lambda_n}{2} g_{n+1}$$

Ainsi f_{n+1} est combinaison linéaire de $g_0, \dots, g_{n+1}$, donc la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie.
L'hérédité est prouvée.
Conclusion. Par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc f_n appartient au sous-espace vectoriel $\text{Vect}\,(g_0, \dots, g_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$F_n = \text{Vect}\,(f_0, \dots, f_n) \qquad \text{et} \qquad G_n = \text{Vect}\,(g_0, \dots, g_n)$$

D'après la question précédente les fonctions $f_0, \dots, f_n$ appartiennent à G_n donc comme celui-ci est un sous-espace vectoriel alors F_n est inclus dans G_n.
D'après la question (a) la famille $(f_0, \dots, f_n)$ est libre, donc elle est une base de F_n, et ainsi F_n est de dimension $n+1$.
Or G_n est engendré par la famille $(g_0, \dots, g_n)$ qui est de cardinal $n+1$, donc il est de dimension au plus $n+1$. Comme $F_n \subseteq G_n$ alors G_n est de dimension supérieure ou égal à F_n, donc au moins $n+1$.
Finalement G_n est de dimension $n+1$. La famille $(g_0, \dots, g_n)$ est donc génératrice minimale de G_n, donc elle est une base de G_n. Elle est *a fortiori* libre.
Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(g_k |\, k \in \mathbb{N})$ est libre.

11 Pour chacune des applications linéaires f ci-dessous donner la dimension de $\ker f$ et de $\operatorname{im} f$, éventuellement grâce au théorème du rang.

a. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x-y+z, x+z) \end{array}$

b. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (3x-12y, 0, -2x+8y) \end{array}$

c. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, x+y+2z, x+2y+2z) \end{array}$

d. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (4y-z, 3x+2y+z, -3x+2y-2z, x-6y+z) \end{array}$

e. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (3y+2z+t, 3x+z-t, 5x-y+z-2t, 4x+y+2z-t) \end{array}$

f. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^5 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x_1,\dots,x_5) & \longmapsto & (x_1+2x_2, x_1-2x_2-2x_3, x_2+x_3-x_4, 2x_2-2x_4+x_5) \end{array}$

a. Par définition : $\ker f = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = 0_{\mathbb{R}^2}\}$

Soit $u = (x,y,z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Alors $u \in \ker f$ si et seulement si $f(u) = 0_{\mathbb{R}^2}$, ce qui revient au système :

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Par opérations élémentaires ce système est équivalent au système :

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

On en déduit :

$$\ker f = \{(-z,-z,z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}((1,1,-1))$$

Le vecteur $(1,1,-1)$ est non-nul, donc la famille $((1,1,-1))$ est libre. Or elle est génératrice de $\ker f$, donc c'est une base de $\ker f$. Elle contient un seul vecteur donc $\ker f$ est de dimension 1.

D'après le théorème du rang :

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim \mathbb{R}^3$$

Ceci donne $\dim \operatorname{im} f = 3 - 1 = 2$. Or $\operatorname{im} f \subseteq \mathbb{R}^2$, donc $\operatorname{im} f = \mathbb{R}^2$.

On peut en déduire que f est surjective.

b. On obtient : $\ker f = \operatorname{Vect}((4,1))$

On en déduit : $\dim \ker f = 1$

D'après le théorème du rang : $\dim \operatorname{im} f = 1$

On peut aussi expliciter l'image de f :

$$\begin{aligned}\operatorname{im} f &= \left\{ f(u) \mid u \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ (3x-12y, 0, -2x+8y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \operatorname{Vect}\left((3,0,-2),(-12,0,8)\right)\end{aligned}$$

Comme $(-12,0,8) = -4(3,0,-2)$ alors $\operatorname{im} f = \operatorname{Vect}\left((3,0,-2)\right)$, et on en déduit que $\dim \operatorname{im} f = 1$.

c. On obtient $\ker f = \{0_{\mathbb{R}_3}\}$, ce qui donne : $\dim \ker f = 0$

D'après le théorème du rang : $\dim \operatorname{im} f = 3$

Comme l'image de f est incluse dans $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3 alors : $\operatorname{im} f = \mathbb{R}^3$

On peut en déduire que f est un isomorphisme.

d. On obtient $\ker f = \{0_{\mathbb{R}_3}\}$, ce qui donne : $\dim \ker f = 0$

D'après le théorème du rang : $\dim \operatorname{im} f = 3$

On peut donner une base de $\operatorname{im} f$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\operatorname{im} f &= \left\{ f(u) \mid u \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ (4y-z, 3x+2y+z, -3x+2y-2z, x-6y+z) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \operatorname{Vect}\left((0,3,-3,1),(4,2,2,-6),(-1,1,-2,1)\right)\end{aligned}$$

La famille $\left((0,3,-3,1),(4,2,2,-6),(-1,1,-2,1)\right)$ est génératrice de $\operatorname{im} f$. Comme $\operatorname{im} f$ est de dimension 3 alors elle est génératrice minimale, donc elle est une base de $\operatorname{im} f$.

Grâce au théorème du rang on n'a pas eu besoin de démontrer que la famille est libre.

On peut également démontrer que :

$$\operatorname{im} f = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x-y-z=0 \right\}$$

e. On obtient :

$$\ker f = \operatorname{Vect}\left((0,1,-1,-1),(1,0,-1,2)\right) \qquad \operatorname{im} f = \operatorname{Vect}\left((0,3,5,4),(-1,1,2,1)\right)$$

On justifie que $\dim \ker f = \dim \operatorname{im} f = 2$, le théorème du rang est vérifié.

f. On calcule : $\ker f = \operatorname{Vect}\left((2,-1,2,1,4)\right)$

On en déduit que le noyau de f est de dimension 1, puis le théorème du rang montre que l'image de f est de dimension 4, et ainsi : $\operatorname{im} f = \mathbb{R}^4$

Ceci prouve également que f est surjective.

12 Soit n un entier positif non-nul et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$f(x_1,\dots,x_n) = (x_2,x_3,\dots,x_n,x_1)$$

Déterminer le rang de f puis de $g = \mathrm{Id} - f$.

Le noyau de f est réduit au vecteur nul :

$$\begin{aligned}\ker f &= \{u \in \mathbb{R}^n \mid f(u) = 0_{\mathbb{R}^n}\}\\ &= \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_2,x_3,\dots,x_n,x_1) = (0,\dots,0)\}\\ &= \{(0,\dots,0)\}\end{aligned}$$

On en déduit que f est injective.

Or f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui est de dimension finie. Par corollaire du théorème du rang ceci implique que f est un isomorphisme.

En conséquence f est surjective, *i.e.,* $\operatorname{im} f = \mathbb{R}^n$, et donc f est de rang n.

Pour déterminer le rang de g on explicite :

$$\forall (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \qquad g(x_1,\dots,x_n) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, \dots, x_{n-1} - x_n, x_n - x_1)$$

On peut alors calculer le noyau de g :

$$\begin{aligned}&\forall x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n\\ &\qquad x \in \ker g \iff (x_1 - x_2, x_2 - x_3, \dots, x_{n-1} - x_n, x_n - x_1) = (0,\dots,0)\\ &\qquad\qquad \iff x_1 = x_2 = \cdots = x_n\\ &\qquad\qquad \iff x = (x_1,\dots,x_1) = x_1(1,\dots,1)\end{aligned}$$

Le noyau de g est donc le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $(1,\dots,1)$:

$$\ker g = \mathrm{Vect}\left((1,\dots,1)\right)$$

Ce vecteur est non-nul donc il forme une famille libre à un élément, qui est aussi génératrice de $\ker g$. Cette famille est donc une base de $\ker g$, et ainsi $\ker g$ est de dimension 1.

D'après le théorème du rang :

$$\dim \ker g + \dim \operatorname{im} g = \dim \mathbb{R}^n$$

Ainsi $\dim \operatorname{im} g = n - 1$, *i.e.,* g est de rang $n - 1$.

13 Pour tout $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ on note :

$$\varphi(y) = y'' - 4y' + 20y$$

a. Justifier que φ est une application linéaire de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

b. Déterminer le noyau de φ.

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n, et $\psi : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & \varphi(y). \end{array}$

Démontrer que ψ est bien définie puis que c'est un automorphisme.

Cet exercice fait suite à l'exercice 7 du chapitre B8, dont nous reproduisons le corrigé ci-dessous.

a. Si y est de classe $\mathcal{C}^2$ alors elle est deux fois dérivable de dérivée seconde continue. Ainsi y' et y'' sont définies et continues. Par combinaison linéaire $y'' - 4y' + 20y$ est définie et continue.

Ceci montre que φ est bien définie sur $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

L'application de dérivation $D : y \mapsto y'$ est linéaire. Par composition l'application $D \circ D : y \mapsto y''$ est linéaire.

Or $\quad \varphi = D \circ D - 4D + 20\mathrm{Id} \quad$ donc φ est combinaison linéaire d'applications linéaires, et par propriété φ est linéaire.

b. Le noyau de φ est l'ensemble des fonctions y de classe $\mathcal{C}^2$ telles que :

$$y'' - 4y' + 20y = 0$$

Il s'agit donc des solutions de cette équation différentielle.

L'équation caractéristique associée est :

$$\lambda^2 - 4\lambda + 20 = 0$$

Ses solutions sont $2+4i$ et $2-4i$. Par théorème les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions y définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) = e^{2t}(\alpha\cos(4t) + \beta\sin(4t))$$

où α et β sont deux réels. Ceci s'écrit

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) = \alpha e^{2t}\cos(4t) + \beta e^{2t}\sin(4t) \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

De façon équivalente, $y = \alpha y_1 + \beta y_2$ où y_1 et y_2 sont les fonctions définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y_1(t) = e^{2t}\cos(4t) \qquad \text{et} \qquad y_2(t) = e^{2t}\sin(4t)$$

Ainsi les solutions de l'équation différentielle sont les combinaisons linéaires de y_1 et y_2 et donc :

$$\ker\varphi = \mathrm{Vect}\,(y_1, y_2)$$

c. On peut noter $E = \mathbb{R}_n[x]$, le x minuscule signifiant qu'il s'agit de fonctions polynomiales et non de polynômes.

Si y est une fonction polynomiale alors elle est de classe $\mathcal{C}^2$, donc $\varphi(y)$ est définie.

De plus, si y est une fonction polynomiale, alors ses dérivées y' et y'' sont des fonctions polynomiales, donc $\varphi(y) = y'' - 4y' + 20y$ est une fonction polynomiale.

Enfin, si y est de degré inférieur ou égal à n alors y' et y'' sont de de degrés inférieurs à n, donc $\varphi(y)$ est de degré inférieur ou égal à n.

Ceci montre que : $\forall y \in E \quad \varphi(y) \in E$

On dit que E est *stable* par φ.

En conséquence l'application ψ est bien définie. Elle est bien définie sur E, et à valeurs dans E.

Comme φ est linéaire alors ψ est linéaire. Donc ψ est un endomorphisme de E.

Comme E est de dimension finie, par corollaire du théorème du rang il suffit de démontrer que ψ est injective ou surjective pour en déduire qu'elle est bijective.

Il est difficile de démontrer directement que ψ est surjective. Par contre on peut démontrer qu'elle est injective, il suffit de calculer son noyau.

Soit y appartenant au noyau de ψ. Alors y est une fonction polynomiale de degré au plus n et $\varphi(y) = 0$, *i.e.*, $y'' - 4y' + 20y = 0$.

Deux méthodes pour démontrer qu'alors $y = 0$:

Méthode 1.

Supposons que y est non-nulle. Alors les degrés de y'' et de y' sont strictement inférieurs à celui de y. Donc $\deg(y'' - 4y' + 20y) = \deg y$. Ceci donne $\deg y = \deg 0 = -\infty$, c'est une contradiction. On en déduit que $y = 0$.

Méthode 2.

Comme $\varphi(y) = 0$ alors y appartient au noyau de φ, donc il existe deux scalaires α et β tels que $y = \alpha y_1 + \beta y_2$:

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) = e^{2t}(\alpha \cos(4t) + \beta \sin(4t))$$

On prouve que ceci est impossible pour une fonction polynomiale, à moins que ce soit la fonction nulle.

Par exemple la limite de y en $-\infty$ est nulle. En effet, par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R} \qquad |y(t)| &= e^{2t}|\alpha \cos(4t) + \beta \sin(4t)| \\ &\leqslant e^{2t}(|\alpha \cos(4t)| + |\beta \sin(4t)|) \\ &\leqslant e^{2t}(|\alpha| + |\beta|)\end{aligned}$$

Par théorème d'encadrement on en déduit : $\lim\limits_{t \to -\infty} y(t) = 0$

Un polynôme non-nul ne peut tendre vers 0 en $-\infty$, donc y est le polynôme nul.

On a donc démontré que $\ker \psi = \{0_E\}$. Ainsi ψ est injective.

Or E est un espace vectoriel de dimension finie : $\dim \mathbb{R}_n[x] = n + 1$

Comme ψ est un endomorphisme injectif de E alors ψ est un automorphisme de E, par corollaire du théorème du rang.

14 On note f l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ P &\longmapsto (P(1), P(2), P(3)) \end{aligned}$$

a. Justifier que f est linéaire.

b. Démontrer que f est un isomorphisme.

c. Justifier qu'il existe un unique polynôme P de degré au plus deux dont la courbe passe par les points de coordonnées $(1, -1)$, $(2, -2)$ et $(3, 1)$.

d. On pose : $P_1 = \frac{1}{2}(X-2)(X-3)$
$P_2 = -(X-1)(X-3)$
$P_3 = \frac{1}{2}(X-1)(X-2)$
Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
Donner l'image de cette base par f.

e. Déterminer le polynôme P dont l'existence et l'unicité ont été démontrées ci-dessus.

a. Les composantes de f sont les applications $P \mapsto P(i)$ pour i allant de 1 à 3. La spécialisation étant linéaire, elles sont toutes les trois linéaires, et donc f est linéaire.

b. On détermine le noyau de f.
Soit P un polynôme appartenant au noyau de f. Alors $f(P) = 0_{\mathbb{R}^3}$, ce qui signifie que $P(1) = P(2) = P(3) = 0$. Donc P admet au moins trois racines. Mais P appartient à $\mathbb{R}_2[X]$, donc il est de degré au plus 2, et il ne peut admettre plus de deux racines s'il est non-nul. Ainsi $P = 0$.
On a démontré que $\ker f \subseteq \left\{0_{\mathbb{R}_2[X]}\right\}$. L'inclusion réciproque est évidente, car $\ker f$ est un sous-espace vectoriel de E. Donc $\ker f = \left\{0_{\mathbb{R}_2[X]}\right\}$.
Ceci justifie que f est injective.
On sait que $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension 3, car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$. Or $\mathbb{R}^3$ est aussi de dimension 3. Par corollaire du théorème du rang, f est un isomorphisme.
Plus précisément, le théorème du rang donne :

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim \mathbb{R}_2[X]$$

Comme $\ker f = \{0\}$ alors $\operatorname{im} f$ est de même dimension que $\mathbb{R}_2[X]$. On en déduit que $\operatorname{im} f$ est de dimension 3, et comme $\operatorname{im} f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ alors $\operatorname{im} f = \mathbb{R}^3$, ce qui montre que f est surjective.

c. Le vecteur $v = (-1, -2, 1)$ est élément de $\mathbb{R}^3$. L'application $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$ est bijective. Il existe donc un et un seul élément P de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que $f(P) = v$.
L'égalité $f(P) = v$ signifie $P(1) = -1$, $P(2) = -2$ et $P(3) = 1$.
Il existe donc un unique polynôme P de degré au plus 2 vérifiant ces trois conditions, *i.e.,* dont la courbe passe par les points de coordonnées $(1, -1)$, $(2, -2)$, et $(3, 1)$.

d. On démontre que la famille $\mathcal{B}$ est libre.

Soit λ_1, λ_2, λ_3 trois scalaires tels que $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$:

$$\frac{\lambda_1}{2}(X-2)(X-3) - \lambda_2(X-1)(X-3) + \frac{\lambda_3}{2}(X-1)(X-2) = 0$$

La spécialisation en 1 donne $\lambda_1 = 0$, la spécialisation en 2 donne $\lambda_2 = 0$, et la spécialisation en 3 donne $\lambda_3 = 0$.

On a démontré que :

$$\forall(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \qquad \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

La famille $\mathcal{B}$ est donc libre.

Or elle contient trois éléments, et $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension 3. Elle est donc libre maximale, et ainsi c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Pour $P_1 = \frac{1}{2}(X-2)(X-3)$ on obtient $P_1(1) = 1$, $P_1(2) = P_1(3) = 0$, donc $f(P_1) = (1,0,0) = e_1$.

De même on vérifie que $f(P_2) = e_2$ et $f(P_3) = e_3$.

En résumé, pour $i = 1$, 2, 3 : $f(P_i) = e_i$.

e. On a justifié qu'il existe un et un seul polynôme P tel que $P(1) = -1$, $P(2) = -2$ et $P(3) = 1$, *i.e.*, tel que $f(P) = (-1,-2,1)$.

Ceci s'écrit : $f(P) = -e_1 - 2e_2 + e_3$

Alors : $P = f^{-1}(-e_1 - 2e_2 + e_3)$

Comme f est linéaire alors f^{-1} est linéaire, donc :

$$P = -f^{-1}(e_1) - 2f^{-1}(e_2) + f^{-1}(e_3)$$

Pour tout $i = 1,2,3$, comme $f(P_i) = e_i$ alors $P_i = f^{-1}(e_i)$, donc :

$$P = -P_1 - 2P_2 + P_3$$

On calcule :

$$\begin{aligned} P &= -\frac{1}{2}(X-2)(X-3) + 2(X-1)(X-3) + \frac{1}{2}(X-1)(X-2) \\ &= 2X^2 - 7X + 4 \end{aligned}$$

Effectivement le polynôme $P = 2X^2 - 7X + 4$ vérifie $P(1) = -1$, $P(2) = -2$ et $P(3) = 1$.

15 Soit n un entier naturel. On considère $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contenant les matrices respectivement symétriques et antisymétriques. On définit l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ M &\longmapsto \tfrac{1}{2}(M + {}^tM) \end{aligned}$$

a. Démontrer que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont l'image et le noyau de f.

b. Démontrer que f est un projecteur.
Que peut-on en déduire au sujet de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$?
Quelle est la symétrie associée ?

c. Déterminer les dimensions de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{A}$. Vérifier que leur somme donne le résultat attendu.

a. L'application de transposition $M \mapsto {}^tM$ est linéaire, donc elle est un endomorphisme de $\mathcal{M}$.
Comme f est combinaison linéaire de l'identité de $\mathcal{M}$ et de cet endomorphisme alors f est un endomorphisme de $\mathcal{M}$.
Par définition son noyau est l'ensemble :

$$\ker f = \{\, M \in \mathcal{M} \mid f(M) = 0\} = \left\{ M \in \mathcal{M} \mid {}^tM = -M \right\} = \mathcal{A}$$

En effet, les matrices antisymétriques sont les matrices telles que ${}^tM = -M$.
Démontrons que $\operatorname{im} f = \mathcal{S}$.
Soit $N \in \operatorname{im} f$. Alors il existe $M \in \mathcal{M}$ telle que $f(M) = N$, donc $N = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$.
Par linéarité de la transposition : ${}^tN = \frac{1}{2}({}^tM + M) = N$.
Ceci montre que N est symétrique, donc $N \in \mathcal{S}$.
Ainsi $\operatorname{im} f \subseteq \mathcal{S}$.
Réciproquement, soit $N \in \mathcal{S}$. Alors ${}^tN = N$, donc $f(N) = \frac{1}{2}(N + N) = N$. Ainsi $N \in \operatorname{im} f$.
On a démontré que $\mathcal{S} \subseteq \operatorname{im} f$.
Par double inclusion : $\operatorname{im} f = \mathcal{S}$.

b. On vient de voir que toute matrice N de l'image de f vérifie $f(N) = N$. Ainsi, pour tout $M \in \mathcal{M}$, comme $f(M) \in \operatorname{im} f$ alors $f(f(M)) = f(M)$.
On peut aussi le vérifier directement :

$$\begin{aligned} \forall M \in \mathcal{M} \qquad f \circ f(M) &= f\Big(\tfrac{1}{2}(M + {}^tM)\Big) = \tfrac{1}{2}\Big(f(M) + {}^tf(M)\Big) \\ &= \tfrac{1}{4}\Big(M + {}^tM + {}^tM + {}^t({}^tM)\Big) = \tfrac{1}{2}\Big(M + {}^tM\Big) = f(M) \end{aligned}$$

Ainsi $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}}$, donc f est un projecteur.
On en déduit que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{S}$, son noyau et son image, sont supplémentaires dans $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$$

La symétrie associée est la symétrie par rapport à $\mathcal{S}$ parallèlement à $\mathcal{A}$, elle vérifie la formule $s = 2f - \mathrm{id}$.

En conséquence, pour tout $M \in \mathcal{M}$: $s(M) = (M + {}^tM) - M = {}^tM$

La symétrie associée à f est la transposition.

Effectivement la transposition vérifie $s \circ s = \mathrm{id}$, elle laisse stable $\mathcal{S}$ et elle envoie les éléments de $\mathcal{A}$ sur leur opposé.

c. La famille contenant les matrices $E_{ij} + E_{ji}$ pour $i < j$ et les matrices E_{ii} pour tout i forme une base de $\mathcal{S}$.

On compte qu'elle obtient $\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$ éléments, donc $\mathcal{S}$ est de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

La famille contenant les matrice $E_{ij} - E_{ji}$ pour $i < j$ forme une base de $\mathcal{A}$.

Elle obtient $\frac{n(n-1)}{2}$ éléments, donc $\mathcal{A}$ est de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

Comme $\mathcal{S} \oplus \mathcal{A} = \mathcal{M}$ alors on doit obtenir $\dim \mathcal{S} + \dim \mathcal{A} = \dim \mathcal{M}$. Effectivement :

$$\dim \mathcal{S} + \dim \mathcal{A} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 = \dim \mathcal{M}$$

Remarque. Il est aussi possible de démontrer que la restriction de f à $\mathcal{T}$, l'ensemble des matrices triangulaires supérieures, est un isomophisme de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{S}$. Pour ceci il suffit de justifier que toute matrice symétrique S s'écrit $S = \frac{1}{2}(T + {}^tT)$ avec T triangulaire supérieure, et que si T est triangulaire supérieure et antisymétrique alors T est nulle.

On en déduit $\dim \mathcal{S} = \dim \mathcal{T} = \frac{n(n+1)}{2}$.

Comme $\mathcal{M} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$ alors $\dim \mathcal{A} = \dim \mathcal{M} - \dim \mathcal{S}$, on obtient $\dim \mathcal{A} = \frac{n(n-1)}{2}$.

16 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f \circ f$.

a. Démontrer que $\operatorname{im} f = \operatorname{im} f \circ f$ et $\ker f = \ker f \circ f$.

b. Démontrer que $E = \operatorname{im} f \oplus \ker f$.

c. Réciproquement, démontrer que si $\operatorname{im} f$ et $\ker f$ sont supplémentaires dans E alors $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f \circ f$.

a. On démontre d'abord que $\operatorname{im}(f \circ f) \subseteq \operatorname{im} f$.

Soit v un vecteur de E. Si $v \in \operatorname{im}(f \circ f)$ alors il existe $u \in E$ tel que $v = f(f(u))$, donc *a fortiori* $v \in \operatorname{im} f$. En effet $f(u)$ est antécédent de v par f.

Ceci montre que : $\operatorname{im}(f \circ f) \subseteq \operatorname{im} f$

Par énoncé $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}(f \circ f)$, ce qui signifie : $\dim \operatorname{im} f = \dim \operatorname{im}(f \circ f)$

On a donc $\operatorname{im}(f \circ f) \subseteq \operatorname{im} f$ et $\dim \operatorname{im} f = \dim \operatorname{im}(f \circ f)$, d'où $\operatorname{im}(f \circ f) = \operatorname{im} f$.

On démontre maintenant que $\ker f \subseteq \ker(f \circ f)$.

Soit $u \in \ker f$. Alors $f(u) = 0_E$. Comme f est linéaire alors $f(0_E) = 0_E$, donc $f(f(u)) = 0_E$, et ainsi $u \in \ker(f \circ f)$.

On a démontré que : $\ker f \subseteq \ker(f \circ f)$

Comme E est de dimension finie alors on peut appliquer le théorème du rang à f et à $f \circ f$:

$$\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim \ker(f \circ f) + \dim \operatorname{im}(f \circ f)$$

Comme $\dim \operatorname{im} f = \dim \operatorname{im}(f \circ f)$ alors $\dim \ker f = \dim \ker(f \circ f)$.

On a donc $\ker f \subseteq \ker(f \circ f)$ et $\dim \ker f = \dim \ker(f \circ f)$, d'où $\ker f = \ker(f \circ f)$.

b. Par théorème, si

$$\textit{(i)} \quad \ker f \cap \operatorname{im} f = \{0_E\} \qquad \text{et} \qquad \textit{(ii)} \quad \dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim E$$

alors $E = \ker f \oplus \operatorname{im} f$.
Le point *(ii)* est conséquence du théorème du rang, il reste à démontrer le point *(i)*.
Tout d'abord, comme f est une application linéaire de E dans E alors $\ker f$ et $\operatorname{im} f$ sont des sous-espaces vectoriels de E, et donc contiennent son vecteur nul, et ainsi $\{0_E\} \subseteq \ker f \cap \operatorname{im} f$.
Réciproquement, choisissons un vecteur v de $\ker f \cap \operatorname{im} f$.
Alors $v \in \operatorname{im} f$, donc il existe $u \in E$ tel que $v = f(u)$.
Et comme $v \in \ker f$ alors $f(v) = 0_E$.
Ceci donne $f(f(u)) = 0_E$, donc $u \in \ker(f \circ f)$. Mais nous savons que $\ker(f \circ f) = \ker f$, donc $u \in \ker f$. Ceci donne $f(u) = 0_E$ puis $v = 0_E$.
On vient de montrer que $\ker f \cap \operatorname{im} f \subseteq \{0_E\}$. Par double inclusion $\ker f \cap \operatorname{im} f = \{0_E\}$.
Les points *(i)* et *(ii)* étant assurés, $\ker f$ et $\operatorname{im} f$ sont supplémentaires dans E :

$$E = \ker f \oplus \operatorname{im} f$$

c. Supposons que $\ker f$ et $\operatorname{im} f$ sont supplémentaires dans E, et démontrons que $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f \circ f$, donc que $\operatorname{im} f$ et $\operatorname{im} f \circ f$ sont de même dimension.
Comme $\operatorname{im} f \circ f \subseteq \operatorname{im} f$ il suffit de démontrer que $\operatorname{im} f \subseteq \operatorname{im} f \circ f$.
Soit $v \in \operatorname{im} f$. Alors il existe $u \in E$ tel que $v = f(u)$.
Comme $E = \operatorname{im} f \oplus \ker f$ alors il existe $u_1 \in \operatorname{im} f$ et $u_2 \in \ker f$ tels que $u = u_1 + u_2$.
Comme $u_1 \in \operatorname{im} f$ alors il existe $v_1 \in E$ tel que $u_1 = f(v_1)$.
Comme $u_2 \in \ker f$ alors $f(u_2) = 0_E$.
On en déduit par linéarité de f :

$$v = f(u) = f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) = f(f(v_1)) + 0_E = f \circ f(v_1)$$

Ainsi v admet un antécédent par $f \circ f$, donc $v \in \operatorname{im} f \circ f$.
On a démontré que $\operatorname{im} f \subseteq \operatorname{im} f \circ f$. Par double inclusion $\operatorname{im} f = \operatorname{im} f \circ f$, puis par égalité de dimension $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f \circ f$.

17 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f, g deux endomorphismes de E tels que $f + g$ est bijectif.

a. Démontrer que $\operatorname{im} f + \operatorname{im} g = E$ et $\ker f \cap \ker g = \{0_E\}$.

b. On suppose de plus que $f \circ g = 0$.
Démontrer que $\operatorname{im} g = \ker f$, et que $\ker g$ et $\operatorname{im} f$ en sont deux supplémentaires.

a. Comme f et g sont deux endomorphismes de E alors leurs noyaux et images sont des sous-espaces vectoriels de E. Les inclusions $\operatorname{im} f + \operatorname{im} g \subseteq E$ et $\{0_E\} \subseteq \ker f \cap \ker g$ sont alors immédiates.
On suppose que $f + g$ est bijectif, donc $f + g$ est surjectif et injectif.
Comme $f+g$ est surjectif alors pour tout $v \in E$ il existe $u \in E$ tel que $v = f(u)+g(u)$, ce qui implique que $v \in \operatorname{im} f + \operatorname{im} g$.
On a démontré que $E \subseteq \operatorname{im} f + \operatorname{im} g$, donc par double inclusion $\operatorname{im} f + \operatorname{im} g = E$.
Soit $u \in \ker f \cap \ker g$. Alors $f(u)+g(u) = 0_E+0_E = 0_E$, donc $(f+g)(u) = (f+g)(0_E)$.
Or $f + g$ est injectif, donc $u = 0_E$.
On a démontré que $\ker f \cap \ker g \subseteq \{0_E\}$, donc par double inclusion $\ker f \cap \ker g = \{0_E\}$.

b. Comme $f \circ g = 0$ alors $\operatorname{im} g \subseteq \ker f$. En effet, si $u \in \operatorname{im} g$ alors il existe $v \in E$ tel que $u = g(v)$, donc $f(u) = f(g(v) = 0$ et $u \in \ker g$.
On en déduit, d'après la question précédente :

$$E \subseteq \operatorname{im} f + \ker f \qquad \text{et} \qquad \operatorname{im} g \cap \ker g \subseteq \{0_E\}$$

Par doubles inclusions :

$$E = \operatorname{im} f + \ker f \qquad \text{et} \qquad \operatorname{im} g \cap \ker g = \{0_E\}$$

D'après le théorème du rang, E étant de dimension finie :

$$\dim \operatorname{im} f + \dim \ker f = \dim \operatorname{im} g + \dim \ker g = \dim E$$

La formule de Grassmann :

$$\dim(\operatorname{im} f + \ker f) = \dim \operatorname{im} f + \dim \ker f - \dim(\operatorname{im} f \cap \ker f)$$

montre que $\dim(\operatorname{im} f \cap \ker f) = 0$, donc $\operatorname{im} f \cap \ker f = \{0_E\}$. Finalement, comme :

$$\begin{cases} \dim \operatorname{im} f + \dim \ker f = \dim E \\ \operatorname{im} f \cap \ker f = \{0_E\} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \dim \operatorname{im} g + \dim \ker g = \dim E \\ \operatorname{im} g \cap \ker g = \{0_E\} \end{cases}$$

Alors par théorème : $E = \operatorname{im} g \oplus \ker g = \operatorname{im} f \oplus \ker g$
Enfin la formule $\operatorname{im} f + \operatorname{im} g = E$ montre que

$$\dim \operatorname{im} f + \dim \operatorname{im} g \geqslant \dim E$$

On en déduit :

$$\dim \operatorname{im} g \geqslant \dim \ker f$$

Comme $\operatorname{im} g \subseteq \ker f$, alors $\dim \operatorname{im} g \leqslant \dim \ker f$, et donc $\dim \operatorname{im} g = \dim \ker f$ et enfin $\operatorname{im} g = \ker f$.
On a bien démontré que $\operatorname{im} g = \ker f$, et que $\ker g$ et $\operatorname{im} f$ en sont deux supplémentaires.

18 Soit f et g deux endomorphismes de E, espace vectoriel de dimension finie n, tels que $f \circ f = 0$ et $f \circ g + g \circ f = \mathrm{Id}_E$. Démontrer que n est pair.

- On démontre que $\operatorname{im} f \subseteq \ker f$:
  Soit $v \in \operatorname{im} f$. Alors il existe $u \in E$ tel que $v = f(u)$.
  En appliquant f ceci donne $f(v) = f(f(u))$. Comme $f \circ f = 0$ alors $f(v) = 0_E$, ce qui montre que $v \in \ker f$.
  On en déduit que $\operatorname{im} f \subseteq \ker f$.
- On démontre que $\ker f \subseteq \operatorname{im} f$:
  Soit $u \in \ker f$. Alors $f(u) = 0_E$.
  Comme $f \circ g + g \circ f = \mathrm{Id}_E$ alors $f(g(u)) + g(f(u)) = u$.
  Or $f(u) = 0_E$ et $g(0_E) = 0_E$ car g est linéaire, donc $u = f(g(u))$. Ceci montre que $u \in \operatorname{im} f$, puisque u est l'image de $g(u)$ par f.
  On a démontré que $\ker f \subseteq \operatorname{im} f$.
- Par double inclusion les deux points précédents donnent : $\ker f = \operatorname{im} f$
  On peut appliquer le théorème du rang car E est de dimension finie :
  $$\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim E$$
  Or $\ker f = \operatorname{im} f$ donc :
  $$2 \dim \ker f = n$$
  La dimension de $\ker f$ est un entier, donc n est multiple de 2, *i.e.*, n est pair.

20 Soit E, F, G trois espaces vectoriels de dimensions finies. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$ et $h \in \mathcal{L}(E,G)$.

a. Démontrer que si $h = g \circ f$ alors $\operatorname{im} h \subseteq \operatorname{im} g$ et $\ker f \subseteq \ker h$.

On suppose que $\operatorname{im} h \subseteq \operatorname{im} g$. Le but de la suite est de démontrer qu'il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ tel que $h = g \circ \varphi$.

b. Soit $(w_1, \ldots, w_m)$ une base de $\operatorname{im} h$. Démontrer que chaque w_i possède un antécédent u_i par h et v_i par g.

c. Soit $E_1 = \operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_m)$. Démontrer que E_1 est un supplémentaire de $\ker h$ dans E.

d. Construire une application linéaire $\varphi : E \to F$ vérifiant $h = g \circ \varphi$.

On suppose maintenant que $\ker f \subseteq \ker h$.

e. Construire une application linéaire $\psi : F \to G$ telle que $h = \psi \circ f$.

a. On suppose que $h = g \circ f$.
Soit $w \in \operatorname{im} h$. Alors il existe $u \in E$ tel que $w = h(u)$. Ceci donne $w = g \circ f(u)$, donc $w \in \operatorname{im} g$.
Soit $u \in \ker f$. Alors $h(u) = g \circ f(u) = g(0_F) = 0_G$ car g est linéaire, donc $u \in \ker h$.
On a démontré que $\operatorname{im} h \subseteq \operatorname{im} g$ et $\ker f \subseteq \ker h$.

b. Comme E est de dimension finie et $h \in \mathcal{L}(E, G)$ alors $\operatorname{im} h$ est de dimension finie, car elle est engendrée par exemple par l'image d'une base de E.

Soit $(w_1, \dots, w_m)$ une base de $\operatorname{im} h$. Tout élément w_i de cette base appartient à $\operatorname{im} h$ donc admet un antécédent par h. Ainsi pour tout $i = 1, \dots, m$ il existe $u_i \in E$ tel que $w_i = h(u_i)$.

Comme $\operatorname{im} h \subseteq \operatorname{im} g$ alors chaque w_i appartient à $\operatorname{im} g$, donc admet un antécédent par g. Ainsi pour tout $i = 1, \dots, m$ il existe $v_i \in F$ tel que $w_i = g(v_i)$.

c. Comme $h \in \mathcal{L}(E, G)$ alors $\ker h$ est un sous-espace vectoriel de E. Comme les u_i appartiennent à E alors $E_1 = \operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_m)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Ceci justifie déjà que $\{0_E\} \subseteq E_1 \cap \ker h$.

Réciproquement, soit u un élément de $E_1 \cap \ker h$. Alors $u \in E_1$ donc il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tels que $u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m$.

De plus $u \in \ker h$ donc $h(u) = 0_G$, puis par linéarité $\lambda_1 h(u_1) + \cdots + \lambda_m h(u_m) = 0_G$, et enfin $\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_m w_m = 0_G$ car les u_i vérifient $h(u_i) = w_i$ par définition.

On en déduit $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$ car la famille $(w_1, \dots, w_m)$ est libre, car c'est une base de $\operatorname{im} h$. Ceci implique que $u = 0_E$, donc $E_1 \cap \ker h \subseteq \{0_E\}$ puis par double inclusion $E_1 \cap \ker h = \{0_E\}$.

Démontrons maintenant que la famille $(u_1, \dots, u_m)$ est libre. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ des scalaires tels que $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m = 0_E$.

Alors comme ci-dessus $\lambda_1 h(u_1) + \cdots + \lambda_m h(u_m) = 0_G$, puis $\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_m w_m = 0_G$, et enfin $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$ car la famille $(w_1, \dots, w_m)$ est libre.

Ainsi la famille $(u_1, \dots, u_m)$ est libre. Or elle est génératrice de E_1, donc c'est une base de E_1. En conséquence E_1 est de dimension m.

Or la famille $(w_1, \dots, w_m)$ est une base de $\operatorname{im} h$, donc $\operatorname{im} h$ est de dimension m. D'après le théorème du rang :

$$\dim \ker h + \dim \operatorname{im} h = \dim E$$

On en déduit $\dim E = \dim \ker h + \dim E_1$, et comme on sait que $\ker h \cap E_1 = \{0_E\}$ alors par théorème ceci implique que $E = \ker h \oplus E_1$.

d. Comme $E = \ker h \oplus E_1$ alors une application linéaire de E dans F est uniquement déterminée par ses restrictions à $\ker h$ et à E_1.

Comme la famille $(u_1, \dots, u_m)$ est une base de E_1 alors une application linéaire de E_1 dans F est uniquement déterminée par l'image des u_i.

On définit $\varphi_1 : E_1 \to F$ comme étant l'unique application linéaire de E_1 dans F telle que pour tout $i = 1, \dots, m$: $\varphi_1(u_i) = v_i$.

Ensuite on note φ_2 l'application nulle de $\ker h$ dans F.

Soit φ l'unique application linéaire de E dans F telle que la restriction de φ à E_1 est φ_1 et la restriction de φ à $\ker h$ est φ_2.

Cette application étant définie, démontrons qu'elle vérifie bien $h = g \circ \varphi$.

Pour tout $i = 1, \dots, m$, comme $\varphi_1(u_i) = v_i$ alors $\varphi(u_i) = v_i$, puis $g \circ \varphi(u_i) = g(v_i) = w_i = h(u_i)$.

La famille $(u_1, \dots, u_m)$ est une base de E_1 et pour tout $i = 1, \dots, m$: $g \circ \varphi(u_i) = h(u_i)$. Donc $g \circ \varphi(u) = h(u)$ pour tout $u \in E_1$.

Soit $u \in \ker h$. Alors $h(u) = 0_G$. De plus $\varphi(u) = \varphi_2(u) = 0_F$ donc $g \circ \varphi(u) = 0_G = h(u)$. On a bien $g \circ \varphi(u) = h(u)$ pour tout $u \in \ker h$.

Les applications $g \circ \varphi$ et h sont égales sur E_1 et $\ker h$, lesquels sont supplémentaires dans E. Une application linéaire est uniquement déterminée par ses restrictions à ses sous-espaces supplémentaires, donc $g \circ \varphi$ et h sont égales sur E tout entier.

On a construit une application linéaire $\varphi : E \to F$ telle que $h = g \circ \varphi$.

e. On suppose que $\ker f \subseteq \ker h$ et on construit une application linéaire $\psi : F \to G$ telle que $\psi \circ f = h$.

On peut procéder de façon un peu plus rapide que précédemment en utilisant le lemme préliminaire au théorème du rang.

Comme E est de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $\ker f$ admet un supplémentaire E' dans E. D'après le lemme en question l'application

$$f' : \begin{array}{rcl} E' & \longrightarrow & \operatorname{im} f \\ u & \longmapsto & f(u) \end{array}$$

est un isomorphisme.

Sa réciproque f'^{-1} est donc bien définie, c'est une application de $\operatorname{im} f$ dans E', donc de $\operatorname{im} f$ dans E. On note ψ_1 sa composition avec h : $\psi_1 = h \circ f'^{-1}$.

Alors $\psi_1 \circ f'$ est une application linéaire de E' dans G vérifiant $\psi_1 \circ f' = h_{|E'}$.

Soit F' un supplémentaire de $\operatorname{im} f$ dans F. Il existe bien un tel supplémentaire car $\operatorname{im} f$ est un sous-espace vectoriel de F, qui est de dimension finie.

Alors $F = \operatorname{im} f \oplus F'$. On a défini $\psi_1 = h \circ f'^{-1}$ et on note ψ_2 l'application nulle de F' dans G. Soit ψ l'application linéaire de F dans G dont les restrictions à $\operatorname{im} f$ et F' sont respectivement ψ_1 et ψ_2.

Démontrons que $\psi \circ f = h$.

Comme $E = \ker f \oplus E'$ alors il suffit de démontrer ceci sur $\ker f$ et sur E'.

Comme $\ker f \subseteq \ker h$ alors pour tout $u \in \ker f$ on a $u \in \ker h$ donc $\psi(f(u)) = \psi(0_F) = O_G = h(u)$. Les restrictions à $\ker f$ de $\psi \circ f$ et de h sont égales.

La restriction de $\psi \circ f$ à E' est $\psi \circ f'$. Comme l'image de f' est $\operatorname{im} f$ alors $\psi \circ f' = \psi_1 \circ f'$. On a justifié que $\psi_1 \circ f' = h_{|E'}$, donc la restriction de $\psi \circ f$ à E' est égale à celle de h.

Comme $E = \ker f \oplus E'$ alors $\psi \circ f$ et h sont égales sur E tout entier.

On a construit une application linéaire $\psi : F \to G$ telle que $h = \psi \circ f$.

21 Soit n et m deux entiers avec $0 \leqslant m \leqslant n$.

Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ une famille de m formes linéaires non-nulles de E, espace vectoriel de dimension n.

Pour tout $k = 1, \dots, m$ on note $H_k = \ker \varphi_k$. Soit $F = H_1 \cap \cdots \cap H_m$.

Le but de cet exercice est de démontrer que F est de dimension $n - m$ si et seulement si la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ est libre.

On définit l'application $f : \begin{array}{ccl} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^m \\ u & \longmapsto & (\varphi_1(u), \dots, \varphi_m(u)). \end{array}$

a. Justifier que f est linéaire, déterminer son noyau. Minorer la dimension de ce noyau.

b. Justifier que si $\dim F = n - m$ alors pour tout $k = 1, \dots, m$, le vecteur e_k de $\mathbb{K}^m$ possède un antécédent u_k par f. En déduire que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ est libre.

c. Démontrer que si $\operatorname{rg} f < m$ alors $\operatorname{im} f$ est inclus dans un hyperplan H de $\mathbb{K}^m$. En déduire que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ est liée.

d. Conclure.

a. Les composantes de f sont des formes linéaires donc f est linéaire.
Son noyau est l'ensemble des vecteur u de E tels que $\varphi_1(u) \cdots = \varphi_m(u) = 0_{\mathbb{R}}$. Il s'agit de F :

$$\begin{aligned} \forall u \in E \qquad u \in \ker f &\iff \varphi_1(u) = \cdots = \varphi_m(u) = 0 \\ &\iff \forall i = 1, \dots, m \quad \varphi_i(u) = 0_{\mathbb{R}} \\ &\iff \forall i = 1, \dots, m \quad u \in \ker \varphi_i = H_i \\ &\iff u \in \bigcap_{i=1}^{m} H_i = F \end{aligned}$$

D'après le théorème du rang :

$$\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{im} f$$

On en déduit $n = \dim F + \dim \operatorname{im} f$ puis $\dim F = n - \dim \operatorname{im} f$.
Comme $\operatorname{im} f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^m$ alors $\dim \operatorname{im} f \leqslant m$, et donc on obtient $\dim F \geqslant n - m$.

b. Si $\dim F = n - m$ alors d'après ce qui précède $\dim \operatorname{im} f = m$. Or $\operatorname{im} f \subseteq \mathbb{K}^m$, donc par égalité de dimension $\operatorname{im} F = \mathbb{K}^m$. Ceci signifie que f est surjective.
Tout élément de $\mathbb{K}^m$ possède alors un antécédent par f, et *a fortiori* tout vecteur de la base canonique possède un antécédent par f.
On a donc justifié que pour tout vecteur e_k de la base canonique de $\mathbb{K}^m$ il existe un vecteur u_k de E tel que $e_k = f(u_k)$.
Ceci signifie :

$$\forall (i, k) \in \{1, \dots, m\}^2 \qquad \varphi_i(u_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démontrons maintenant que la famille de formes linéaires $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ est libre. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ des scalaires tels que $\lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_m \varphi_m = 0$. Alors :

$$\forall u \in E \qquad \lambda_1 \varphi_1(u) + \cdots + \lambda_m \varphi_m(u) = 0_{\mathbb{K}}$$

Ceci est donc valable pour tout vecteur u_k défini ci-dessus, ce qui implique que $\lambda_k = 0$ pour tout $k = 1, \ldots, m$.

On a démontré que si $\lambda_1\varphi_1 + \cdots + \lambda_m\varphi_m = 0$ alors $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$, donc la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ est libre.

c. Si $\operatorname{rg} f < m$ alors $\operatorname{rg} f \leqslant m - 1$, car le rang est un entier. Ainsi $\operatorname{im} f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^m$ de dimension inférieure ou égale à $m - 1$.

Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une base de $\operatorname{im} f$. La famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est alors une famille libre de vecteurs de $\mathbb{K}^m$, donc par le théorème de la base incomplète elle peut être complétée en une base $(u_1, \ldots, u_m)$ de $\mathbb{K}^m$.

Posons $H = \operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_{m-1})$. Comme $p \leqslant m - 1$ et $\operatorname{im} f = \operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$ alors $\operatorname{im} f \subseteq H$.

Comme la famille $(u_1, \ldots, u_{m-1})$ est incluse dans la base $(u_1, \ldots, u_m)$ de $\mathbb{K}^m$ alors elle est libre, et donc H est de dimension $m - 1$. Ainsi H est un hyperplan de $\mathbb{K}^m$.

L'équation de H est de la forme $a_1x_1 + \cdots + a_mx_m = 0$ où les a_i sont des scalaires, non tous nuls car H est strictement inclus dans $\mathbb{K}^m$.

Pour tout $u \in E$ on a $f(u) \in \operatorname{im} F$ donc $f(u) \in H$, ce qui donne :

$$a_1\varphi_1(u) + \cdots + a_m\varphi_m(u) = 0_{\mathbb{R}}$$

Ainsi $a_1\varphi_1 + \cdots + a_m\varphi_m = 0$ alors que les a_i ne sont pas tous nuls, donc la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ est liée.

d. On a démontré que F est de dimension $n - m$ si et seulement si la famille de formes linéaires $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ est libre. Le sens direct est démontré dans la question (b), le sens indirect est démontré par contraposée dans la question (c). En effet, si F n'est pas de dimension $n - m$ alors $\dim F > n - m$ ce qui donne $\operatorname{rg} f < m$.