

Corrigé du T. D. B10 Dimension

① Soit $E = \mathbb{R}^3$, $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$ avec : $u_1 = (3, 10, 10)$ et $u_2 = (6, 7, -6)$.

Soit $G = \{(x, y, z) \in E \mid 10x - 6y + 3z = 0\}$.

a. Donner la dimension de F est démontrer qu'il est inclus dans G .

b. Justifier que G ne peut être de dimension 3 et en déduire que $F = G$.

- a. Les vecteurs u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre. Cette famille est génératrice de F par définition de F . Elle est donc une base de F , et F est de dimension 2.

Les vecteurs u_1 et u_2 appartiennent à G car ils satisfont son équation :

En effet $10 \times 3 - 6 \times 10 + 3 \times 10 = 0$ et $10 \times 6 - 6 \times 7 + 3 \times (-6) = 0$.

De plus G est le noyau de la forme linéaire $(x, y, z) \mapsto 10x - 6y + 3z$ donc il est un sous-espace vectoriel de E . Il est donc stable par combinaisons linéaires.

Comme il contient u_1 et u_2 alors il contient $\text{Vect}(u_1, u_2)$, ce qui montre que F est inclus dans G .

- b. On sait que G est un sous-espace vectoriel de E et que E est de dimension 3.

Si G est de dimension 3 alors par théorème :

$$(G \subseteq E \quad \text{et} \quad \dim G = \dim E) \implies G = E$$

Mais G est différent de E : par exemple le vecteur $e_1 = (1, 0, 0)$ ne satisfait pas l'équation $10x - 6y + 3z = 0$, donc il n'appartient pas à G alors qu'il appartient à E .

On en déduit, par l'absurde, que G n'est pas de dimension 3. Comme il est un sous-espace vectoriel de E qui est de dimension 3 alors il est de dimension inférieure ou égale à 2 : $\dim G \leq 2$.

De plus F est un sous-espace vectoriel de G est $\dim F = 2$, donc : $\dim G \geq 2$.

Ainsi $\dim G = 2$, puis par théorème :

$$(F \subseteq G \quad \text{et} \quad \dim F = \dim G) \implies F = G$$

On a démontré que $F = G$.

② Soit $E = \mathbb{R}^4$. Déterminer le rang des familles de vecteurs suivantes :

$$\mathcal{F}_1 = ((1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1))$$

$$\mathcal{F}_2 = ((1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 0))$$

$$\mathcal{F}_3 = \emptyset$$

$$\mathcal{F}_4 = ((1, 0, 0, 0), (2, 0, 0, 0), \dots, (n, 0, 0, 0)) \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$\mathcal{F}_5 = ((1, 0, 0, 0), (2, 1, 0, 0), (3, 2, 1, 0), \\ (4, 3, 2, 1), (5, 4, 3, 2))$$

- Notons $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (0, 0, 1, 1)$, $u_3 = (0, 0, 0, 1)$ les trois vecteurs de \mathcal{F}_1 .
On constate que pour tout $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_E &\implies (\lambda_1, 0, \lambda_2, \lambda_2 + \lambda_3) = (0, 0, 0, 0) \\ &\implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{aligned}$$

Ceci montre que la famille \mathcal{F}_1 est libre.

Elle est donc de rang 3 : $\text{rg } \mathcal{F}_1 = 3$

En effet, par définition le rang de la famille \mathcal{F}_1 est la dimension de $\text{Vect}(\mathcal{F}_1)$, l'espace vectoriel qu'elle engendre. Or il est évident qu'elle est génératrice de cet espace vectoriel, donc c'est une base de celui-ci, qui ainsi est de dimension 3.

- On note $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (1, 1, 0, 0)$, $u_3 = (1, 1, 1, 0)$, $u_4 = (0, 1, 1, 0)$ les quatre vecteurs de \mathcal{F}_2 .

On constate que $u_4 = u_3 - u_1$, donc :

$$\text{Vect}(\mathcal{F}_2) = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$$

La famille (u_1, u_2, u_3) est libre car pour tout $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_E &\implies (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_3, 0) = (0, 0, 0, 0) \\ &\implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{aligned}$$

Elle est donc une base de $\text{Vect}(\mathcal{F}_2)$, lequel est donc de dimension 3, ce qui montre que la famille \mathcal{F}_2 est de rang 3 : $\text{rg } \mathcal{F}_2 = 3$

- La famille vide engendre l'espace vectoriel réduit au vecteur nul : $\text{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$
Cet espace vectoriel est de dimension nulle, donc la famille vide est de rang nul : $\text{rg } \mathcal{F}_3 = 0$
- Tous les vecteurs de la famille \mathcal{F}_4 sont des multiples de $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, donc :

$$\text{Vect}(\mathcal{F}_4) = \text{Vect}((1, 0, 0, 0))$$

Le vecteur $(1, 0, 0, 0)$ est non-nul donc la famille $((1, 0, 0, 0))$ est libre. Elle est donc une base de $\text{Vect}(\mathcal{F}_4)$, lequel est ainsi de dimension 1, et donc la famille \mathcal{F}_4 est de rang 1 : $\text{rg } \mathcal{F}_4 = 1$

- La famille \mathcal{F}_5 est une famille de cinq vecteurs de E , qui est de rang 4. Elle ne peut donc pas être de rang supérieur à 4.

On note $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (2, 1, 0, 0)$, $u_3 = (3, 2, 1, 0)$, $u_4 = (4, 3, 2, 1)$, $u_5 = (5, 4, 3, 2)$ ses vecteurs. Alors on constate que :

$$2u_4 - u_3 = (8, 6, 4, 2) - (3, 2, 1, 0) = (5, 4, 3, 2) = u_5$$

Ainsi le vecteur u_3 est combinaison linéaire des vecteurs u_1, u_2, u_3, u_4 , et donc :

$$\text{Vect}(\mathcal{F}_5) = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$$

Démontrons que la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est libre.

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ des scalaires tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = 0_E$. Alors :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

L'unique solution de ce système est $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (0, 0, 0, 0)$, et donc la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est libre.

L'espace vectoriel qu'elle engendre est donc de dimension 4, ce qui montre que la famille \mathcal{F}_5 est de rang 4 : $\text{rg } \mathcal{F}_5 = 4$

③ Démontrer qu'il existe une unique forme linéaire $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\varphi(1, 1, 1) = 3 \quad \varphi(1, 2, 3) = 5 \quad \varphi(1, 3, 6) = -2$$

Calculer $\varphi(u)$ pour tout élément $u = (x, y, z)$ de \mathbb{R}^3 .

Notons $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 3)$ et $u_3 = (1, 3, 6)$.

On démontre que cette famille est libre. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ trois scalaires tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Alors ils satisfont le système :

$$S : \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Les opérations ($L_3 \leftarrow L_3 - L_2$) puis ($L_2 \leftarrow L_2 - L_1$) donnent :

$$S \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

L'opération ($L_3 \leftarrow L_3 - L_2$) donne $\lambda_3 = 0$, puis on obtient $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 = 0$.

On a démontré que :

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \quad \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0_{\mathbb{R}}$$

La famille (u_1, u_2, u_3) est donc libre.

Or elle contient trois vecteurs, et \mathbb{R}^3 est de dimension 3. C'est donc une famille libre maximale de \mathbb{R}^3 , et donc c'est une base de \mathbb{R}^3 .

On sait qu'une application linéaire est uniquement déterminée par l'image d'une base.

Or 3, 5, -2 sont trois éléments de \mathbb{R} , donc il existe une et une seule application linéaire φ de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} telle que :

$$\varphi(u_1) = 3 \quad \varphi(u_2) = 5 \quad \varphi(u_3) = -2$$

On calcule maintenant $\varphi(u)$ pour tout vecteur $u = (x, y, z)$ de \mathbb{R}^3 .

On sait que :

$$\varphi(1, 1, 1) = 3 \quad \varphi(1, 2, 3) = 5 \quad \varphi(1, 3, 6) = -2$$

Par linéarité de φ on calcule successivement :

$$\begin{aligned} \varphi(0, 1, 2) &= \varphi(1, 2, 3) - \varphi(1, 1, 1) = 2 \\ \varphi(0, 1, 3) &= \varphi(1, 3, 6) - \varphi(1, 2, 3) = -7 \\ \varphi(0, 0, 1) &= \varphi(0, 1, 3) - \varphi(0, 1, 2) = -9 \\ \varphi(0, 1, 0) &= \varphi(0, 1, 2) - 2\varphi(0, 0, 1) = 20 \\ \varphi(1, 0, 0) &= \varphi(1, 1, 1) - \varphi(0, 1, 0) - \varphi(0, 0, 1) = -8 \end{aligned}$$

On donc obtenu :

$$\varphi(e_1) = -8 \quad \varphi(e_2) = 20 \quad \varphi(e_3) = -9$$

On peut donc en déduire :

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(xe_1 + ye_2 + ze_3) = x\varphi(e_1) + y\varphi(e_2) + z\varphi(e_3)$$

Soit :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x, y, z) = -8x + 20y - 9z$$

On vérifie que :

$$\varphi(1, 1, 1) = 3 \quad \varphi(1, 2, 3) = 5 \quad \varphi(1, 3, 6) = -2$$

④ Soit f l'application linéaire définie par :

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) &\longmapsto (3x + 3y + 3z + 3t, 3x - 3y + z + t, 2x + 2y + z + t) \end{aligned}$$

Calculer le noyau de f et démontrer que f est surjective.

Le noyau de f est l'ensemble des vecteurs (x, y, z, t) de \mathbb{R}^4 tels que $f(x, y, z, t) = (0, 0, 0)$, donc satisfaisant le système :

$$S : \begin{cases} 3x + 3y + 3z + 3t = 0 \\ 3x - 3y + z + t = 0 \\ 2x + 2y + z + t = 0 \end{cases}$$

On applique l'algorithme du pivot de Gauss :

$$S \iff \begin{cases} x + y + 2z + 2t = 0 \\ -6y - 5z - 5t = 0 \\ -3z - 3t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases}$$

On en déduit :

$$\ker f = \{(0, 0, -t, t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((0, 0, -1, 1))$$

Le vecteur $(0, 0, -1, 1)$ est non-nul, donc il forme une famille libre, celle-ci engendre le noyau de f , donc en est une base, et ainsi le noyau de f est de dimension 1.

D'après le théorème du rang, comme f est une application linéaire de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^3 alors :

$$\dim \ker f + \dim \text{im } f = \dim \mathbb{R}^4$$

On en déduit : $\dim \text{im } f = 3$

Or l'image de f est incluse dans \mathbb{R}^3 . Ainsi :

$$\text{im } f \subseteq \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad \dim \text{im } f = \dim \mathbb{R}^3 \quad \text{donc} \quad \text{im } f = \mathbb{R}^3$$

Comme $\text{im } f = \mathbb{R}^3$ alors f est surjective.

1 Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ on considère les sous-espaces vectoriels :

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z, t) \in E \mid 3x - y - z = 2y + t = 0\} \\ G &= \text{Vect}(u_1, u_2, u_3) \quad \text{où} \quad \begin{aligned} u_1 &= (1, -1, 2, 2) \\ u_2 &= (2, 1, 4, -2) \\ u_3 &= (1, 2, 2, -4) \end{aligned} \end{aligned}$$

Donner une base et la dimension des sous-espaces vectoriels F , G , $F \cap G$, et $F + G$.

- Pour le sous-espace vectoriel F on écrit :

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z, t) \in E \mid z = 3x - y \quad \text{et} \quad t = -2y\} \\ &= \{(x, y, 3x - y, -2y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{Vect}((1, 0, 3, 0), (0, 1, -1, -2)) \end{aligned}$$

On pose $v_1 = (1, 0, 3, 0)$ et $v_2 = (0, 1, -1, -2)$. Alors la famille (v_1, v_2) est génératrice de F . Elle est libre car ses deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Donc c'est une base de F .

Elle contient deux vecteurs donc F est de dimension 2.

- La famille (u_1, u_2, u_3) engendre le sous-espace vectoriel G . On remarque que $u_3 = u_2 - u_1$, donc u_3 est combinaison linéaire de u_1 et u_2 , et ainsi la famille (u_1, u_2) est génératrice de G .

Or elle est libre car les vecteurs u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, donc c'est une base de G , et comme elle contient deux vecteurs alors G est de dimension 2.

- Soit u un vecteur de $F \cap G$.

Alors $u \in G$ donc il existe deux scalaires λ_1 et λ_2 tels que $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$, ce qui s'écrit :

$$u = (\lambda_1 + 2\lambda_2, -\lambda_1 + \lambda_2, 2\lambda_1 + 4\lambda_2, 2\lambda_1 - 2\lambda_2)$$

Comme $u \in F$ alors il vérifie ses équations, ce qui donne :

$$3(\lambda_1 + 2\lambda_2) - (-\lambda_1 + \lambda_2) - (2\lambda_1 + 4\lambda_2) = 2(-\lambda_1 + \lambda_2) + (2\lambda_1 - 2\lambda_2) = 0$$

Ces équations donnent par équivalence : $\lambda_2 = -2\lambda_1$

On en déduit :

$$u = \lambda_1 u_1 - 2\lambda_1 u_2 = \lambda_1(u_1 - 2u_2) = \lambda_1(-3, -3, -6, 6) = -3\lambda_1(1, 1, 2, -2)$$

On pose $w_1 = (1, 1, 2, -2)$. On vient de montrer que si $u \in F \cap G$ alors $u \in \text{Vect}(w_1)$, ce qui donne : $F \cap G \subseteq \text{Vect}(w_1)$

Réciproquement, comme $w_1 = -\frac{1}{3}(u_1 - 2u_2)$ alors $w_1 \in G$ et comme w_1 vérifie les équations $3x - y - z = 2y + t = 0$ alors $w_1 \in F$. Ainsi $w_1 \in F \cap G$ et comme $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E alors il est stable par combinaisons linéaires, et donc $\text{Vect}(w_1) \subseteq F \cap G$.

Par double inclusion : $F \cap G = \text{Vect}(w_1)$

La famille (w_1) est génératrice de $F \cap G$. Elle est libre car elle contient un unique vecteur et celui-ci est non-nul. Donc c'est une base de $F \cap G$. Finalement, $F \cap G$ est de dimension 1.

- D'après la formule de Grassmann :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

On calcule : $\dim(F + G) = 2 + 2 - 1 = 3$

Il reste à donner une base de $F + G$. Comme $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$ et $G = \text{Vect}(u_1, u_2)$ alors :

$$F + G = \text{Vect}(u_1, u_2, v_1, v_2)$$

La famille (u_1, u_2, v_1, v_2) est génératrice de $F + G$, mais elle ne peut être libre car elle contient quatre vecteurs alors que $F + G$ est de dimension trois.

On essaie donc d'exprimer l'un de ses quatre vecteurs comme combinaison linéaire des trois autres.

On sait que $w_1 = -\frac{1}{3}(u_1 - 2u_2)$. Or :

$$w_1 = (1, 1, 2, -2) = (1, 0, 3, 0) + (1, 1, -1, -2) = v_1 + v_2$$

On peut en déduire, par exemple : $v_2 = -\frac{1}{3}(u_1 - 2u_2) - v_1$

Ainsi v_2 est combinaison linéaire des vecteurs u_1, u_2, v_1 , donc :

$$F + G = \text{Vect}(u_1, u_2, v_1)$$

La famille (u_1, u_2, u_3) est génératrice de $F + G$. Or elle contient trois vecteurs et $F + G$ est de dimension 3, donc c'est une famille génératrice minimale, et ainsi c'est une base de $F + G$.

Grâce à ce dernier théorème, il est inutile de démontrer que la famille (u_1, u_2, v_1) est libre.

2 Dans $E = \mathbb{R}^3$ on note F le sous-espace vectoriel engendré par $u_1 = (7, 5, 0)$ et $u_2 = (6, 10, 5)$.

- a. Démontrer que F est le plan vectoriel d'équation $5x - 7y + 8z = 0$.
 b. Soit G la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u_3 = (8, 9, 3)$. Démontrer que G est un supplémentaire de F dans E .

- a. Notons F' le plan vectoriel d'équation $5x - 7y + 8z = 0$. Alors on peut écrire :

$$\begin{aligned} F' &= \{(x, y, z) \in E \mid 5x - 7y + 8z = 0\} = \left\{ \left(x, y, -\frac{5}{8}x + \frac{7}{8}y \right) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\left(1, 0, -\frac{5}{8} \right), \left(0, 1, \frac{7}{8} \right) \right) \end{aligned}$$

Ceci montre que F' est bien un sous-espace vectoriel de E .

On constate que les vecteurs $u_1 = (7, 5, 0)$ et $u_2 = (6, 10, 5)$ vérifient l'équation $5x - 7y + 8z = 0$, ils appartiennent donc à F' : $(u_1, u_2) \subseteq F'$

Comme F' est un sous-espace vectoriel de E alors il est stable par combinaisons linéaires, et ainsi : $\text{Vect}(u_1, u_2) \subseteq F'$

Ceci montre que $F \subseteq F'$.

Les vecteurs u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, donc la famille (u_1, u_2) est libre. Elle est génératrice de F , donc elle forme une base de F . Ainsi F est de dimension 2.

De même les vecteurs $v_1 = (1, 0, -\frac{5}{8})$ et $v_2 = (0, 1, \frac{7}{8})$ ne sont pas colinéaires, donc la famille (v_1, v_2) est libre. Elle est génératrice de F' , donc elle forme une base de F' . Ainsi F' est de dimension 2.

Finalement $F \subseteq F'$ avec $\dim F = \dim F'$. Par théorème on en déduit que $F = F'$, *i.e.*, F est bien le sous-ensemble de E d'équation $5x - 7y + 8z = 0$.

- b. Montrons que $F \cap G = \{0_E\}$.

Tout élément de $F \cap G$ s'écrit $u = \alpha u_3 = (8\alpha, 9\alpha, 3\alpha)$ car il appartient à G . Il vérifie l'équation $5x - 7y + 8z = 0$, ce qui donne $\alpha = 0$. Ainsi $F \cap G$ ne peut contenir que le vecteur nul. Or il contient bien ce vecteur, et donc : $F \cap G = \{0_E\}$

Comme le vecteur u_3 est non-nul alors il forme une famille libre, et comme il engendre G alors il forme une base de G . Ainsi G est de dimension 1.

Finalement on a obtenu : (i) $F \cap G = \{0_E\}$

$$(ii) \quad \dim F + \dim G = \dim E \quad \text{car} \quad 2 + 1 = 3$$

Par théorème, ceci implique que F et G sont supplémentaires dans E : $E = F \oplus G$

Une autre méthode aurait été de démontrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre. Elle constitue alors une famille libre maximale de E , et donc une base de E .

Par théorème, dans ce cas les sous-espaces vectoriels $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$ et $G = \text{Vect}(u_3)$ sont supplémentaires dans E . On dit alors que la base (u_1, u_2, u_3) est adaptée à la somme directe $E = F \oplus G$.

3 Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ on considère la famille \mathcal{F} composée des vecteurs :

$$u_1 = (1, -1, -1, -1) \quad u_2 = (2, 0, 2, 0) \quad u_3 = (-1, -1, 2, -1)$$

- Démontrer que cette famille est libre.
- Soit G l'ensemble des vecteurs (x, y, z, t) tels que $y = t$. Démontrer que $\text{Vect } \mathcal{F} = G$ par inclusion puis en raisonnant sur la dimension.
- Compléter \mathcal{F} en une base de E .

a. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_E$. Alors :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Par opérations élémentaires ce système équivaut aux systèmes :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \text{puis} \quad \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 5\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

On en déduit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. On a démontré que :

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \quad \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_E \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

La famille (u_1, u_2, u_3) est donc libre.

b. Par énoncé :

$$G = \{(x, y, z, t) \in E \mid y = t\}$$

On justifie que G est un sous-espace vectoriel :

$$G = \{(x, y, z, y) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0))$$

Comme les vecteurs $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 0)$ appartiennent à E alors G est un sous-espace vectoriel de E .

Les vecteurs u_1, u_2, u_3 satisfont l'équation $y = t$, ils appartiennent donc à G :

$$(u_1, u_2, u_3) \subseteq G$$

Or G est un sous-espace vectoriel, donc il est stable par combinaisons linéaires, et ainsi :

$$\text{Vect}(u_1, u_2, u_3) \subseteq G$$

Ceci montre que $\text{Vect}(\mathcal{F}) \subseteq G$.

On a même les inclusions :

$$\text{Vect}(\mathcal{F}) \subseteq G \subseteq E$$

Celles-ci donnent les inégalités :

$$\dim \text{Vect}(\mathcal{F}) \leq \dim G \leq \dim E$$

La famille \mathcal{F} est génératrice de $\text{Vect}(\mathcal{F})$. Elle est libre d'après la question précédente. Elle est donc une base de $\text{Vect}(\mathcal{F})$, et ainsi $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est de dimension 3. Or $E = \mathbb{R}^4$ donc :

$$3 \leq \dim G \leq 4$$

Comme la dimension d'un espace vectoriel est un entier alors $\dim G = 3$ ou $\dim G = 4$. Si $\dim G = 4$ alors $G \subseteq E$ avec $\dim G = \dim E$, ce qui donne $G = E$. Or le vecteur $e_2 = (0, 1, 0, 0)$ appartient à E mais pas à G (il ne satisfait pas l'équation $y = t$), ce qui est une contradiction.

En conséquence $\dim G = 3$. Alors $\text{Vect}(\mathcal{F}) \subseteq G$ avec $\dim \text{Vect}(\mathcal{F}) = \dim G$, et qui montre que $\text{Vect}(\mathcal{F}) = G$.

- c. La famille \mathcal{F} est une famille libre de vecteurs de E . D'après le théorème de la base incomplète elle peut être complétée en une base de E .

Comme E est de dimension 4, alors il lui manque un vecteur.

Il suffit de choisir un vecteur de E ne satisfaisant pas l'équation $y = t$. Par exemple $e_2 = (0, 1, 0, 0)$.

En effet, comme ce vecteur ne satisfait pas l'équation $y = t$ alors il n'appartient pas à G , donc il n'appartient pas à $\text{Vect}(\mathcal{F})$ (d'après la question précédente), donc la famille $\mathcal{F} \cup \{e_2\}$ est libre.

Démontrons ceci. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 e_2 = 0_E$$

Si $\lambda_4 \neq 0$ alors :

$$e_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_4} u_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_4} u_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_4} u_3$$

Ceci est impossible car nous venons de justifier que e_2 n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{F} .

Ainsi $\lambda_4 = 0$, puis :

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_E$$

Nous savons depuis la première question que la famille \mathcal{F} est libre, donc ceci implique $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, et ainsi nous avons démontré que la famille $\mathcal{F} \cup \{e_2\}$ est libre.

Cette famille est une famille libre de quatre vecteurs de E , lequel est de dimension 4, donc c'est une famille libre maximale, et ainsi par théorème c'est une base de E .

On a bien complété la famille libre \mathcal{F} en une base de E .

4 Soit $E = \mathbb{R}^4$ et F, G, H les sous-ensembles de E d'équations respectives :

$$F : x - 2y + 2t = 3y + z = 0$$

$$G : 4x - 2y + z = 2x + z + 2t = 0$$

$$H : x + t = x - y - z = 0$$

- Justifier que F, G, H sont des sous-espaces vectoriels de E et donner leurs dimensions.
- Calculer $F \cap G$ et $F \cap H$.
- En déduire que $F + G = E$, puis démontrer que $F + H$ est le sous-ensemble de E d'équation $x + y + z + 2t = 0$.

a. On obtient

$$F = \text{Vect}(u_1, u_2) \quad \text{avec} \quad u_1 = (2, 1, -3, 0) \quad \text{et} \quad u_2 = (-2, 0, 0, 1)$$

$$G = \text{Vect}(v_1, v_2) \quad \text{avec} \quad v_1 = (1, 0, -4, 1) \quad \text{et} \quad v_2 = (0, 1, 2, -1)$$

$$H = \text{Vect}(w_1, w_2) \quad \text{avec} \quad w_1 = (1, 0, 1, -1) \quad \text{et} \quad w_2 = (0, 1, -1, 0)$$

Les vecteurs $u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2$ appartenant à E , ceci montre que F, G, H sont des sous-espaces vectoriels de E .

De plus les familles $(u_1, u_2), (v_1, v_2), (w_1, w_2)$ sont génératrices respectivement de F, G, H .

Elles sont libres car composées de deux vecteurs non colinéaires.

Donc ce sont des bases respectives de F, G, H , et ainsi ces trois sous-espaces vectoriels sont de dimension 2.

- Un vecteur $u = (x, y, z, t)$ appartient à $F \cap G$ si et seulement si il satisfait les équations de F et de G , donc le système :

$$\begin{cases} x - 2y + 2t = 0 \\ 3y + z = 0 \\ 4x - 2y + z = 0 \\ 2x + z + 2t = 0 \end{cases}$$

Soit A la matrice de ce système. Par opérations élémentaires :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 1 & -8 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -10 & 1 & -8 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -19 & 20 \\ 0 & 0 & -7 & 6 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & 6 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

Le système est donc de Cramer. En conséquence le vecteur u appartient à $F \cap G$ si et seulement si il est nul, et ainsi $F \cap G = \{0_E\}$.

Le vecteur $u = (x, y, z, t)$ appartient à $F \cap H$ si et seulement si il satisfait le système :

$$\begin{cases} x - 2y & + 2t = 0 \\ & 3y + z & = 0 \\ x & + t = 0 \\ x - y - z & = 0 \end{cases}$$

Soit B la matrice de ce système. Par opérations élémentaires :

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$F \cap H = \left\{ \left(-t, \frac{1}{2}t, -\frac{3}{2}t, t \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}((2, -1, 3, -2))$$

Comme le vecteur $(2, -1, 3, -2)$ n'est pas nul alors $F \cap H$ est une droite vectorielle, et donc de dimension 1.

c. D'après la formule de Grassmann :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = 2 + 2 - 0 = 4$$

$$\dim(F + H) = \dim F + \dim H - \dim(F \cap H) = 2 + 2 - 1 = 3$$

Comme $F + G \subseteq E$ et $\dim(F + G) = \dim E$ alors par théorème $F + G = E$.

Soit K le sous-ensemble de E d'équation $x + y + z + 2t = 0$.

Alors K est le noyau de la forme linéaire non-nulle $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{K}$
 $(x, y, z, t) \longmapsto x + y + z + 2t$.

En conséquence K est un hyperplan de E . Comme E est de dimension 4 alors K est de dimension 3.

Les vecteurs u_1, u_2, w_1, w_2 satisfont l'équation $x + y + z + 2t = 0$, donc appartiennent à K . Comme K est stable par combinaisons linéaires alors il contient $\text{Vect}(u_1, u_2, w_1, w_2)$ c'est-à-dire $F + H$.

Comme $F + H \subseteq K$ et $\dim(F + H) = \dim K$ alors par théorème $F + H = K$.

5 Soit $E = \mathbb{R}^4$ puis :

$$F = \{(x, y, z, t) \in E \mid x - y + z - t = 0\}$$

a. Déterminer la dimension de F .

Soit G le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $u_1 = (1, 2, 3, 4)$ et $u_2 = (4, 3, 2, 1)$.

b. Démontrer que $F + G = E$. En déduire la dimension de $F \cap G$.

c. Déterminer une base d'un supplémentaire de $F \cap G$ dans F .

a. On obtient une famille génératrice de F :

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z, t) \mid t = x - y + z\} \\ &= \{(x, y, z, x - y + z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \text{Vect}((1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 1)) \end{aligned}$$

On note $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 0, -1)$, $v_3 = (0, 0, 1, 1)$.

Ces trois vecteurs appartiennent à E . Comme $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ alors F est un sous-espace vectoriel de E , et la famille (v_1, v_2, v_3) est génératrice de F .

Montrons que cette famille est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_E$. Alors :

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3) = (0, 0, 0, 0)$$

Ceci implique : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

On a donc démontré que la famille (v_1, v_2, v_3) est libre. Or elle engendre F , donc c'est une base de F .

Ainsi F est dimension 3 : $\dim F = 3$

b. Comme $F \subseteq F + G$ alors $\dim F \leq \dim(F + G)$, *i.e.*, $3 \leq \dim(F + G)$.

De plus F et G sont des sous-espaces vectoriels de E donc $F + G \subseteq E$, et ainsi $\dim(F + G) \leq \dim E = 4$.

Or la dimension d'un espace vectoriel est un entier, donc $\dim(F + G) = 3$ ou $\dim(F + G) = 4$.

Supposons que $\dim(F + G) = 3$. Alors :

$$F \subseteq (F + G) \quad \text{et} \quad \dim F = \dim(F + G)$$

Ceci implique que $F = F + G$. Or on remarque que le vecteur $u_1 = (1, 2, 3, 4)$ n'appartient pas à F , car il ne satisfait pas l'équation $x - y + z - t = 0$ (cette équation s'écrit d'ailleurs $x + z = y + t$).

Or $u_1 \in G$ donc $u_1 \in F + G$. Finalement $u_1 \notin F$ et $u_1 \in F + G$, donc on ne peut avoir $F = F + G$.

On en déduit que $\dim(F + G) = 4$. Alors :

$$(F + G) \subseteq E \quad \text{et} \quad \dim(F + G) = \dim(E)$$

Ceci implique que $F + G = E$.

On connaît la formule de Grassmann :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Comme $G = \text{Vect}(u_1, u_2)$, avec u_1 et u_2 non colinéaires, alors la famille (u_1, u_2) est libre et génératrice de G , donc c'est une base de G , et ainsi G est de dimension 2.

La formule de Grassmann donne :

$$\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F + G) = 3 + 2 - 4 = 1$$

c. On commence par chercher une base de $F \cap G$.

On rappelle que $G = \text{Vect}(u_1, u_2)$ avec $u_1 = (1, 2, 3, 4)$ et $u_2 = (4, 3, 2, 1)$. Ainsi $u_1 + u_2 = (5, 5, 5, 5)$ appartient à G , donc $w_1 = (1, 1, 1, 1)$ appartient à G .

Or le vecteur w_1 appartient aussi à F car il satisfait l'équation $x - y + z - t = 0$.

Ainsi $w_1 \in F \cap G$. Il est non-nul donc il forme une famille libre de $F \cap G$. Comme $F \cap G$ est de dimension 1 alors la famille (w_1) est libre maximale, donc c'est une base de $F \cap G$.

On en déduit que $F \cap G = \text{Vect}(w_1)$ avec $w_1 = (1, 1, 1, 1)$.

On rappelle que l'on a noté $v_1 = (1, 0, 0, 1)$ et $v_2 = (0, 1, 0, -1)$.

Les vecteurs w_1, v_1, v_2 appartiennent à F . Démontrons qu'ils forment une famille libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 v_1 + \lambda_3 v_2 = 0_E$. Alors :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \\ \lambda_1 & + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 & = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

Ce système implique : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

On a donc démontré que la famille (w_1, v_1, v_2) est libre.

Or c'est une famille de trois vecteurs de F , qui est de dimension 3. Elle est donc libre maximale dans F et ainsi c'est une base de F .

On sait que $F \cap G = \text{Vect}(w_1)$, et on pose $H = \text{Vect}(v_1, v_2)$. Alors par théorème de la base adaptée $F \cap G$ et H sont supplémentaires dans F .

La famille (v_1, v_2) est donc une base d'un supplémentaire de $F \cap G$ dans F .

6 Soit H et H' deux hyperplans distincts d'un espace vectoriel E de dimension n . Déterminer $H + H'$ et en déduire la dimension de $H \cap H'$.

Par propriété, comme H et H' sont des hyperplans de E alors ils sont de dimension $n - 1$.

Comme H et H' sont distincts alors il existe un vecteur u_0 appartenant à H' mais pas à H . En effet, dans le cas contraire on aurait $H' \subseteq H$, mais comme H et H' sont de même dimension alors ceci impliquerait l'absurdité $H = H'$.

Soit $D = \text{Vect}(u_0)$. Par théorème, comme $u_0 \notin H$ alors H et D sont supplémentaires, et ainsi $H + D = E$.

Comme $u_0 \in H'$ alors $D \subseteq H'$ puis $H + D \subseteq H + H'$.

On a donc $E \subseteq H + H' \subseteq E$, et ainsi $H + H' = E$.

D'après la formule de Grassmann :

$$\dim H \cap H' = \dim H + \dim H' - \dim(H + H') = (n - 1) + (n - 1) - n = n - 2$$

L'espace vectoriel $H \cap H'$ est donc de dimension 2.

7 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ puis :

$$F = \{P \in E \mid P(1) = P(2) = 0\}$$

- Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E et en donner une base.
- Démontrer que $\mathbb{R}_1[X]$ est un supplémentaire de F dans E .

a. Par propriété des polynômes, P admet 1 et 2 pour racines si et seulement si il est multiple de $(X - 1)$ et de $(X - 2)$.

Ainsi F est l'ensemble des polynômes de E s'écrivant $P = (X - 1)(X - 2)Q$ où Q est un polynôme. Comme les polynômes de E sont de dimension au plus n alors Q est de dimension au plus $n - 2$, *i.e.*, $Q = \sum_{k=0}^{n-2} a_k X^k$ avec a_0, \dots, a_{n-2} réels. Ainsi :

$$F = \{(X - 1)(X - 2)(a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-2} X^{n-2}) \mid (a_0, \dots, a_{n-2}) \in \mathbb{R}^{n-1}\}$$

Ceci donne :

$$\begin{aligned} F &= \{a_0 X(X - 1)(X - 2) + \dots + a_{n-2} X^{n-2}(X - 1)(X - 2) \mid (a_0, \dots, a_{n-2}) \in \mathbb{R}^{n-1}\} \\ &= \text{Vect}(X^k(X - 1)(X - 2) \mid k = 0, \dots, n - 2) \end{aligned}$$

Les polynômes $P_k = X^k(X - 1)(X - 2)$ pour $k = 0 \dots, n - 2$ sont éléments de E , donc par propriété F est un sous-espace vectoriel de E .

De plus la famille (P_0, \dots, P_{n-2}) est génératrice de F , elle est libre car ses éléments sont de degrés échelonnés, donc c'est une base de F .

Cette famille contient $n - 1$ éléments donc finalement F est de dimension $n - 1$

b. Si P est un élément de $F \cap \mathbb{R}_1[X]$ alors P est de degré au plus 1 et admet au moins deux racines. Par propriété des polynômes ceci n'est possible que si P est le polynôme nul : un polynôme de degré n a au plus n racines.

Le polynôme nul est bien élément de $F \cap \mathbb{R}_1[X]$ car F et $\mathbb{R}_1[X]$ sont des sous-espaces vectoriels de E , donc $F \cap \mathbb{R}_1[X] = \{0_E\}$.

De plus $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n + 1$ et $\mathbb{R}_1[X]$ est de dimension 2 donc :

$$\dim E = \dim F + \dim \mathbb{R}_1[X]$$

Par théorème, F et $\mathbb{R}_1[X]$ sont supplémentaires dans E :

$$E = F \oplus \mathbb{R}_1[X]$$

On peut ajouter que la division euclidienne par $(X - 1)(X - 2)$ donne la décomposition d'un polynôme P selon cette somme directe :

Pour tout $P \in E$ il existe un couple (Q, R) tel que

$$P = (X - 1)(X - 2)Q + R \quad \text{avec} \quad \deg R < \deg(X - 1)(X - 2) = 2.$$

En effet $(X - 1)(X - 2)Q$ appartient à F et R appartient à $\mathbb{R}_1[X]$.

8 Soit n un entier naturel. On note $\mathcal{M} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, puis \mathcal{T} et \mathcal{T}' les sous-espaces vectoriels de \mathcal{M} contenant les matrices respectivement triangulaires supérieures et triangulaires inférieures.

- a. Déterminer les sous-espaces $\mathcal{T} + \mathcal{T}'$ et $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}'$, donner leurs dimensions.
- b. Démontrer que l'application $M \mapsto {}^tM$ est un automorphisme de \mathcal{M} .

Quelle est l'image de \mathcal{T} par cet automorphisme ?

- c. Dédurre des deux questions précédentes la dimension de \mathcal{T} et de \mathcal{T}' .
- d. Retrouver ce résultat directement en exhibant des bases de \mathcal{T} et \mathcal{T}' .

- a. Toute matrice s'écrit comme somme d'une matrice triangulaire supérieure et d'une matrice triangulaire inférieure. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{T} + \mathcal{T}'$$

On en déduit que $\mathcal{T} + \mathcal{T}' = \mathcal{M}$.

On rappelle que pour i et j entiers entre 1 et n on note E_{ij} la matrice ne contenant que des zéros sauf le coefficient de la ligne i et de la colonne j qui vaut 1.

Alors la famille $\{E_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ est la base canonique de \mathcal{M} .

Elle contient n^2 éléments, ce qui montre que \mathcal{M} est de dimension n^2 .

Les matrices triangulaires supérieures et inférieures sont les matrices diagonales, on note $\mathcal{D} = \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, et donc :

$$\mathcal{T} \cap \mathcal{T}' = \mathcal{D}$$

Les matrices diagonales s'écrivent :

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_{ii} E_{ii}$$

La famille $\{E_{ii} \mid 1 \leq i \leq n\}$ est génératrice de \mathcal{D} .

Elle est libre car elle est extraite de la base canonique qui est libre, donc c'est une base de \mathcal{D} .

Elle contient n éléments, donc \mathcal{D} est de dimension n .

- b. Soit $\Phi : M \rightarrow {}^tM$ l'application de transposition. Pour toute matrice carrée M on a ${}^t({}^tM) = M$, donc $\Phi \circ \Phi = \text{Id}_{\mathcal{M}}$. Ceci montre que Φ est un automorphisme, égal à sa propre réciproque.

Si A est une matrice triangulaire supérieure alors tA est triangulaire inférieure, donc $\Phi(\mathcal{T}) = \mathcal{T}'$.

c. La formule de Grassmann donne :

$$\dim(\mathcal{T} + \mathcal{T}') = \dim \mathcal{T} + \dim \mathcal{T}' - \dim(\mathcal{T} \cap \mathcal{T}')$$

En conséquence :

$$n^2 = \dim \mathcal{T} + \dim \mathcal{T}' - n$$

Comme Φ est un isomorphisme alors il conserve la dimension, donc $\dim \varphi(\mathcal{T}) = \dim \mathcal{T}$, et comme $\Phi(\mathcal{T}) = \mathcal{T}'$ alors $\dim \mathcal{T} = \dim \mathcal{T}'$.

On a donc $n^2 + n = \dim \mathcal{T}$, on en déduit :

$$\dim \mathcal{T} = \dim \mathcal{T}' = \frac{n(n+1)}{2}$$

d. Les matrices triangulaires supérieures s'écrivent :

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{ij} E_{ij}$$

La famille $\{E_{ij} \mid 1 \leq i \leq j \leq n\}$ est génératrice de \mathcal{T} .

Elle est libre car elle est extraite de la base canonique qui est libre, donc c'est une base de \mathcal{T} .

Elle contient $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ éléments, donc \mathcal{T} est de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

De même la famille $\{E_{ij} \mid 1 \leq j \leq i \leq n\}$ est une base de \mathcal{T}' , donc \mathcal{T}' est aussi de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

9 Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on définit sur \mathbb{R} :

$$f_k : t \mapsto \cos^k t \quad \text{et} \quad g_k : t \mapsto \cos(kt)$$

- a. Démontrer que la famille $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre.
- b. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n \in \text{Vect}(g_0, \dots, g_n)$$

- c. Dédurre des questions précédentes que la famille $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre.

On note E l'espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

a. Soit n un entier naturel et $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ des scalaires tels que :

$$\lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_n f_n = 0_E$$

Ceci signifie :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \lambda_0 \cos^0(t) + \dots + \lambda_n \cos^n t = 0_{\mathbb{R}}$$

Notons $P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \dots + \lambda_n X^n$. L'égalité ci-dessus devient :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad P(\cos t) = 0$$

Or tout réel x de l'intervalle $[-1, 1]$ admet un antécédent par la fonction cosinus, donc $P(x) = 0$ pour tout $x \in [-1, 1]$. Ainsi le polynôme P admet une infinité de racines, donc il est nul.

Comme P est nul alors $\lambda_0 = \dots = \lambda_n = 0$, et ceci montre que la famille (f_0, \dots, f_n) est libre.

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f_k | k \in \mathbb{N})$ est libre.

b. Pour tout entier naturel n on note \mathcal{P}_n la propriété : $f_n \in \text{Vect}(g_0, \dots, g_n)$.

On démontre par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Comme $f_0 = g_0 = 1$ alors $f_0 \in \text{Vect}(g_0)$.

Hérédité. Admettons que la propriété \mathcal{P}_n est vraie pour un entier $n \geq 0$. Alors f_n est combinaison linéaire de g_0, \dots, g_n , donc il existe des scalaires $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos^n x = \lambda_0 \cos(0x) + \dots + \lambda_n \cos(nx) = \sum_{k=0}^n \lambda_k \cos(kx)$$

La formule

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$$

donne :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad \cos^{n+1} x &= \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_k}{2} (\cos(k+1)x + \cos(k-1)x) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\lambda_{k-1}}{2} \cos(kx) + \sum_{k=-1}^{n-1} \frac{\lambda_{k+1}}{2} \cos(kx) \end{aligned}$$

Comme $\cos(-x) = \cos x$ on peut finalement écrire :

$$f_{n+1} = \frac{\lambda_0}{2} g_1 + \frac{\lambda_1}{2} g_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\lambda_{k-1} + \lambda_{k+1}}{2} \right) g_k + \frac{\lambda_{n-1}}{2} g_n + \frac{\lambda_n}{2} g_{n+1}$$

Ainsi f_{n+1} est combinaison linéaire de g_0, \dots, g_{n+1} , donc la propriété \mathcal{P}_n est vraie.

L'hérédité est prouvée.

Conclusion. Par récurrence la propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc f_n appartient au sous-espace vectoriel $\text{Vect}(g_0, \dots, g_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$F_n = \text{Vect}(f_0, \dots, f_n) \quad \text{et} \quad G_n = \text{Vect}(g_0, \dots, g_n)$$

D'après la question précédente les fonctions f_0, \dots, f_n appartiennent à G_n donc comme celui-ci est un sous-espace vectoriel alors F_n est inclus dans G_n .

D'après la question (a) la famille (f_0, \dots, f_n) est libre, donc elle est une base de F_n , et ainsi F_n est de dimension $n+1$.

Or G_n est engendré par la famille (g_0, \dots, g_n) qui est de cardinal $n + 1$, donc il est de dimension au plus $n + 1$. Comme $F_n \subseteq G_n$ alors G_n est de dimension supérieure ou égal à F_n , donc au moins $n + 1$.

Finalement G_n est de dimension $n + 1$. La famille (g_0, \dots, g_n) est donc génératrice minimale de G_n , donc elle est une base de G_n . Elle est *a fortiori* libre.

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(g_k | k \in \mathbb{N})$ est libre.

10 On définit les applications :

$$f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x_1, \dots, x_5) \longmapsto (x_1 + 2x_2, x_1 - 2x_2 - 2x_3, x_2 + x_3 - x_4, 2x_2 - 2x_4 + x_5)$$

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) \longmapsto (4y - z, 3x + 2y + z, -3x + 2y - 2z, x - 6y + z)$$

En utilisant le théorème du rang :

- Démontrer que f est surjective.
- Démontrer que l'image de g est un hyperplan.

a. On calcule : $\ker f = \text{Vect}((2, -1, 2, 1, 4))$

On en déduit que le noyau de f est de dimension 1, puis le théorème du rang montre que l'image de f est de dimension 4. Or elle est incluse dans \mathbb{R}^4 qui est de dimension 4, et ainsi : $\text{im } f = \mathbb{R}^4$

Ceci prouve que f est surjective.

b. On obtient $\ker g = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, ce qui donne : $\dim \ker g = 0$

D'après le théorème du rang : $\dim \text{im } g = 3$.

Comme $\text{im } g$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 de dimension 3 alors $\text{im } g$ est un hyperplan.

On peut donner une base de $\text{im } g$:

$$\begin{aligned} \text{im } g &= \{g(u) \mid u \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{(4y - z, 3x + 2y + z, -3x + 2y - 2z, x - 6y + z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \text{Vect}((0, 3, -3, 1), (4, 2, 2, -6), (-1, 1, -2, 1)) \end{aligned}$$

La famille $((0, 3, -3, 1), (4, 2, 2, -6), (-1, 1, -2, 1))$ est génératrice de $\text{im } g$. Comme $\text{im } g$ est de dimension 3 alors elle est génératrice minimale, donc elle est une base de $\text{im } g$.

Grâce au théorème du rang on n'a pas eu besoin de démontrer que la famille est libre.

On peut également démontrer que :

$$\text{im } g = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - z = 0\}$$

11 Soit n un entier positif non-nul et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^n défini par :

$$f(x_1, \dots, x_n) = (x_2, x_3, \dots, x_n, x_1)$$

Déterminer le rang de f puis de $g = \text{Id} - f$.

Le noyau de f est réduit au vecteur nul :

$$\begin{aligned} \ker f &= \{u \in \mathbb{R}^n \mid f(u) = 0_{\mathbb{R}^n}\} \\ &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_2, x_3, \dots, x_n, x_1) = (0, \dots, 0)\} \\ &= \{(0, \dots, 0)\} \end{aligned}$$

On en déduit que f est injective.

Or f est un endomorphisme de \mathbb{R}^n qui est de dimension finie. Par corollaire du théorème du rang ceci implique que f est un isomorphisme.

En conséquence f est surjective, *i.e.*, $\text{im } f = \mathbb{R}^n$, et donc f est de rang n .

Pour déterminer le rang de g on explicite :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad g(x_1, \dots, x_n) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, \dots, x_{n-1} - x_n, x_n - x_1)$$

On peut alors calculer le noyau de g :

$$\begin{aligned} \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \\ x \in \ker g &\iff (x_1 - x_2, x_2 - x_3, \dots, x_{n-1} - x_n, x_n - x_1) = (0, \dots, 0) \\ &\iff x_1 = x_2 = \dots = x_n \\ &\iff x = (x_1, \dots, x_1) = x_1(1, \dots, 1) \end{aligned}$$

Le noyau de g est donc le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $(1, \dots, 1)$:

$$\ker g = \text{Vect}((1, \dots, 1))$$

Ce vecteur est non-nul donc il forme une famille libre à un élément, qui est aussi génératrice de $\ker g$. Cette famille est donc une base de $\ker g$, et ainsi $\ker g$ est de dimension 1.

D'après le théorème du rang :

$$\dim \ker g + \dim \text{im } g = \dim \mathbb{R}^n$$

Ainsi $\dim \text{im } g = n - 1$, *i.e.*, g est de rang $n - 1$.

12 Pour tout $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ on note :

$$\varphi(y) = y'' - 4y' + 20y$$

- Justifier que φ est une application linéaire de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.
- Déterminer le noyau de φ .
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n , et $\psi : E \longrightarrow E$

$$y \longmapsto \varphi(y).$$

Démontrer que ψ est bien définie puis que c'est un automorphisme.

Cet exercice fait suite à l'exercice 7 du chapitre B8, dont nous reproduisons le corrigé ci-dessous.

- Si y est de classe \mathcal{C}^2 alors elle est deux fois dérivable de dérivée seconde continue. Ainsi y' et y'' sont définies et continues. Par combinaison linéaire $y'' - 4y' + 20y$ est définie et continue.

Ceci montre que φ est bien définie sur $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

L'application de dérivation $D : y \mapsto y'$ est linéaire. Par composition l'application $D \circ D : y \mapsto y''$ est linéaire.

Or $\varphi = D \circ D - 4D + 20\text{Id}$ donc φ est combinaison linéaire d'applications linéaires, et par propriété φ est linéaire.

- Le noyau de φ est l'ensemble des fonctions y de classe \mathcal{C}^2 telles que :

$$y'' - 4y' + 20y = 0$$

Il s'agit donc des solutions de cette équation différentielle.

L'équation caractéristique associée est :

$$\lambda^2 - 4\lambda + 20 = 0$$

Ses solutions sont $2 + 4i$ et $2 - 4i$. Par théorème les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions y définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) = e^{2t}(\alpha \cos(4t) + \beta \sin(4t))$$

où α et β sont deux réels. Ceci s'écrit

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) = \alpha e^{2t} \cos(4t) + \beta e^{2t} \sin(4t) \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

De façon équivalente, $y = \alpha y_1 + \beta y_2$ où y_1 et y_2 sont les fonctions définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y_1(t) = e^{2t} \cos(4t) \quad \text{et} \quad y_2(t) = e^{2t} \sin(4t)$$

Ainsi les solutions de l'équation différentielle sont les combinaisons linéaires de y_1 et y_2 et donc :

$$\ker \varphi = \text{Vect}(y_1, y_2)$$

- c. On peut noter $E = \mathbb{R}_n[x]$, le x minuscule signifiant qu'il s'agit de fonctions polynomiales et non de polynômes.

Si y est une fonction polynomiale alors elle est de classe \mathcal{C}^2 , donc $\varphi(y)$ est définie.

De plus, si y est une fonction polynomiale, alors ses dérivées y' et y'' sont des fonctions polynomiales, donc $\varphi(y) = y'' - 4y' + 20y$ est une fonction polynomiale.

Enfin, si y est de degré inférieur ou égal à n alors y' et y'' sont de degrés inférieurs à n , donc $\varphi(y)$ est de degré inférieur ou égal à n .

Ceci montre que : $\forall y \in E \quad \varphi(y) \in E$

On dit que E est *stable* par φ .

En conséquence l'application ψ est bien définie. Elle est bien définie sur E , et à valeurs dans E .

Comme φ est linéaire alors ψ est linéaire. Donc ψ est un endomorphisme de E .

Comme E est de dimension finie, par corollaire du théorème du rang il suffit de démontrer que ψ est injective ou surjective pour en déduire qu'elle est bijective.

Il est difficile de démontrer directement que ψ est surjective. Par contre on peut démontrer qu'elle est injective, il suffit de calculer son noyau.

Soit y appartenant au noyau de ψ . Alors y est une fonction polynomiale de degré au plus n et $\varphi(y) = 0$, i.e., $y'' - 4y' + 20y = 0$.

Deux méthodes pour démontrer qu'alors $y = 0$:

Méthode 1.

Supposons que y est non-nulle. Alors les degrés de y'' et de y' sont strictement inférieurs à celui de y . Donc $\deg(y'' - 4y' + 20y) = \deg y$. Ceci donne $\deg y = \deg 0 = -\infty$, c'est une contradiction. On en déduit que $y = 0$.

Méthode 2.

Comme $\varphi(y) = 0$ alors y appartient au noyau de φ , donc il existe deux scalaires α et β tels que $y = \alpha y_1 + \beta y_2$:

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) = e^{2t}(\alpha \cos(4t) + \beta \sin(4t))$$

On prouve que ceci est impossible pour une fonction polynomiale, à moins que ce soit la fonction nulle.

Par exemple la limite de y en $-\infty$ est nulle. En effet, par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} \quad |y(t)| &= e^{2t} |\alpha \cos(4t) + \beta \sin(4t)| \\ &\leq e^{2t} (|\alpha \cos(4t)| + |\beta \sin(4t)|) \\ &\leq e^{2t} (|\alpha| + |\beta|) \end{aligned}$$

Par théorème d'encadrement on en déduit : $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0$

Un polynôme non-nul ne peut tendre vers 0 en $-\infty$, donc y est le polynôme nul.

On a donc démontré que $\ker \psi = \{0_E\}$. Ainsi ψ est injective.

Or E est un espace vectoriel de dimension finie : $\dim \mathbb{R}_n[x] = n + 1$

Comme ψ est un endomorphisme injectif de E alors ψ est un automorphisme de E , par corollaire du théorème du rang.

13 Soit n un entier naturel strictement positif.

a. Soit a, b_0, \dots, b_n des scalaires.

Démontrer qu'il existe un et un seul polynôme P de degré au plus n tel que :

$$\forall k = 0, \dots, n \quad P^{(k)}(a) = b_k$$

b. Soit $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des scalaires distincts, β_0, \dots, β_n des scalaires quelconques.

Démontrer qu'il existe un et un seul polynôme P de degré au plus n tel que :

$$\forall k = 0, \dots, n \quad P(\alpha_k) = \beta_k$$

a. On définit :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ P &\longmapsto (P(a), P'(a), \dots, P^{(n)}(a)) \end{aligned}$$

La dérivation et la spécialisation des polynômes sont linéaires donc par composition les composantes de f sont linéaires, et donc f est linéaire.

Le noyau de f est l'ensemble des polynômes P dont a est racine de multiplicité au moins $n + 1$. Or ces polynômes sont de degrés au plus n , donc ils sont nuls.

Ceci montre que $\ker f = \{0_{\mathbb{K}_n[X]}\}$, donc f est injective.

Comme $\mathbb{K}_n[X]$ et \mathbb{K}^{n+1} sont de même dimension $n + 1$ alors f est bijective.

Ceci montre que tout élément (b_0, \dots, b_n) de \mathbb{K}^{n+1} admet un et un seul antécédent par f , ce qui est le résultat attendu.

b. On définit :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ P &\longmapsto (P(\alpha_0), P(\alpha_1), \dots, P(\alpha_n)) \end{aligned}$$

La spécialisation des polynômes est linéaire donc les composantes de f sont linéaires, et f est linéaire.

Le noyau de f est l'ensemble des polynômes P dont $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ sont racines. Comme elles sont distinctes alors ils admettent au moins $n + 1$ racines. Or ils sont de degrés au plus n , donc ils sont nuls.

Ceci montre que $\ker f = \{0_{\mathbb{K}_n[X]}\}$, donc f est injective.

Comme $\mathbb{K}_n[X]$ et \mathbb{K}^{n+1} sont de même dimension $n + 1$ alors f est bijective.

Ceci montre que tout élément $(\beta_0, \dots, \beta_n)$ de \mathbb{K}^{n+1} admet un et un seul antécédent par f , ce qui est le résultat attendu.

14 Soit n un entier naturel. On considère \mathcal{S} et \mathcal{A} les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contenant les matrices respectivement symétriques et antisymétriques. On définit l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ M &\longmapsto \frac{1}{2}(M + {}^tM) \end{aligned}$$

- a. Démontrer que \mathcal{S} et \mathcal{A} sont l'image et le noyau de f .
b. Démontrer que f est un projecteur.

Que peut-on en déduire au sujet de \mathcal{S} et \mathcal{A} ?

Quelle est la symétrie associée ?

- c. Déterminer les dimensions de \mathcal{S} et de \mathcal{A} . Vérifier que leur somme donne le résultat attendu.

- a. L'application de transposition $M \mapsto {}^tM$ est linéaire, donc elle est un endomorphisme de \mathcal{M} .

Comme f est combinaison linéaire de l'identité de \mathcal{M} et de cet endomorphisme alors f est un endomorphisme de \mathcal{M} .

Par définition son noyau est l'ensemble :

$$\ker f = \{M \in \mathcal{M} \mid f(M) = 0\} = \{M \in \mathcal{M} \mid {}^tM = -M\} = \mathcal{A}$$

En effet, les matrices antisymétriques sont les matrices telles que ${}^tM = -M$.

Démontrons que $\operatorname{im} f = \mathcal{S}$.

Soit $N \in \operatorname{im} f$. Alors il existe $M \in \mathcal{M}$ telle que $f(M) = N$, donc $N = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$.

Par linéarité de la transposition : ${}^tN = \frac{1}{2}({}^tM + M) = N$.

Ceci montre que N est symétrique, donc $N \in \mathcal{S}$.

Ainsi $\operatorname{im} f \subseteq \mathcal{S}$.

Réciproquement, soit $N \in \mathcal{S}$. Alors ${}^tN = N$, donc $f(N) = \frac{1}{2}(N + N) = N$. Ainsi $N \in \operatorname{im} f$.

On a démontré que $\mathcal{S} \subseteq \operatorname{im} f$.

Par double inclusion : $\operatorname{im} f = \mathcal{S}$.

- b. On vient de voir que toute matrice N de l'image de f vérifie $f(N) = N$. Ainsi, pour tout $M \in \mathcal{M}$, comme $f(M) \in \operatorname{im} f$ alors $f(f(M)) = f(M)$.

On peut aussi le vérifier directement :

$$\begin{aligned} \forall M \in \mathcal{M} \quad f \circ f(M) &= f\left(\frac{1}{2}(M + {}^tM)\right) = \frac{1}{2}(f(M) + {}^t f(M)) \\ &= \frac{1}{4}(M + {}^tM + {}^tM + {}^t({}^tM)) = \frac{1}{2}(M + {}^tM) = f(M) \end{aligned}$$

Ainsi $f \circ f = \operatorname{Id}_{\mathcal{M}}$, donc f est un projecteur.

On en déduit que \mathcal{A} et \mathcal{S} , son noyau et son image, sont supplémentaires dans \mathcal{M} :

$$\mathcal{M} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$$

La symétrie associée est la symétrie par rapport à \mathcal{S} parallèlement à \mathcal{A} , elle vérifie la formule $s = 2f - \operatorname{id}$.

En conséquence, pour tout $M \in \mathcal{M}$: $s(M) = (M + {}^tM) - M = {}^tM$

La symétrie associée à f est la transposition.

Effectivement la transposition vérifie $s \circ s = \text{id}$, elle laisse stable \mathcal{S} et elle envoie les éléments de \mathcal{A} sur leur opposé.

- c. La famille contenant les matrices $E_{ij} + E_{ji}$ pour $i < j$ et les matrices E_{ii} pour tout i forme une base de \mathcal{S} .

On compte qu'elle obtient $\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$ éléments, donc \mathcal{S} est de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

La famille contenant les matrices $E_{ij} - E_{ji}$ pour $i < j$ forme une base de \mathcal{A} .

Elle obtient $\frac{n(n-1)}{2}$ éléments, donc \mathcal{A} est de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

Comme $\mathcal{S} \oplus \mathcal{A} = \mathcal{M}$ alors on doit obtenir $\dim \mathcal{S} + \dim \mathcal{A} = \dim \mathcal{M}$. Effectivement :

$$\dim \mathcal{S} + \dim \mathcal{A} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 = \dim \mathcal{M}$$

Remarque. Il est aussi possible de démontrer que la restriction de f à \mathcal{T} , l'ensemble des matrices triangulaires supérieures, est un isomorphisme de \mathcal{T} dans \mathcal{S} . Pour ceci il suffit de justifier que toute matrice symétrique S s'écrit $S = \frac{1}{2}(T + {}^tT)$ avec T triangulaire supérieure, et que si T est triangulaire supérieure et antisymétrique alors T est nulle.

On en déduit $\dim \mathcal{S} = \dim \mathcal{T} = \frac{n(n+1)}{2}$.

Comme $\mathcal{M} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$ alors $\dim \mathcal{A} = \dim \mathcal{M} - \dim \mathcal{S}$, on obtient $\dim \mathcal{A} = \frac{n(n-1)}{2}$.

15 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{rg } f = \text{rg}(f \circ f)$.

- Démontrer que $\text{im } f = \text{im } f \circ f$ et $\text{ker } f = \text{ker } f \circ f$.
- Démontrer que $E = \text{im } f \oplus \text{ker } f$.
- Réciproquement, démontrer que si $\text{im } f$ et $\text{ker } f$ sont supplémentaires dans E alors $\text{rg } f = \text{rg } f \circ f$.

- a. On démontre d'abord que $\text{im}(f \circ f) \subseteq \text{im } f$.

Soit v un vecteur de E . Si $v \in \text{im}(f \circ f)$ alors il existe $u \in E$ tel que $v = f(f(u))$, donc *a fortiori* $v \in \text{im } f$. En effet $f(u)$ est antécédent de v par f .

Ceci montre que : $\text{im}(f \circ f) \subseteq \text{im } f$

Par énoncé $\text{rg } f = \text{rg}(f \circ f)$, ce qui signifie : $\dim \text{im } f = \dim \text{im}(f \circ f)$

On a donc $\text{im}(f \circ f) \subseteq \text{im } f$ et $\dim \text{im } f = \dim \text{im}(f \circ f)$, d'où $\text{im}(f \circ f) = \text{im } f$.

On démontre maintenant que $\text{ker } f \subseteq \text{ker}(f \circ f)$.

Soit $u \in \text{ker } f$. Alors $f(u) = 0_E$. Comme f est linéaire alors $f(0_E) = 0_E$, donc $f(f(u)) = 0_E$, et ainsi $u \in \text{ker}(f \circ f)$.

On a démontré que : $\text{ker } f \subseteq \text{ker}(f \circ f)$

Comme E est de dimension finie alors on peut appliquer le théorème du rang à f et à $f \circ f$:

$$\dim E = \dim \text{ker } f + \dim \text{im } f = \dim \text{ker}(f \circ f) + \dim \text{im}(f \circ f)$$

Comme $\dim \operatorname{im} f = \dim \operatorname{im}(f \circ f)$ alors $\dim \ker f = \dim \ker(f \circ f)$.

On a donc $\ker f \subseteq \ker(f \circ f)$ et $\dim \ker f = \dim \ker(f \circ f)$, d'où $\ker f = \ker(f \circ f)$.

b. Par théorème, si

$$(i) \quad \ker f \cap \operatorname{im} f = \{0_E\} \quad \text{et} \quad (ii) \quad \dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim E$$

alors $E = \ker f \oplus \operatorname{im} f$.

Le point (ii) est conséquence du théorème du rang, il reste à démontrer le point (i).

Tout d'abord, comme f est une application linéaire de E dans E alors $\ker f$ et $\operatorname{im} f$ sont des sous-espaces vectoriels de E , et donc contiennent son vecteur nul, et ainsi $\{0_E\} \subseteq \ker f \cap \operatorname{im} f$.

Réciproquement, choisissons un vecteur v de $\ker f \cap \operatorname{im} f$.

Alors $v \in \operatorname{im} f$, donc il existe $u \in E$ tel que $v = f(u)$.

Et comme $v \in \ker f$ alors $f(v) = 0_E$.

Ceci donne $f(f(u)) = 0_E$, donc $u \in \ker(f \circ f)$. Mais nous savons que $\ker(f \circ f) = \ker f$, donc $u \in \ker f$. Ceci donne $f(u) = 0_E$ puis $v = 0_E$.

On vient de montrer que $\ker f \cap \operatorname{im} f \subseteq \{0_E\}$. Par double inclusion $\ker f \cap \operatorname{im} f = \{0_E\}$.

Les points (i) et (ii) étant assurés, $\ker f$ et $\operatorname{im} f$ sont supplémentaires dans E :

$$E = \ker f \oplus \operatorname{im} f$$

c. Supposons que $\ker f$ et $\operatorname{im} f$ sont supplémentaires dans E , et démontrons que $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f \circ f$, donc que $\operatorname{im} f$ et $\operatorname{im} f \circ f$ sont de même dimension.

Comme $\operatorname{im} f \circ f \subseteq \operatorname{im} f$ il suffit de démontrer que $\operatorname{im} f \subseteq \operatorname{im} f \circ f$.

Soit $v \in \operatorname{im} f$. Alors il existe $u \in E$ tel que $v = f(u)$.

Comme $E = \operatorname{im} f \oplus \ker f$ alors il existe $u_1 \in \operatorname{im} f$ et $u_2 \in \ker f$ tels que $u = u_1 + u_2$.

Comme $u_1 \in \operatorname{im} f$ alors il existe $v_1 \in E$ tel que $u_1 = f(v_1)$.

Comme $u_2 \in \ker f$ alors $f(u_2) = 0_E$.

On en déduit par linéarité de f :

$$v = f(u) = f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) = f(f(v_1)) + 0_E = f \circ f(v_1)$$

Ainsi v admet un antécédent par $f \circ f$, donc $v \in \operatorname{im} f \circ f$.

On a démontré que $\operatorname{im} f \subseteq \operatorname{im} f \circ f$. Par double inclusion $\operatorname{im} f = \operatorname{im} f \circ f$, puis par égalité de dimension $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f \circ f$.

16 Soit f et g deux endomorphismes de E , espace vectoriel de dimension finie n , tels que $f \circ f = 0$ et $f \circ g + g \circ f = \text{Id}_E$. Démontrer que n est pair.

- On démontre que $\text{im } f \subseteq \ker f$:
Soit $v \in \text{im } f$. Alors il existe $u \in E$ tel que $v = f(u)$.
En appliquant f ceci donne $f(v) = f(f(u))$. Comme $f \circ f = 0$ alors $f(v) = 0_E$, ce qui montre que $v \in \ker f$.
On en déduit que $\text{im } f \subseteq \ker f$.
- On démontre que $\ker f \subseteq \text{im } f$:
Soit $u \in \ker f$. Alors $f(u) = 0_E$.
Comme $f \circ g + g \circ f = \text{Id}_E$ alors $f(g(u)) + g(f(u)) = u$.
Or $f(u) = 0_E$ et $g(0_E) = 0_E$ car g est linéaire, donc $u = f(g(u))$. Ceci montre que $u \in \text{im } f$, puisque u est l'image de $g(u)$ par f .
On a démontré que $\ker f \subseteq \text{im } f$.
- Par double inclusion les deux points précédents donnent : $\ker f = \text{im } f$
On peut appliquer le théorème du rang car E est de dimension finie :

$$\dim \ker f + \dim \text{im } f = \dim E$$

Or $\ker f = \text{im } f$ donc :

$$2 \dim \ker f = n$$

La dimension de $\ker f$ est un entier, donc n est multiple de 2, *i.e.*, n est pair.

17 Soit E un espace vectoriel de dimension paire.

- Démontrer qu'il existe un endomorphisme f de E tel que $\ker f = \text{im } f$.
- Plus généralement, si E est de dimension quelconque, F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim F + \dim G = \dim E$, démontrer qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $F = \ker f$ et $G = \text{im } f$.

- Soit n la dimension de E , et $m = \frac{n}{2}$.

Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E .

Par théorème il existe une (unique) application linéaire f telle que :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad f(e_i) = \begin{cases} e_{i+m} & \text{si } 1 \leq i \leq m \\ 0_E & \text{si } m+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Démontrons que $\ker f = \text{im } f$.

Comme la famille e_1, \dots, e_n est génératrice de E :

$$\begin{aligned} \text{im } f &= f(E) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)) \\ &= \text{Vect}(e_{m+1}, \dots, e_n, 0, \dots, 0) = \text{Vect}(e_{m+1}, \dots, e_n). \end{aligned}$$

D'autre part la définition de f montre que :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \quad f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^m \lambda_i e_{i+m}$$

Soit u un vecteur de E , de coordonnées $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ dans la base (e_1, \dots, e_n) . Alors :

$$u \in \ker f \quad \iff \quad f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = 0 \quad \iff \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i e_{i+m} = 0$$

Comme la famille e_{m+1}, \dots, e_n est libre :

$$\begin{aligned} u \in \ker f &\iff \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0 \\ &\iff u \in \text{Vect}(e_{m+1}, \dots, e_n) \end{aligned}$$

On a donc démontré que :

$$\ker f = \text{Vect}(e_{m+1}, \dots, e_n) = \text{im } f.$$

b. Notons n, m, p les dimensions respectives de E, F, G . Alors $m + p = n$.

On choisit une base (e_1, \dots, e_m) de F , et une base (e'_1, \dots, e'_p) de G .

La famille (e_1, \dots, e_m) est libre. D'après le théorème de la base incomplète on peut la compléter en une base (e_1, \dots, e_n) de E .

On définit f comme étant l'unique endomorphisme de E tel que :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad f(e_i) = \begin{cases} 0_E & \text{si } 1 \leq i \leq m \\ e'_{i-m} & \text{si } m+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Si $m+1 \leq i \leq n$ alors $1 \leq i-m \leq n-m = p$, donc e'_{i-m} est défini.

De plus l'image de f est le sous-espace vectoriel de E engendré par e'_1, \dots, e'_p , c'est-à-dire G

Ceci montre que $\text{im } f = G$.

Pour tout vecteur $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ de E on a :

$$f(u) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(e_i) = \sum_{i=m+1}^n \lambda_i e'_{i-m} = \sum_{i=1}^p \lambda_{i+m} e'_i$$

Comme la famille (e'_1, \dots, e'_p) est libre alors :

$$f(u) = 0 \quad \iff \quad \lambda_{m+1} = \dots = \lambda_n = 0 \quad \iff \quad u \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_m) = F$$

Ceci montre que $\ker f = F$.

18 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f, g deux endomorphismes de E tels que $f + g$ est bijectif.

- a. Démontrer que $\operatorname{im} f + \operatorname{im} g = E$ et $\ker f \cap \ker g = \{0_E\}$.
 b. On suppose de plus que $f \circ g = 0$.

Démontrer que $\operatorname{im} g = \ker f$, et que $\ker g$ et $\operatorname{im} f$ en sont deux supplémentaires.

- a. Comme f et g sont deux endomorphismes de E alors leurs noyaux et images sont des sous-espaces vectoriels de E . Les inclusions $\operatorname{im} f + \operatorname{im} g \subseteq E$ et $\{0_E\} \subseteq \ker f \cap \ker g$ sont alors immédiates.

On suppose que $f + g$ est bijectif, donc $f + g$ est surjectif et injectif.

Comme $f + g$ est surjectif alors pour tout $v \in E$ il existe $u \in E$ tel que $v = f(u) + g(u)$, ce qui implique que $v \in \operatorname{im} f + \operatorname{im} g$.

On a démontré que $E \subseteq \operatorname{im} f + \operatorname{im} g$, donc par double inclusion $\operatorname{im} f + \operatorname{im} g = E$.

Soit $u \in \ker f \cap \ker g$. Alors $f(u) + g(u) = 0_E + 0_E = 0_E$, donc $(f + g)(u) = (f + g)(0_E)$. Or $f + g$ est injectif, donc $u = 0_E$.

On a démontré que $\ker f \cap \ker g \subseteq \{0_E\}$, et par double inclusion $\ker f \cap \ker g = \{0_E\}$.

- b. Comme $f \circ g = 0$ alors $\operatorname{im} g \subseteq \ker f$. En effet, si $u \in \operatorname{im} g$ alors il existe $v \in E$ tel que $u = g(v)$, donc $f(u) = f(g(v)) = 0$ et $u \in \ker f$.

On en déduit, d'après la question précédente :

$$E \subseteq \operatorname{im} f + \ker f \quad \text{et} \quad \operatorname{im} g \cap \ker g \subseteq \{0_E\}$$

Par doubles inclusions :

$$E = \operatorname{im} f + \ker f \quad \text{et} \quad \operatorname{im} g \cap \ker g = \{0_E\}$$

D'après le théorème du rang, E étant de dimension finie :

$$\dim \operatorname{im} f + \dim \ker f = \dim \operatorname{im} g + \dim \ker g = \dim E$$

La formule de Grassmann :

$$\dim(\operatorname{im} f + \ker f) = \dim \operatorname{im} f + \dim \ker f - \dim(\operatorname{im} f \cap \ker f)$$

montre que $\dim(\operatorname{im} f \cap \ker f) = 0$, donc $\operatorname{im} f \cap \ker f = \{0_E\}$. Finalement, comme :

$$\begin{cases} \dim \operatorname{im} f + \dim \ker f = \dim E \\ \operatorname{im} f \cap \ker f = \{0_E\} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dim \operatorname{im} g + \dim \ker g = \dim E \\ \operatorname{im} g \cap \ker g = \{0_E\} \end{cases}$$

Alors par théorème : $E = \operatorname{im} f \oplus \ker f = \operatorname{im} g \oplus \ker g$

Enfin la formule $\operatorname{im} f + \operatorname{im} g = E$ montre que

$$\dim \operatorname{im} f + \dim \operatorname{im} g \geq \dim E$$

On en déduit :

$$\dim \operatorname{im} g \geq \dim \ker f$$

Comme $\operatorname{im} g \subseteq \ker f$, alors $\dim \operatorname{im} g \leq \dim \ker f$, et donc $\dim \operatorname{im} g = \dim \ker f$ et enfin $\operatorname{im} g = \ker f$.

On a bien démontré que $\operatorname{im} g = \ker f$, et que $\ker g$ et $\operatorname{im} f$ en sont deux supplémentaires.

19 Soit n et p deux entiers tels que $1 \leq p \leq n$.

Soit B un polynôme de degré p fixé. On définit l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}_{n-p}[X] \times \mathbb{K}_{p-1}[X] &\longrightarrow \mathbb{K}_n[X] \\ (Q, R) &\longmapsto BQ + R \end{aligned}$$

- Démontrer que f est bien définie et linéaire.
- Exprimer le degré de $f(Q, R)$ en fonction de ceux de Q et de R . En déduire le noyau de f .
- Démontrer que f est un isomorphisme.
Quel théorème retrouve-t-on ?

- a. Soit Q et R deux polynômes. Alors le polynôme $BQ + R$ est défini.

Comme B est de degré p , si Q est de degré au plus $n - p$ alors BQ est de degré au plus n . Or R est de degré au plus $p - 1$ strictement inférieur à n , donc :

$$\deg(BQ + R) \leq \max(\deg BQ, \deg R) \leq n$$

Ceci montre que $f(Q, R)$ est bien un polynôme de degré inférieur au égal à n , et donc f est bien définie.

Soit (Q_1, R_1) et (Q_2, R_2) deux couples de $\mathbb{K}_{n-p}[X] \times \mathbb{K}_{p-1}[X]$ et λ un scalaire. Alors :

$$\begin{aligned} f(\lambda(Q_1, R_1) + (Q_2, R_2)) &= f(\lambda Q_1 + Q_2, \lambda R_1 + R_2) = B(\lambda Q_1 + Q_2) + (\lambda R_1 + R_2) \\ &= \lambda(BQ_1 + R_1) + (BQ_2 + R_2) = \lambda f(Q_1, R_1) + f(Q_2, R_2) \end{aligned}$$

D'après la caractérisation l'application f est linéaire.

- b. Soit $(Q, R) \in \mathbb{K}_{n-p}[X] \times \mathbb{K}_{p-1}[X]$. Alors :

$$\deg(f(Q, R)) = \deg(BQ + R) \leq \max(\deg BQ, \deg R)$$

De plus :

$$\deg(BQ) = \deg B + \deg Q = p + \deg Q$$

Si Q est non-nul alors son degré est positif, donc $\deg(BQ) \geq p > \deg R$, donc

$$\deg(f(Q, R)) = \deg(BQ) = p + \deg Q$$

Si Q est nul alors $f(Q, R) = R$ donc $\deg(f(Q, R)) = \deg R$.

Finalement :

$$\forall (Q, R) \in \mathbb{K}_{n-p}[X] \times \mathbb{K}_{p-1}[X] \quad \deg(f(Q, R)) = \begin{cases} p + \deg Q & \text{si } Q \neq 0 \\ \deg R & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit (Q, R) appartenant au noyau de f . Alors $f(Q, R) = 0$. Le polynôme nul est de degré $-\infty$, donc d'après ce qui précède $Q = 0$, puis $R = 0$.

On en déduit que $\ker f = \{0\}$, et f est injective.

c. Par propriété sur la dimension d'un produit :

$$\begin{aligned} \dim (\mathbb{K}_{n-p}[X] \times \mathbb{K}_{p-1}[X]) &= \dim \mathbb{K}_{n-p}[X] + \dim \mathbb{K}_{p-1}[X] \\ &= n - p + 1 + (p - 1) + 1 = n + 1 \\ &= \dim \mathbb{K}_n[X] \end{aligned}$$

Ainsi f est une application linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension. Par corollaire du théorème du rang, comme f est injective alors elle est bijective.

Donc f est un isomorphisme.

Ceci montre que pour tout polynôme A de degré n il existe un et un seul couple de polynômes (Q, R) tel que $A = BQ + R$ et $\deg R < \deg B$.

Le fait que Q est de degré au plus $n - p$ est automatique, il ne peut être de degré supérieur à $n - p$.

Ce résultat est valable pour tout n donc il fournit une nouvelle preuve du théorème de division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.

20 Soit $\Delta : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$
 $P \longmapsto P(X) - P(X - 1).$

- Démontrer que Δ est linéaire.
- Déterminer son noyau.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et Δ_n la restriction de Δ à $\mathbb{K}_n[X]$.
 Démontrer que $\text{im } \Delta_n = \mathbb{K}_{n-1}[X]$.
- En déduire que Δ est surjective.

a. L'application $P \mapsto P(X - 1)$ est linéaire :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad (\lambda P + Q)(X - 1) = \lambda P(X - 1) + Q(X - 1).$$

Comme l'application $P \mapsto P$ est aussi linéaire, alors par combinaison linéaire Δ est linéaire.

b. On démontre que $\ker \Delta = \mathbb{K}_0[X]$.

En effet, si P est un polynôme constant alors $P(X - 1) = P(X)$ donc $\Delta(P) = 0_{\mathbb{K}[X]}$.

Réciproquement, supposons que $P \in \ker \Delta$. Alors $P(X) = P(X - 1)$.

Si P admet une racine α dans \mathbb{C} alors $P(\alpha - 1) = 0$, donc $\alpha - 1$ est aussi racine de P .

Par récurrence on montre que pour tout $k \in \mathbb{N} : \alpha - k$ est racine de P .

Le seul polynôme admettant une infinité de racines est le polynôme nul, donc $P = 0$.

Si P n'admet pas de racine dans P alors P est constant non-nul, d'après le théorème de d'Alembert-Gauss.

Donc finalement P est un polynôme constant, qu'il soit nul ou pas.

Par double inclusion : $\ker \Delta = \mathbb{K}_0[X]$.

c. Démontrons déjà que $\text{im } \Delta_n \subseteq \mathbb{K}_{n-1}[X]$.

Soit $Q \in \text{im } \Delta_n$. Alors il existe $P \in \mathbb{K}_n[x]$ tel que $Q = \Delta(P) = P(X) - P(X - 1)$

Notons a_n le coefficient de degré n de P . Alors il existe un polynôme P_1 tel que :

$$P = a_n X^n + P_1 \quad \text{avec} \quad \deg P_1 \leq n - 1.$$

Alors $P(X - 1) = a_n(X - 1)^n + P_1(X - 1)$, ce qui en développant donne :

$$P(X - 1) = a_n X^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^k + P_1(X - 1).$$

On peut donc écrire :

$$P(X - 1) = a_n X^n + P_2 \quad \text{avec} \quad \deg P_2 \leq n - 1.$$

En effet :

$$\deg P_1(X - 1) = \deg P_1 \times \deg(X - 1) = \deg P_1 \leq n - 1$$

Donc $\deg P_2 \leq n - 1$. En conséquence :

$$Q = P(X) - P(X - 1) = P_1 - P_2.$$

Donc Q est de degré inférieur ou égal à $n - 1$, et ainsi $Q \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$.

On a démontré que $\text{im } \Delta_n \subseteq \mathbb{K}_{n-1}[X]$.

L'application Δ_n est linéaire car Δ est linéaire.

Son noyau est $\mathbb{K}_n[X] \cap \ker \Delta$, et comme $n \geq 0$ alors $\ker \Delta_n = \mathbb{K}_0[X]$, ce qui donne $\dim \ker \Delta_n = 1$.

D'après le théorème du rang, comme $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension finie et Δ_n est linéaire alors :

$$\dim \mathbb{K}_n[X] = \dim \ker \Delta_n + \dim \text{im } \Delta_n.$$

Ceci montre que : $\dim \text{im } \Delta_n = (n + 1) - 1 = n$.

Or $\text{im } \Delta_n \subseteq \mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $\dim \mathbb{K}_{n-1}[X] = n$, donc par théorème $\text{im } \Delta_n = \mathbb{K}_{n-1}[X]$.

d. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $n = \deg P$. Alors $P \in \text{im } \Delta_{n+1}$ d'après la question précédente donc il existe $A \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$ tel que $\Delta(A) = P$.

Tout élément de $\mathbb{K}[X]$ admet un antécédent dans $\mathbb{K}[X]$ donc Δ est surjective.

21 Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On note $\mathbb{K}[A]$ l'ensemble des polynômes en A : $\mathbb{K}[A] = \{P(A) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$.

- Justifier que $\mathbb{K}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- En considérant l'application $M \mapsto AM$, démontrer que A^{-1} est un polynôme en A .

- On considère l'application $\varphi : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$P \longmapsto P(A).$$

Plus précisément, si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ alors $P(A) = \sum_{k=0}^n a_k A^k$.

Ceci montre que $P(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, donc φ est bien définie.

Il s'agit de la spécialisation en A , donc elle est linéaire.

Par définition $\mathbb{K}[A] = \text{im } \varphi$, donc par propriété $\mathbb{K}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On pose maintenant $f : \mathbb{K}[A] \longrightarrow \mathbb{K}[A]$

$$M \longmapsto AM.$$

Si M est une matrice de $\mathbb{K}[A]$ alors il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $M = P(A)$. Alors $AP(A)$ est aussi un polynôme en A , car $AP(A) = Q(A)$ avec $Q = XP$.

Ceci montre que f prend bien ses valeurs dans $\mathbb{K}[A]$.

Elle est linéaire par propriétés de la multiplication matricielle :

$$\forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN.$$

Comme A est inversible alors pour tout $M \in \mathbb{K}[A]$:

$$AM = 0_n \quad \iff \quad A^{-1}AM = 0_n \quad \iff \quad M = 0_n.$$

Ainsi $\ker f = \{0_n\}$, et donc f est injective.

Finalement f est un endomorphisme injectif de $\mathbb{K}[A]$, lequel est de dimension finie car c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui est de dimension finie.

Donc par corollaire du théorème du rang f est bijective.

Si $P = 1$ alors $P(A) = I_n$, donc $I_n \in \mathbb{K}[A]$.

Par surjectivité de f il existe $M \in \mathbb{K}[A]$ tel que $f(M) = I_n$, c'est-à-dire $AM = I_n$. En multipliant par A^{-1} à gauche on en déduit $M = A^{-1}$.

Ainsi $A^{-1} \in \mathbb{K}[A]$, ce qui montre que A^{-1} est un polynôme en A : il existe $p \in \mathbb{N}$ et des scalaires a_0, \dots, a_p tels que

$$A^{-1} = a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_p A^p.$$

22 Soit E un espace vectoriel de dimension finie non-nulle.

À toute forme linéaire φ sur E et tout vecteur a de E on associe l'application $\varphi_a : u \mapsto \varphi(u)a$.

a. Justifier que φ_a est un endomorphisme de E .

b. On suppose que φ et a ne sont pas nuls.

Démontrer que $\text{rg}(\varphi_a) = 1$, et donner une condition nécessaire et suffisante pour que φ_a soit un projecteur.

c. Soit f un endomorphisme de E de rang 1.

Démontrer qu'il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ et $a \in E$ tels que $f = \varphi_a$.

a. Comme φ est une forme linéaire de E alors : $\forall u \in E \quad \varphi(u) \in \mathbb{K}$.

Comme $a \in E$ alors : $\forall u \in E \quad \varphi(u)a \in E$.

Ceci montre que φ_a est une application de E dans E .

Démontrons qu'elle est linéaire. Soit $(u, v) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$\varphi_a(\lambda u + v) = \varphi(\lambda u + v)a$$

Comme φ est linéaire :

$$\varphi_a(\lambda u + v) = (\lambda\varphi(u) + \varphi(v))a = \lambda\varphi(u)a + \varphi(v)a = \lambda\varphi_a(u) + \varphi_a(v).$$

Ceci montre que φ_a est linéaire, et donc c'est un endomorphisme de E .

b. Par définition : $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda a \in \text{Vect}(a)$

Pour tout vecteur u de E , comme $\varphi_a(u) = \varphi(u)a$ alors $\varphi_a(u) \in \text{Vect}(a)$

Ceci montre que $\text{im } \varphi_a \subseteq \text{Vect}(a)$.

Comme φ est non-nulle alors il existe $u_0 \in E$ tel que $\varphi(u_0) \neq 0$.

Posons $\lambda = \frac{1}{\varphi(u_0)}$ et $u = \lambda u_0$. Alors $\varphi_a(u) = \lambda\varphi(u_0)a = a$, donc $a \in \text{im } \varphi_a$.

Comme $\text{im } \varphi_a$ est un sous-espace vectoriel de E alors $\text{Vect}(a) \subseteq \text{im } \varphi_a$.

Par double inclusion $\text{im } \varphi_a = \text{Vect}(a)$.

Comme a est non-nul alors $\text{Vect}(a)$ est de dimension 1 et donc φ_a est de rang 1.

Pour tout $u \in E$ on calcule :

$$\varphi_a \circ \varphi_a(u) = \varphi_a(\varphi(u)a) = \varphi(u)\varphi_a(a) = \varphi(u)\varphi(a)a.$$

Ainsi $\varphi_a \circ \varphi_a = \varphi_a$ si et seulement si :

$$\forall u \in E \quad \varphi(u)a = \varphi(u)\varphi(a)a$$

Comme a est non-nul cette condition équivaut à :

$$\forall u \in E \quad \varphi(u) = \varphi(u)\varphi(a)$$

Comme φ est non-nulle alors il existe $u_0 \in E$ tel que $\varphi(u_0) \neq 0$ et donc cette condition équivaut à :

$$\varphi(a) = 1$$

Ainsi φ_a est un projecteur si et seulement si $\varphi(a) = 1$.

- c. Comme f est de rang 1 alors $\text{im } f$ est de dimension 1, donc il existe un vecteur a non-nul tel que $\text{im } f = \text{Vect}(a)$.

D'après le théorème du rang :

$$\dim \ker f + \dim \text{im } f = \dim E$$

On en déduit que $\ker f$ est de dimension $n - 1$ où $n = \dim E$.

Ainsi $\ker f$ est un hyperplan de E . Par théorème il existe un droite vectorielle D supplémentaire de $\ker f$ dans E : $E = \ker f \oplus D$.

On note (b) une base de D . Ainsi b est un vecteur non-nul.

De plus $f(b) \in \text{im } f = \text{Vect}(a)$, donc il existe un scalaire α tel que $f(b) = \alpha a$.

Comme $\ker f$ et D sont supplémentaires dans E alors il existe une et une seule application linéaire φ de E dans \mathbb{K} telle que :

$$\varphi(b) = \alpha \quad \text{et} \quad \forall u \in \ker f \quad \varphi(u) = 0$$

Démontrons que $f = \varphi_a$.

Soit $u \in \ker f$. Alors $f(u) = 0_E$ et $\varphi_a(u) = \varphi(u)a = 0_E$, donc $f(u) = \varphi_a(u)$.

Soit $v \in D$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $v = \lambda b$. Donc $f(v) = \lambda f(b) = \lambda \alpha a$, et $\varphi_a(v) = \lambda \varphi_a(b) = \lambda \varphi(b)a = \lambda \alpha a$, donc $f(v) = \varphi_a(v)$.

Les applications linéaires f et φ_a coïncident sur $\ker f$ et D qui sont supplémentaires dans E , donc elles coïncident sur E : $f = \varphi_a$.

23 Soit E, F, G trois espaces vectoriels de dimensions finies. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$ et $h \in \mathcal{L}(E, G)$.

- a. Démontrer que si $h = g \circ f$ alors $\text{im } h \subseteq \text{im } g$ et $\ker f \subseteq \ker h$.

On suppose que $\text{im } h \subseteq \text{im } g$. Le but de la suite est de démontrer qu'il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $h = g \circ \varphi$.

- b. Soit (w_1, \dots, w_m) une base de $\text{im } h$. Démontrer que chaque w_i possède un antécédent u_i par h et v_i par g .

- c. Soit $E_1 = \text{Vect}(u_1, \dots, u_m)$. Démontrer que E_1 est un supplémentaire de $\ker h$ dans E .

- d. Construire une application linéaire $\varphi : E \rightarrow F$ vérifiant $h = g \circ \varphi$.

On suppose maintenant que $\ker f \subseteq \ker h$.

- e. Construire une application linéaire $\psi : F \rightarrow G$ telle que $h = \psi \circ f$.

- a. On suppose que $h = g \circ f$.

Soit $w \in \text{im } h$. Alors il existe $u \in E$ tel que $w = h(u)$. Ceci donne $w = g \circ f(u)$, donc $w \in \text{im } g$.

Soit $u \in \ker f$. Alors $h(u) = g \circ f(u) = g(0_F) = 0_G$ car g est linéaire, donc $u \in \ker h$.

On a démontré que $\text{im } h \subseteq \text{im } g$ et $\ker f \subseteq \ker h$.

- b. Comme E est de dimension finie et $h \in \mathcal{L}(E, G)$ alors $\text{im } h$ est de dimension finie, car elle est engendrée par exemple par l'image d'une base de E .

Soit (w_1, \dots, w_m) une base de $\text{im } h$. Tout élément w_i de cette base appartient à $\text{im } h$ donc admet un antécédent par h . Ainsi pour tout $i = 1, \dots, m$ il existe $u_i \in E$ tel que $w_i = h(u_i)$.

Comme $\text{im } h \subseteq \text{im } g$ alors chaque w_i appartient à $\text{im } g$, donc admet un antécédent par g . Ainsi pour tout $i = 1, \dots, m$ il existe $v_i \in F$ tel que $w_i = g(v_i)$.

- c. Comme $h \in \mathcal{L}(E, G)$ alors $\ker h$ est un sous-espace vectoriel de E . Comme les u_i appartiennent à E alors $E_1 = \text{Vect}(u_1, \dots, u_m)$ est un sous-espace vectoriel de E .

Ceci justifie déjà que $\{0_E\} \subseteq E_1 \cap \ker h$.

Réciproquement, soit u un élément de $E_1 \cap \ker h$. Alors $u \in E_1$ donc il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tels que $u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m$.

De plus $u \in \ker h$ donc $h(u) = 0_G$, puis par linéarité $\lambda_1 h(u_1) + \dots + \lambda_m h(u_m) = 0_G$, et enfin $\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_m w_m = 0_G$ car les u_i vérifient $h(u_i) = w_i$ par définition.

On en déduit $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$ car la famille (w_1, \dots, w_m) est libre, car c'est une base de $\text{im } h$. Ceci implique que $u = 0_E$, donc $E_1 \cap \ker h \subseteq \{0_E\}$ puis par double inclusion $E_1 \cap \ker h = \{0_E\}$.

Démontrons maintenant que la famille (u_1, \dots, u_m) est libre. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ des scalaires tels que $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m = 0_E$.

Alors comme ci-dessus $\lambda_1 h(u_1) + \dots + \lambda_m h(u_m) = 0_G$, puis $\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_m w_m = 0_G$, et enfin $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$ car la famille (w_1, \dots, w_m) est libre.

Ainsi la famille (u_1, \dots, u_m) est libre. Or elle est génératrice de E_1 , donc c'est une base de E_1 . En conséquence E_1 est de dimension m .

Or la famille (w_1, \dots, w_m) est une base de $\text{im } h$, donc $\text{im } h$ est de dimension m . D'après le théorème du rang :

$$\dim \ker h + \dim \text{im } h = \dim E$$

On en déduit $\dim E = \dim \ker h + \dim E_1$, et comme on sait que $\ker h \cap E_1 = \{0_E\}$ alors par théorème ceci implique que $E = \ker h \oplus E_1$.

- d. Comme $E = \ker h \oplus E_1$ alors une application linéaire de E dans F est uniquement déterminée par ses restrictions à $\ker h$ et à E_1 .

Comme la famille (u_1, \dots, u_m) est une base de E_1 alors une application linéaire de E_1 dans F est uniquement déterminée par l'image des u_i .

On définit $\varphi_1 : E_1 \rightarrow F$ comme étant l'unique application linéaire de E_1 dans F telle que pour tout $i = 1, \dots, m$: $\varphi_1(u_i) = v_i$.

Ensuite on note φ_2 l'application nulle de $\ker h$ dans F .

Soit φ l'unique application linéaire de E dans F telle que la restriction de φ à E_1 est φ_1 et la restriction de φ à $\ker h$ est φ_2 .

Cette application étant définie, démontrons qu'elle vérifie bien $h = g \circ \varphi$.

Pour tout $i = 1, \dots, m$, comme $\varphi_1(u_i) = v_i$ alors $\varphi(u_i) = v_i$, puis $g \circ \varphi(u_i) = g(v_i) = w_i = h(u_i)$.

La famille (u_1, \dots, u_m) est une base de E_1 et pour tout $i = 1, \dots, m$: $g \circ \varphi(u_i) = h(u_i)$. Donc $g \circ \varphi(u) = h(u)$ pour tout $u \in E_1$.

Soit $u \in \ker h$. Alors $h(u) = 0_G$. De plus $\varphi(u) = \varphi_2(u) = 0_F$ donc $g \circ \varphi(u) = 0_G = h(u)$. On a bien $g \circ \varphi(u) = h(u)$ pour tout $u \in \ker h$.

Les applications $g \circ \varphi$ et h sont égales sur E_1 et $\ker h$, lesquels sont supplémentaires dans E . Une application linéaire est uniquement déterminée par ses restrictions à ses sous-espaces supplémentaires, donc $g \circ \varphi$ et h sont égales sur E tout entier.

On a construit une application linéaire $\varphi : E \rightarrow F$ telle que $h = g \circ \varphi$.

- e. On suppose que $\ker f \subseteq \ker h$ et on construit une application linéaire $\psi : F \rightarrow G$ telle que $\psi \circ f = h$.

On peut procéder de façon un peu plus rapide que précédemment en utilisant le lemme préliminaire au théorème du rang.

Comme E est de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $\ker f$ admet un supplémentaire E' dans E . D'après le lemme en question l'application

$$\begin{aligned} f' : E' &\longrightarrow \operatorname{im} f \\ u &\longmapsto f(u) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Sa réciproque f'^{-1} est donc bien définie, c'est une application de $\operatorname{im} f$ dans E' , donc de $\operatorname{im} f$ dans E . On note ψ_1 sa composition avec $h : \psi_1 = h \circ f'^{-1}$.

Alors $\psi_1 \circ f'$ est une application linéaire de E' dans G vérifiant $\psi_1 \circ f' = h|_{E'}$.

Soit F' un supplémentaire de $\operatorname{im} f$ dans F . Il existe bien un tel supplémentaire car $\operatorname{im} f$ est un sous-espace vectoriel de F , qui est de dimension finie.

Alors $F = \operatorname{im} f \oplus F'$. On a défini $\psi_1 = h \circ f'^{-1}$ et on note ψ_2 l'application nulle de F' dans G . Soit ψ l'application linéaire de F dans G dont les restrictions à $\operatorname{im} f$ et F' sont respectivement ψ_1 et ψ_2 .

Démontrons que $\psi \circ f = h$.

Comme $E = \ker f \oplus E'$ alors il suffit de démontrer ceci sur $\ker f$ et sur E' .

Comme $\ker f \subseteq \ker h$ alors pour tout $u \in \ker f$ on a $u \in \ker h$ donc $\psi(f(u)) = \psi(0_F) = 0_G = h(u)$. Les restrictions à $\ker f$ de $\psi \circ f$ et de h sont égales.

La restriction de $\psi \circ f$ à E' est $\psi \circ f'$. Comme l'image de f' est $\operatorname{im} f$ alors $\psi \circ f' = \psi_1 \circ f'$. On a justifié que $\psi_1 \circ f' = h|_{E'}$, donc la restriction de $\psi \circ f$ à E' est égale à celle de h .

Comme $E = \ker f \oplus E'$ alors $\psi \circ f$ et h sont égales sur E tout entier.

On a construit une application linéaire $\psi : F \rightarrow G$ telle que $h = \psi \circ f$.

24 Soit n et m deux entiers avec $0 \leq m \leq n$.

Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ une famille de m formes linéaires non-nulles de E , espace vectoriel de dimension n .

Pour tout $k = 1, \dots, m$ on note $H_k = \ker \varphi_k$. Soit $F = H_1 \cap \dots \cap H_m$.

Le but de cet exercice est de démontrer que F est de dimension $n - m$ si et seulement si la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ est libre.

On définit l'application $f : E \rightarrow \mathbb{K}^m$

$$u \mapsto (\varphi_1(u), \dots, \varphi_m(u)).$$

- Justifier que f est linéaire, déterminer son noyau. Minorer la dimension de ce noyau.
- Justifier que si $\dim F = n - m$ alors pour tout $k = 1, \dots, m$, le vecteur e_k de \mathbb{K}^m possède un antécédent u_k par f . En déduire que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ est libre.
- Démontrer que si $\text{rg } f < m$ alors $\text{im } f$ est inclus dans un hyperplan H de \mathbb{K}^m . En déduire que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ est liée.
- Conclure.

- a. Les composantes de f sont des formes linéaires donc f est linéaire.

Son noyau est l'ensemble des vecteur u de E tels que $\varphi_1(u) \cdots = \varphi_m(u) = 0_{\mathbb{R}}$. Il s'agit de F :

$$\begin{aligned} \forall u \in E \quad u \in \ker f &\iff \varphi_1(u) = \dots = \varphi_m(u) = 0 \\ &\iff \forall i = 1, \dots, m \quad \varphi_i(u) = 0_{\mathbb{R}} \\ &\iff \forall i = 1, \dots, m \quad u \in \ker \varphi_i = H_i \\ &\iff u \in \bigcap_{i=1}^m H_i = F \end{aligned}$$

D'après le théorème du rang :

$$\dim E = \dim \ker f + \dim \text{im } f$$

On en déduit $n = \dim F + \dim \text{im } f$ puis $\dim F = n - \dim \text{im } f$.

Comme $\text{im } f$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^m alors $\dim \text{im } f \leq m$, et donc on obtient $\dim F \geq n - m$.

- b. Si $\dim F = n - m$ alors d'après ce qui précède $\dim \text{im } f = m$. Or $\text{im } f \subseteq \mathbb{K}^m$, donc par égalité de dimension $\text{im } f = \mathbb{K}^m$. Ceci signifie que f est surjective.

Tout élément de \mathbb{K}^m possède alors un antécédent par f , et *a fortiori* tout vecteur de la base canonique possède un antécédent par f .

On a donc justifié que pour tout vecteur e_k de la base canonique de \mathbb{K}^m il existe un vecteur u_k de E tel que $e_k = f(u_k)$.

Ceci signifie :

$$\forall (i, k) \in \{1, \dots, m\}^2 \quad \varphi_i(u_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démontrons maintenant que la famille de formes linéaires $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ est libre. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ des scalaires tels que $\lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_m \varphi_m = 0$. Alors :

$$\forall u \in E \quad \lambda_1 \varphi_1(u) + \dots + \lambda_m \varphi_m(u) = 0_{\mathbb{K}}$$

Ceci est donc valable pour tout vecteur u_k défini ci-dessus, ce qui implique que $\lambda_k = 0$ pour tout $k = 1, \dots, m$.

On a démontré que si $\lambda_1\varphi_1 + \dots + \lambda_m\varphi_m = 0$ alors $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$, donc la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ est libre.

- c. Si $\text{rg } f < m$ alors $\text{rg } f \leq m - 1$, car le rang est un entier. Ainsi $\text{im } f$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^m de dimension inférieure ou égale à $m - 1$.

Soit (u_1, \dots, u_p) une base de $\text{im } f$. La famille (u_1, \dots, u_p) est alors une famille libre de vecteurs de \mathbb{K}^m , donc par le théorème de la base incomplète elle peut être complétée en une base (u_1, \dots, u_m) de \mathbb{K}^m .

Posons $H = \text{Vect}(u_1, \dots, u_{m-1})$. Comme $p \leq m - 1$ et $\text{im } f = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ alors $\text{im } f \subseteq H$.

Comme la famille (u_1, \dots, u_{m-1}) est incluse dans la base (u_1, \dots, u_m) de \mathbb{K}^m alors elle est libre, et donc H est de dimension $m - 1$. Ainsi H est un hyperplan de \mathbb{K}^m .

L'équation de H est de la forme $a_1x_1 + \dots + a_mx_m = 0$ où les a_i sont des scalaires, non tous nuls car H est strictement inclus dans \mathbb{K}^m .

Pour tout $u \in E$ on a $f(u) \in \text{im } F$ donc $f(u) \in H$, ce qui donne :

$$a_1\varphi_1(u) + \dots + a_m\varphi_m(u) = 0_{\mathbb{R}}$$

Ainsi $a_1\varphi_1 + \dots + a_m\varphi_m = 0$ alors que les a_i ne sont pas tous nuls, donc la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ est liée.

- d. On a démontré que F est de dimension $n - m$ si et seulement si la famille de formes linéaires $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ est libre. Le sens direct est démontré dans la question (b), le sens indirect est démontré par contraposée dans la question (c). En effet, si F n'est pas de dimension $n - m$ alors $\dim F > n - m$ ce qui donne $\text{rg } f < m$.