Corrigé du T. D. C1
Probabilités

1 Soit A, B, C trois événements. Déterminer la probabilité de $A \cup B \cup C$ en fonction des probabilités des événements A, B, C et de leurs intersections.

On applique la formule :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{1}$$

En remplaçant A par $A \cup B$ et B par C :

$$P((A \cup B) \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C)$$

Par distributivité de l'intersection par rapport à l'union :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cap C) \cup (B \cap C))$$

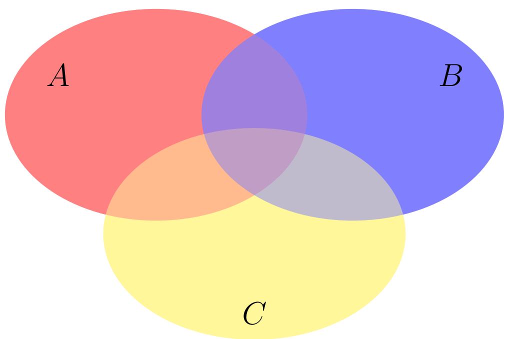
On applique deux fois la formule (1) :

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) \\ - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P((A \cap C) \cap (B \cap C)) \end{aligned}$$

Comme $(A \cap C) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$ on en déduit :

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) \\ - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

On peut comprendre cette formule grâce au schéma suivant :



On ajoute les probabilités de A, B, C, puis on supprime celles de $A \cap B$, $A \cap C$ et $B \cap C$ qui ont été comptées deux fois, puis on ajoute celle de $A \cap B \cap C$, qui a été comptée trois fois puis enlevée trois fois.

On peut extrapoler la formule pour quatre ensembles :

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C \cup D) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) \\ - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(A \cap D) - P(B \cap C) - P(B \cap D) - P(C \cap D) \\ + P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap D) + P(A \cap C \cap D) + P(B \cap C \cap D) \\ - P(A \cap B \cap C \cap D) \end{aligned}$$

On voit apparaître les coefficients du binôme.

La formule générale est la *formule du crible*, due à Henri Poincaré (1854 – 1912), valable pour n ensembles, où $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p-1} \left(\sum_{1 \leqslant k_1 < \cdots < k_p \leqslant n} P(A_{k_1} \cap \cdots \cap A_{k_p}) \right)$$

2 Un dé est truqué : la probabilité que l'entier $k \in \{1, \ldots, 6\}$ apparaisse est proportionnelle à k.

Donner un espace probabilisé modélisant le lancer de ce dé, puis calculer la probabilité qu'on obtienne un résultat pair.

On choisit l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

On définit les événements A_k : «obtenir k» pour k allant de 1 à 6.

Selon l'énoncé la probabilité de l'événement A_k est proportionnelle à k. Il existe donc un réel λ tel que :

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\} \qquad P(A_k) = \lambda k$$

Comme la famille $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant 6}$ est un système complet d'événements alors :

$$\sum_{k=1}^{6} P(A_k) = 1$$

Ceci donne $\sum_{k=1}^{6} (\lambda k) = 1$, et comme $\sum_{k=1}^{6} k = \frac{6 \times 7}{2} = 21$ on en déduit $\lambda = \frac{1}{21}$.

Les probabilités des événements élémentaires sont donc :

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

Soit A l'événement : «obtenir un numéro pair».

Cet événement a lieu si et seulement si on obtient 2, 4, ou 6, donc : $A = A_2 \cup A_4 \cup A_6$

Comme les A_k sont incompatibles alors :

$$P(A) = P(A_2) + P(A_4) + P(A_6)$$

On obtient $P(A) = \frac{4}{7}$, la probabilité d'obtenir un nombre pair avec ce dé est de $\frac{4}{7}$.

3 On possède une urne contenant 10 boules numérotées de 1 à 10.
Trois fois de suite on pioche une boule, on note le numéro obtenu et on garde la boule.

a. Donner un espace probabilisé modélisant cette expérience.

b. Calculer la probabilité des événements :
- B : «On n'obtient jamais le 10.»
- C : «On obtient au moins une fois le 10.»
- D : «On obtient le 10 lors du troisième tirage.»

a. On choisit pour univers Ω l'ensemble des triplets d'entiers distincts compris entre 1 et 10 :
$$\Omega = \left\{ (a,b,c) \in \{1,\dots,10\}^3 \;\middle|\; a,b,c \text{ distincts} \right\}$$
On admet que chaque boule a autant de chances d'être piochée que les autres. Alors chaque triplet de Ω a autant de chance d'arriver que les autres, et donc on peut munir Ω de la probabilité uniforme.

b. Les éléments élémentaires de Ω étant équiprobables, on peut appliquer la formule suivante pour tout événement A :
$$P(A) = \frac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card} \Omega}$$
On compte d'abord le nombre d'éléments de Ω.
Pour le premier numéro 10 nombres sont possibles. Une fois que ce numéro est pioché, pour le second il reste 9 numéros possibles, et pour le troisième il en reste alors 8.
Ainsi Ω possède $10 \times 9 \times 8 = 720$ éléments.
La probabilité d'un événement élémentaire, comme par exemple «obtenir $(6,3,7)$», est donc de $\frac{1}{720}$.
Calculons maintenant les probabilités des événements B, C, D.
- L'événement B contient les triplets de Ω où le 10 n'apparaît pas. Il contient donc les triplets de trois nombres distincts parmi $\{1,\dots,9\}$:
$$B = \left\{ (a,b,c) \in \{1,\dots,9\}^3 \;\middle|\; a,b,c \text{ distincts} \right\}$$
Son cardinal est : $\operatorname{Card} B = 9 \times 8 \times 7$
On en déduit par équiprobabilité :
$$P(B) = \frac{\operatorname{Card} B}{\operatorname{Card} \Omega} = \frac{9 \times 8 \times 7}{10 \times 9 \times 8} = \frac{7}{10}$$
- L'événement contraire de C est : «ne jamais obtenir le 10». Il s'agit de l'événement B, donc $C = \overline{B}$.
On en déduit :
$$P(C) = 1 - P(B) = \frac{3}{10}$$

- L'événement D contient les triplets de trois nombres distincts entre 1 et 10 où le troisième est le 10 :

$$D = \Big\{ (a, b, 10) \in \{1, \dots, 10\}^3 \;\Big|\; a, b \text{ distincts} \Big\}$$

Le a peut prendre 9 valeurs distinctes, puisque le 10 est en position 3. Pour chaque valeur de a, 8 valeurs sont encore possibles pour b.

On en déduit : $\quad \operatorname{Card} D = 9 \times 8$

Par équiprobabilité :

$$P(D) = \frac{\operatorname{Card} D}{\operatorname{Card} \Omega} = \frac{9 \times 8}{10 \times 9 \times 8} = \frac{1}{10}$$

Évidemment, ceci est logique : en troisième position le 10 a autant de chances que les autres numéros d'apparaître.

(4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On jette n fois une pièce équilibrée.

a. Donner un espace probabilisé modélisant cette expérience.

b. Calculer la probabilité des événements :

- A : «On obtient uniquement des piles.»
- B : «On obtient aucun pile.»
- C : «On obtient au moins un pile.»
- D : «On obtient une et une seule fois pile.»

a. On choisit pour Ω l'ensemble des n-uplets de piles ou faces :

$$\Omega = \{P, F\}^n = \{ (a_1, \dots, a_n) \mid \forall i = 1, \dots, n \quad a_i \in \{P, F\}\}$$

Cet ensemble possède 2^n éléments.

La pièce étant équilibrée, elle peut tomber sur pile avec la même probabilité que face. Les éléments de Ω sont donc équiprobables, *i.e.,* on munit Ω de la probabilité uniforme.

b. L'événement A est élémentaire, il ne contient que le n-uplet $(P, \dots, P)$. Par équiprobabilité :

$$P(A) = \frac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card} \Omega} = \frac{1}{2^n}$$

L'événement B signifie que l'on n'obtient que des faces, il est également élémentaire car il ne contient que le n-uplet $(F, \dots, F)$. Par équiprobabilité :

$$P(B) = \frac{\operatorname{Card} B}{\operatorname{Card} \Omega} = \frac{1}{2^n}$$

L'événement contraire de l'événement C est : «on n'obtient aucun pile». Il s'agit de l'événement B, donc :

$$P(C) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{2^n}$$

L'événement D contient les n-uplets composés d'un pile et de $n-1$ faces. Comme n positions sont possibles pour le pile, il contient n éléments :

$$D = \{(P, F, \dots, F), (F, P, F, \dots, F), \dots, (F, \dots, F, P)\}$$

Par équiprobabilité :

$$P(D) = \frac{\operatorname{Card} D}{\operatorname{Card} \Omega} = \frac{n}{2^n}$$

5 On jette deux fois de suite une pièce de monnaie équilibrée.

a. Quelle est la probabilité que l'on obtienne au moins un pile ? Deux piles ?

b. Quelle est la probabilité que l'on obtienne deux piles sachant que l'on en a obtenu au moins un ?

c. Quelle est la probabilité que l'on obtienne deux piles sachant que le premier tirage a donné un pile ?

L'univers Ω contient quatre éléments :

$$\Omega = \{(F, F), (F, P), (P, F), (P, P)\}$$

Ces quatre éléments sont équiprobables car la pièce est équilibrée.
On définit les événements :

- A : «on obtient au moins un pile»
- B : «on obtient deux piles»
- C : «on obtient pile au premier tirage»

a. Comme $A = \{(F, P), (P, F), (P, P)\}$ alors par équiprobabilité :

$$P(A) = \frac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card} \Omega} = \frac{3}{4}$$

Comme $B = \{(P, P)\}$ alors par équiprobabilité :

$$P(B) = \frac{\operatorname{Card} B}{\operatorname{Card} \Omega} = \frac{1}{4}$$

b. La probabilité demandée est $P_A(B)$. Par définition des probabilités conditionnelles :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Comme $A \cap B = B$ alors :

$$P_A(B) = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{1}{3}$$

La probabilité que l'on obtienne deux piles sachant que l'on en a obtenu au moins un est donc de $\frac{1}{3}$

c. Intuitivement on comprend bien que la probabilité demandée est de $\frac{1}{2}$, car les résultats des deux lancers sont *indépendants*.
Cette probabilité est $P_C(B)$. Or $C = \{(P,F),(P,P)\}$, donc par équiprobabilité $P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, et $B \cap C = B$. On en déduit :

$$P_C(B) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(B)}{P(C)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$$

Remarque. Il est évident que $P(C) = \frac{1}{2}$, en restreignant l'univers au premier tirage : $\Omega_1 = \{P, F\}$ muni de la probabilité uniforme, et alors $C = \{P\}$.

6 On pioche des lettres une par une dans un sac contenant les 26 lettres de l'alphabet, sans les remettre. Pour tout $k \in \{0,\dots,26\}$ on note T_k l'événement : «le S apparaît au tirage k».

a. Pour tout $i \in \{1,\dots,26\}$ calculer directement $P_{\overline{T_1}\cap\cdots\cap\overline{T_{i-1}}}(\overline{T_i})$.

b. En déduire la probabilité de l'événement S_k : «le S apparaît lors de l'un des k tirages».

a. Pour tout $k \in \{1,\dots,26\}$ l'événement $\overline{T_k}$ signifie que le S n'est pas pioché au tirage k.
L'événement $\overline{T_1} \cap \cdots \cap \overline{T_{i-1}}$ signifie donc que le S n'apparaît pas aux tirages 1 à $i-1$.
Si cet événement a lieu alors il reste $(26-(i-1)) = 27-i$ lettres dans le sac, dont le S. Par équiprobabilité la probabilité de le piocher au tirage suivant est donc de $\frac{1}{27-i}$, et la probabilité de ne pas le piocher est $1 - \frac{1}{27-i}$:

$$\forall i \in \{1,\dots,26\} \qquad P_{\overline{T_1}\cap\cdots\cap\overline{T_{i-1}}}(\overline{T_i}) = \frac{26-i}{27-i}$$

On peut remarquer que cette formule est valable aussi pour $i = 1$, auquel cas l'événement $\overline{T_1} \cap \cdots \cap \overline{T_{i-1}}$ est l'événement certain, et donc $P(\overline{T_1}) = \frac{25}{26}$.

b. Soit $k \in \{1,\dots,26\}$. D'après la formule des probabilités composées :

$$P(\overline{T_1} \cap \cdots \cap \overline{T_k}) = \prod_{i=1}^{k} P_{\overline{T_1}\cap\cdots\cap\overline{T_{i-1}}}(\overline{T_i})$$

D'après la question précédente :

$$P(\overline{T_1} \cap \cdots \cap \overline{T_k}) = \prod_{i=1}^{k} \frac{26-i}{27-i}$$

On remarque un télescopage, que l'on peut rédiger correctement de la façon suivante, en utilisant le changement d'indice $j = i - 1$:

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{26-i}{27-i} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{k}(26-i)}{\prod\limits_{i=1}^{k}(27-i)} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{k}(26-i)}{\prod\limits_{j=0}^{k-1}(27-(j+1))} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{k}(26-i)}{\prod\limits_{i=0}^{k-1}(26-i)} = \frac{26-k}{26}$$

L'événement $\overline{T_1} \cap \cdots \cap \overline{T_k}$ signifie que le S n'apparaît pas aux tirages 1 à k. L'événement contraire est : «le S apparaît lors de l'un des k tirages». Il s'agit de l'événement S_k.
On en déduit : $\quad P(S_k) = 1 - P(\overline{T_1} \cap \cdots \cap \overline{T_k}) = \dfrac{k}{26}$

7 On possède un sac avec n jetons numérotés de 1 à n ($n \in \mathbb{N}^*$), et n urnes $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ contenant chacune k boules blanches et $n-k$ boules noires.

On pioche un jeton dans le sac. On obtient un numéro k. On pioche ensuite une boule dans l'urne $\mathcal{U}_k$.

a. Quelle est la probabilité que la boule obtenue soit blanche ?

b. La boule obtenue est blanche. Quelle est la probabilité, pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, qu'elle provienne de l'urne $\mathcal{U}_k$?

a. On reconnaît une expérience aléatoire en deux phases, pour laquelle la formule des probabilités totales est toute indiquée.

Pour tout $k = 1, \ldots, n$ on note A_k l'événement «le jeton pioché dans le sac porte le numéro k».

On note ensuite B l'événement «la boule piochée est blanche».

On souhaite donc calculer la probabilité de l'événement B.

La famille $(A_1, \ldots, A_n)$ est un système complet d'événements car :

- On pioche un numéro entre 1 et n, donc l'un au moins des événements A_k a lieu, *i.e.,* $A_1 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.
- On ne pioche qu'un seul jeton, donc deux événements A_i distincts ne peuvent avoir lieu simultanément : si $i \neq j$ alors $A_i \cap A_j = \varnothing$.

De plus les A_i sont de probabilités non-nulles car le sac contient au moins un jeton portant chaque numéro de 1 à n.

Ces hypothèses permettent d'appliquer la formule des probabilités totales :

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P_{A_k}(B) P(A_k)$$

Le sac contient n jetons, que l'on suppose identiques au toucher donc indiscernables. De plus pour tout entier $k \in \{1, \ldots, n\}$ le sac contient 1 seul jeton numéroté k, donc par équiprobabilité :

$$\forall k = 1, \ldots, n \qquad P(A_k) = \frac{1}{n}$$

Si l'événement A_k a lieu alors on pioche une boule dans l'urne $\mathcal{U}_k$, laquelle contient k boules blanches sur un total de n boules aussi supposées indiscernables, donc par équiprobabilité :

$$\forall k = 1, \ldots, n \qquad P_{A_k}(B) = \frac{k}{n}$$

On en déduit :

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{n+1}{2n}$$

Par exemple pour $n = 1$ on obtient $P(B) = 1$. En effet, le sac contient juste un jeton numéroté 1 et on a une unique urne, qui contient une boule blanche. Il est donc certain que l'on piochera cette boule.

On peut aussi remarquer que $P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$, ce qui montre que lorsque n tend vers $+\infty$ la probabilité de piocher une boule blanche tend vers $\frac{1}{2}$.

b. On souhaite calculer la probabilité de l'événement A_k sachant que l'événement B a lieu. Il s'agit de la probabilité $P_B(A_k)$. D'après la formule d'inversion cause-effet :

$$P_B(A_k) = \frac{P_{A_k}(B)P(A_k)}{P(B)}$$

Toutes ces probabilités sont connues, on obtient :

$$\forall k = 1, \dots, n \qquad P_B(A_k) = \frac{2k}{n(n+1)}$$

On remarque que la somme des ces probabilités est égale à 1, ce qui était prévisible car la famille $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'événements et P_B est une probabilité, donc :

$$\sum_{k=1}^{n} P_B(A_k) = 1$$

8 Démontrer que A et B sont indépendants si et seulement si A et $\overline{B}$ sont indépendants, si et seulement si $\overline{A}$ et B sont indépendants, si et seulement si $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Supposons que A et B sont indépendants. Alors par définition $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ et :

$$P(\overline{A})P(B) = (1 - P(A))P(B) = P(B) - P(A)P(B) = P(B) - P(A \cap B)$$

Par propriété $P(B) - P(A \cap B) = P(B \setminus A)$. Or $B \setminus A = B \cap \overline{A}$, et donc on a prouvé que :

$$P(\overline{A})P(B) = P(\overline{A} \cap B)$$

Les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants.
On a démontré l'implication suivante, valable pour tous événements A et B :

$$A,\ B \text{ indépendants} \qquad \Longrightarrow \qquad \overline{A},\ B \text{ indépendants.}$$

En remplaçant A par $\overline{A}$ on obtient :

$$\overline{A},\ B \text{ indépendants} \qquad \Longrightarrow \qquad A,\ B \text{ indépendants.}$$

Ceci donne :

$$A,\ B \text{ indépendants} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overline{A},\ B \text{ indépendants.}$$

En intervertissant A et B :

$$A,\ B \text{ indépendants} \qquad \Longleftrightarrow \qquad A,\ \overline{B} \text{ indépendants.}$$

En remplaçant A par $\overline{A}$:

$$\overline{A},\ B \text{ indépendants} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overline{A},\ \overline{B} \text{ indépendants.}$$

Toutes les équivalences sont finalement démontrées.

9 Un jeu de 52 cartes possède 13 cœurs et 4 dames dont la dame de cœur.

On pioche une carte dans ce jeu. On note A et B les événements «on obtient un cœur» et «on obtient une dame». Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Et si on enlève le roi de trèfle du jeu ?

L'événement A contient 13 éléments, l'événement B contient 4 éléments.

L'événement $A \cap B$ ne contient qu'un seul élément : la dame de cœur.

Par équiprobabilité on en déduit :

$$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} \qquad P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \qquad P(A \cap B) = \frac{1}{52}$$

On remarque que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, car $4 \times 13 = 52$. Les événements A et B sont donc indépendants.

Supposons maintenant qu'on a enlevé le roi de trèfle. Alors le jeu contient 51 cartes dont 13 cœurs, 4 dames, et une seule dame de cœur. Les probabilités deviennent :

$$P(A) = \frac{13}{51} \qquad P(B) = \frac{4}{51} \qquad P(A \cap B) = \frac{1}{51}$$

On remarque que :

$$P(A)P(B) = \frac{52}{51^2} \quad \text{et} \quad P(A \cap B) = \frac{51}{51^2}$$

Les événements A et B ne sont pas indépendants car $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$.

10 On réalise l'expérience consistant à jeter deux dés, un rouge et un bleu, et on définit les événements :

- A : «Le dé rouge donne 6»
- B : «Le dé bleu donne 6»
- C : «La somme des deux dés est égale à 7».

Vérifier que A, B, C sont deux-à-deux indépendants, mais ne sont pas mutuellement indépendants.

L'univers Ω contient 36 éléments équiprobables : les couples (a, b) où a et b sont deux entiers entre 1 et 6.

L'événement A contient les couples $(6, b)$ pour b allant de 1 à 6, l'événement B contient les couples $(a, 6)$ pour a allant de 1 à 6, et l'événement C contient les couples $(a, 7-a)$ pour a allant de 1 à 6, c'est-à-dire les couples :

$$(1,6) \quad (2,5) \quad (3,4) \quad (4,3) \quad (5,2) \quad (6,1)$$

Ces trois événements sont de cardinal 6, alors que l'univers est de cardinal 36, donc par équiprobabilité leurs probabilités sont $\frac{6}{36}$ soit :

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{6}$$

L'événement $A \cap B$ ne contient que le couple $(6, 6)$, l'événement $A \cap C$ ne contient que le couple $(6, 1)$, l'événement $B \cap C$ ne contient que le couple $(1, 6)$. Par équiprobabilité :

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{36}$$

Ceci donne :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \qquad P(A \cap C) = P(A)P(C) \qquad P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

Les événements A, B, C sont donc deux à deux indépendants. Par contre l'événement $A \cap B \cap C$ est impossible : si A et B ont lieu alors les deux dés donnent 6 et donc la somme ne peux être égale à 6. Ainsi :

$$P(A \cap B \cap C) = 0 \qquad \text{et} \qquad P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{6^3}$$

Les événement A, B, C ne sont pas mutuellement indépendants.

(11) On jette deux dés et on note X la variable aléatoire égale au plus grand numéro obtenu.

a. Déterminer $X(\Omega)$ puis $P(X \leqslant k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.

b. En déduire la loi de X.

c. Calculer l'espérance de X.

a. Le plus grand numéro obtenu avec deux dés est un entier compris entre 1 et 6 donc :

$$X(\Omega) = \{1, \dots, 6\}$$

L'événement $(X \leqslant k)$ signifie que le plus grand numéro est inférieur ou égal à k, donc que les deux numéros sont inférieurs ou égaux à k.
Cet événement a lieu si et seulement si on a obtenu deux fois un numéro entre 1 et k, ce qui se produit avec la probabilité $\frac{k}{6}$. Or les deux tirages sont indépendants donc :

$$P(X \leqslant k) = \left(\frac{k}{6}\right)^2 = \frac{k^2}{36}$$

On aurait aussi pu expliciter les ensembles :

$$\Omega = \{1, \dots, 6\}^2 \qquad \text{et} \qquad (X \leqslant k) = \{1, \dots, k\}^2$$

Donc par équiprobabilité sur Ω :

$$P(X \leqslant k) = \frac{\text{Card}(X \leqslant k)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{k^2}{36}$$

Si $k = 1$ on obtient $P(X \leqslant 1) = \frac{1}{36}$, c'est la probabilité d'obtenir le couple $(1, 1)$. Si $k = 6$ on obtient $P(X \leqslant 6) = 1$, car il est certain que le plus grand numéro est inférieur ou égal à 6.
On remarque également que cette formule est valable pour $k = 0$: en effet l'événement $(X = 0)$ est impossible, donc sa probabilité est nulle. Ceci sera utilisé dans la question suivante.

b. L'événement $(X = k)$ a lieu si $(X \leqslant k)$ a lieu mais $(X \leqslant k - 1)$ n'a pas lieu, donc :

$$P(X = k) = P(X \leqslant k) - P(X \leqslant k - 1)$$

Pour être plus précis on pourrait noter que $(X = k) = (X \leqslant k) \setminus (X \leqslant k - 1)$, donc

$$P(X = k) = P(X \leqslant k) - P((X \leqslant k) \cap (X \leqslant k - 1))$$

L'implication $(X \leqslant k - 1) \implies (X \leqslant k)$ montre que $(X \leqslant k) \cap (X \leqslant k - 1) = (X \leqslant k - 1)$ et donc on aboutit bien à :

$$P(X = k) = P(X \leqslant k) - P(X \leqslant k - 1)$$

Cette formule est valable pour k allant de 1 à 6, car la formule pour $P(X \leqslant k)$ est valable pour k allant de 0 à 6.
Grâce à la question précédente :

$$P(X = k) = \frac{k^2}{36} - \frac{(k-1)^2}{36} = \frac{2k - 1}{36}$$

Ceci donne la loi de k. On peut vérifier que :

- $P(X=1) = \frac{1}{36}$ car l'événement $(X=1)$ ne contient que le couple $(1,1)$.
- $P(X=2) = \frac{3}{36}$ car l'événement $(X=2)$ contient les couples :

$$(1,2) \qquad (2,2) \qquad (2,1)$$

- $P(X=3) = \frac{5}{36}$ car l'événement $(X=3)$ contient les couples :

$$(1,3) \qquad (2,3) \qquad (3,3) \qquad (3,2) \qquad (3,1)$$

- etc jusqu'à $P(X=6) = \frac{11}{36}$ car l'événement $(X=6)$ contient les couples :

$$(1,6) \quad \dots \quad (6,6) \quad \dots \quad (6,1)$$

Le tableau suivant montre en case (i,j) la maximum entre i et j :

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

On voit par exemple que 7 couples réalisent l'événement $X=4$.

c. Par définition de l'espérance :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{6} kP(X=k).$$

On calcule :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{6} \frac{k(2k-1)}{36} = \frac{1}{36}\left(2\sum_{k=1}^{6} k^2 - \sum_{k=1}^{6} k\right) \\ &= \frac{1}{36}\left(\frac{2\times 6\times 7\times 13}{6} - \frac{6\times 7}{2}\right) = \frac{6\times 7}{36} \times \frac{26-3}{6} = \frac{7\times 23}{36} = \frac{161}{36} \end{aligned}$$

On remarque que $E(X) = 4 + \frac{17}{36} \simeq 4{,}47222...$

Si on jette un seul dé la valeur moyenne obtenue est 3,5. Si on jette deux dés et garde la maximum alors la valeur moyenne obtenue est supérieure à 3,5 et inférieur au maximum 6, donc la valeur 4,4722 est cohérente.

(12) Soit X une variable aléatoire finie à valeurs dans $\mathbb{N}$, et soit $n = \max X(\Omega)$. Démontrer que :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} P(X \geqslant k)$$

Comme $X(\Omega) \subseteq \{0, \dots, n\}$ alors par définition de l'espérance :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} kP(X = k)$$

Si un entier k n'est pas dans $X(\Omega)$ alors la probabilité de l'événement $(X = k)$ est nulle, donc $kP(X = k) = 0$, et donc on peut tout de même l'ajouter à la somme ci-dessus sans changer la valeur de l'espérance.

On remarque que :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\} \qquad P(X \geqslant k) = \sum_{i=k}^{n} P(X = i)$$

Ceci est valable car X est une variable aléatoire entière de maximum n.
En on déduit :

$$\sum_{k=1}^{n} P(x \geqslant k) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=k}^{n} P(X = i)$$

Il s'agit d'une somme triangulaire :

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=k}^{n} P(X = i) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant i \leqslant n} P(X = i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i} P(X = i)$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n} P(X \geqslant k) = \sum_{i=1}^{n} iP(X = i)$$

Comme i est une variable muette ceci donne bien :

$$\sum_{k=1}^{n} P(X \geqslant k) = \sum_{k=0}^{n} kP(X = k) = E(X).$$

13 Démontrer la formule donnant $V(aX+b)$ en fonction de $V(X)$, a et b.

Par définition de la variance :

$$V(aX+b) = E\Big((aX+b-E(aX+b))^2\Big)$$

La linéarité de l'espérance donne $\quad E(aX+b) = aE(X)+b \quad$ donc :

$$\begin{aligned} V(aX+b) &= E\Big((aX+b-aE(X)-b)^2\Big) \\ &= E\Big(a^2(X-E(X))^2\Big) \end{aligned}$$

Par linéarité de l'espérance :

$$V(aX+b) = a^2E\Big((X-E(X))^2\Big)$$

On retrouve la définition de la variance :

$$V(aX+b) = a^2V(X)$$

La propriété est démontrée.

14 Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega)$ est un singleton : $X(\Omega) = \{b\}$ avec $b \in \mathbb{R}$.

Déterminer la loi de X, son espérance, sa variance et son écart-type.

Comme $X(\Omega) = \{b\}$ alors la loi de X est :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad P(X=x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x=b \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par définition de l'espérance :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X=x) = bP(X=b) = b.$$

Effectivement, comme X ne prends que la valeur b alors elle est égale à b en moyenne.
De même, X^2 est la variable aléatoire certaine égale à b^2, donc $E(X^2) = b^2$, puis grâce à la formule de Koenig-Huyghens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 0.$$

Ceci s'explique car X ne varie pas, donc sa variance est nulle.
On en déduit $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 0$.

15 On pioche une boule dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, et on note X le numéro obtenu.

a. Déterminer la loi de X.

b. Calculer son espérance, sa variance et son écart-type.

a. La variable aléatoire X prend ses valeurs dans l'intervalle entier $\{1, \dots, n\}$. Les boules sont supposées identiques et indescernables donc ses valeurs sont équiprobables, et :

$$X(\Omega) = \{1, \dots, n\} \qquad \text{et} \qquad \forall k \in X(\Omega) \qquad P(X = k) = \frac{1}{n}.$$

b. L'espérance de X est :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} kP(X = k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Pour la variance on commence par calculer l'espérance de X^2 :

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 P(X = k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

Ensuite, d'après la formule de König-Huyghens :

$$\begin{aligned} V(X) = E(X^2) - E(X)^2 &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{n+1}{12}(2(2n+1) - 3(n+1)) = \frac{(n+1)(n-1)}{12} = \frac{n^2-1}{12} \end{aligned}$$

On constate que cette variance est nulle si et seulement si $n = 1$. Effectivement si $n = 1$ alors X suit la loi constante égale à 1, on retrouve les valeurs obtenues dans l'exercice précédent.

1 Soit A, B, C trois événements d'un univers Ω. Décrire en terme d'ensembles les événements :

a. Au moins un des événements A, B, C se réalise.

b. A, B, C se réalisent tous les trois.

c. A, B, C ne se réalisent pas tous.

d. Aucun des trois événements A, B, C ne se réalise.

e. A se réalise mais ni B ni C ne se réalisent.

f. A ne se réalise pas mais l'un des deux autres au moins se réalise.

g. Un seulement parmi A et B se réalise.

a. $A \cup B \cup C$ b. $A \cap B \cap C$ c. $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$ d. $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

e. $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ ou $A \setminus (B \cup C)$ f. $\overline{A} \cap (B \cup C)$

g. $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ ou $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

2 Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé (Ω, P). Simplifier :

$$P(A \cup B) + P(\overline{A} \cup B) + P(A \cup \overline{B}) + P(\overline{A} \cup \overline{B})$$

On utilise la formule :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Celle-ci est valable pour tous événements A et B. On l'applique pour $A \cup B$ et $\overline{A} \cup B$:

$$P((A \cup B) \cup (\overline{A} \cup B)) = P(A \cup B) + P(\overline{A} \cup B) - P((A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B)) \tag{2}$$

Or par associativité et commutativité de la loi $\cup$:

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cup (\overline{A} \cup B) = A \cup B \cup \overline{A} \cup B &= A \cup \overline{A} \cup B \cup B \\ &= (A \cup \overline{A}) \cup (B \cup B) = \Omega \cup B = \Omega\end{aligned}$$

Par distributivité de l'intersection par rapport à l'union :

$$(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{A}) \cup B = \varnothing \cup B = B$$

L'égalité (2) donne donc :

$$P(A \cup B) + P(\overline{A} \cup B) = P(\Omega) + P(B) = 1 + P(B)$$

Cette égalité est valable pour tous événements A et B. En remplaçant B par $\overline{B}$ on obtient :

$$P(A \cup \overline{B}) + P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 + P(\overline{B})$$

Par somme on en déduit :

$$P(A \cup B) + P(\overline{A} \cup B) + P(A \cup \overline{B}) + P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 2 + P(B) + P(\overline{B})$$

Comme $P(\overline{B}) = 1 - P(B)$ alors finalement :

$$P(A \cup B) + P(\overline{A} \cup B) + P(A \cup \overline{B}) + P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 3.$$

Cette formule est valable pour tout événements A et B.

3 Soit n un entier strictement positif et $(A_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ un système complet d'événements. On suppose que pour tout $k \in \{2,\dots,n\}$ la probabilité de l'événement A_k est la moitié de celle de l'événement A_{k-1}.

a. Pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$, calculer $P(A_k)$ en fonction de n et k.

b. On pose $B_k = \bigcup_{i=k}^n A_i$. Déterminer $P(B_k)$.

a. D'après l'énoncé la suite $(P(A_k))_{1\leqslant k\leqslant n}$ est une suite (finie) géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Il existe alors un réel λ tel que :

$$\forall k = 1,\dots,n \qquad P(A_k) = \lambda\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

La famille $(A_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est un système complet d'événements donc :

$$\sum_{k=1}^n P(A_k) = 1$$

On obtient :

$$\sum_{k=1}^n P(A_k) = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda\frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda = \frac{2^n}{2^n - 1}$$

On en déduit :

$$\forall k = 1,\dots,n \qquad P(A_k) = \frac{2^{n-k}}{2^n - 1}$$

b. Comme les A_k forment un système complet d'événements alors ils sont deux-à-deux incompatibles, donc par additivité :

$$\forall k = 1,\dots,n \qquad P(B_k) = P(\bigcup_{i=k}^n A_i) = \sum_{i=k}^n P(A_i)$$

On utilise la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique :

$$P(B_k) = \sum_{i=k}^n \frac{2^n}{2^n - 1}\left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{2^n}{2^n - 1}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = \frac{2^{n+1-k} - 1}{2^n - 1}$$

On peut vérifier que cette valeur est correcte pour $k = n$ car $B_n = A_n$ et pour $k = 1$ car $B_1 = \Omega$.

4 Une urne contient une boule rouge, une boule bleue et une boule jaune. On tire plusieurs fois une boule de l'urne, en la remettant à chaque fois. On cherche la probabilité que l'on obtienne les trois couleurs en n tirages ($n \in \mathbb{N}^*$).

a. Dans cette question on fixe n et on note R (respectivement B, J) l'événement «on obtient au moins une boule rouge (respectivement bleue, jaune) en n tirages».

(i) Calculer $P(\overline{R})$, $P(\overline{B})$ et $P(\overline{J})$, puis $P(\overline{R}\cap\overline{B})$, $P(\overline{R}\cap\overline{J})$, $P(\overline{B}\cap\overline{J})$, et $P(\overline{R}\cap\overline{B}\cap\overline{J})$.

(ii) En déduire $P(\overline{R}\cup\overline{B}\cup\overline{J})$.

b. Soit A_n l'événement «lors des n tirages, toutes les couleurs ont été obtenues». Calculer $P(A_n)$.

c. Vérifier la formule obtenue pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

a. *(i)* L'événement $\overline{R}$ signifie que l'on obtient aucune boule rouge, donc juste des boules bleues et jaunes.

À chaque tirage la probabilité de piocher une boule bleue ou jaune est $\frac{2}{3}$, car l'urne ne contient que trois boules, supposées indiscernables, et on pioche une boule parmi ces trois boules.

Les boules sont remises dans l'urne après chaque tirage, donc les tirages sont identiques et mutuellement indépendants.

On en déduit : $P(\overline{R}) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et de même : $P(\overline{B}) = P(\overline{J}) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

L'événement $\overline{R}\cap\overline{B}$ signifie que l'on n'obtient aucune boule rouge et aucune boule bleue, donc juste des boules jaunes.

À chaque tirage la probabilité d'obtenir la boule jaune est $\frac{1}{3}$ et les tirages sont mutuellement indépendants, donc : $P(\overline{R}\cap\overline{B}) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

De même : $P(\overline{R}\cap\overline{J}) = P(\overline{B}\cap\overline{J}) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

L'événement $\overline{R}\cap\overline{B}\cap\overline{J}$ signifie que l'on n'obtient aucune boule rouge et aucune boule bleue et aucune boule jaune. Or l'urne ne contient que des boules rouges, bleues et jaunes, on obtient donc obligatoirement l'une des trois boules au moins, car $n \geqslant 1$. Ainsi l'événement $\overline{R}\cap\overline{B}\cap\overline{J}$ est impossible et : $P(\overline{R}\cap\overline{B}\cap\overline{J}) = 0$

(ii) On applique la formule du crible :

$$\begin{aligned}P(\overline{R}\cup\overline{B}\cup\overline{J}) = P(\overline{R}) + P(\overline{B}) + P(\overline{J}) \\ - P(\overline{R}\cap\overline{B}) - P(\overline{R}\cap\overline{J}) - P(\overline{B}\cap\overline{J}) \\ + P(\overline{R}\cap\overline{B}\cap\overline{J})\end{aligned}$$

Avec les résultats de la question précédente on obtient :

$$P(\overline{R}\cup\overline{B}\cup\overline{J}) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{2^n - 1}{3^{n-1}}$$

b. L'événement A_n signifie que les trois couleurs ont été obtenues, donc que les trois événements R, B et J ont lieu :

$$A_n = R \cap B \cap J$$

L'événement contraire est :

$$\overline{A_n} = \overline{R \cap B \cap J} = \overline{R} \cup \overline{B} \cup \overline{J}$$

En utilisant la question précédente ceci donne :

$$P(A_n) = 1 - P(\overline{R} \cup \overline{B} \cup \overline{J}) = 1 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^n + 3\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{3^{n-1}}$$

c. On calcule : $P(A_1) = 0$ et $P(A_2) = 0$. Effectivement si on pioche une fois ou deux fois une boule dans l'urne alors on ne peut obtenir une boule de chaque couleur car il y a trois couleurs dans l'urne.
Pour $n = 3$ on obtient $P(A_3) = \frac{2}{9}$.
Dans ce cas l'univers est l'ensemble des triplets d'éléments de $\{r, b, j\}$:

$$\Omega = \{r, b, j\}^3$$

Il contient 27 éléments, équiprobables car les boules sont supposées indiscernables.
L'événement A_3 signifie que les trois couleurs ont été obtenues, donc il contient les permutations de l'ensemble $\{r, b, j\}$, donc $3! = 6$ éléments.
On peut les expliciter :

$$A_3 = \{(r, b, j), (r, j, b), (b, r, j), (b, j, r), (j, r, b), (j, b, r)\}$$

On en déduit par équiprobabilité :

$$P(A_3) = \frac{\operatorname{Card} A_3}{\operatorname{Card} \Omega} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$$

Ceci est confirmé par la formule.
On peut aussi remarquer que $\lim P(A_n) = 1$, par exemple en écrivant :

$$P(A_n) = 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

Effectivement, plus on pioche de boules dans l'urne plus on a de chances d'obtenir toutes les couleurs, et l'événement A_n tend vers l'événement certain, sans jamais toutefois lui être égal car on a toujours une chance, même petite, de n'obtenir que deux couleurs parmi les trois.

5 La probabilité de gagner au Loto est de $\frac{1}{N}$ où N est un grand entier.

a. En jouant N fois au Loto, quelle est la probabilité de gagner au moins une fois ?

b. Calculer $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$ et en déduire une approximation de la probabilité précédente.

a. Soit A l'événement : «On gagne au moins une fois lors de N parties».
L'événement $\overline{A}$ signifie alors : «On perd N fois» ou «On perd toutes les parties».
Pour tout k allant de 1 à N on note A_k l'événement : «On gagne lors de la partie k».
L'événement $\overline{A}$ a lieu si et seulement si on perd toutes les parties donc :

$$\overline{A} = \overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_N$$

Les parties sont mutuellement indépendantes donc les événements $A_1, \ldots, A_N$ sont mutuellement indépendants et :

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A}_1) \times \cdots \times P(\overline{A}_N)$$

Par énoncé la probabilité de gagner lors d'une expérience est de $\frac{1}{N}$ donc :

$$\forall k \in \{1, \ldots, N\} \qquad P(A_k) = \frac{1}{N} \qquad \text{puis} \qquad P(\overline{A}_k) = 1 - \frac{1}{N}$$

On en déduit :

$$P(\overline{A}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^N$$

Finalement la probabilité de l'événement A est :

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^N$$

b. On commence par écrire : $(1-x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1-x)}$

Le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1-x)$ est

$$\ln(1-x) \underset{(0)}{=} -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Donc :

$$\frac{1}{x}\ln(1-x) \underset{(0)}{=} -1 - \frac{x}{2} + o(x)$$

Puis :

$$e^{\frac{1}{x}\ln(1-x)} \underset{(0)}{=} e^{-1}e^{-\frac{x}{2}+o(x)} \underset{(0)}{=} e^{-1}\left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right) \underset{(0)}{=} \frac{1}{e} - \frac{x}{2e} + o(x)$$

En conséquence :

$$P(A) \underset{(0)}{=} 1 - \frac{1}{e} + \frac{1}{2eN} + o\left(\frac{1}{N}\right) = 1 - \frac{1}{e} + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

Si N est grand alors $P(A)$ est proche de $1 - \frac{1}{e} \simeq 0{,}63$. L'erreur est de l'ordre de $\frac{1}{N}$.

6 Au cours d'un procès deux jurés déclarent un accusé coupable ou non coupable.

On suppose que :

- La probabilité que l'accusé soit coupable est de 60%.
- S'il est coupable alors la probabilité que chaque juré le déclare coupable est de 70%, et ceci indépendamment l'un de l'autre.
- Si l'accusé n'est pas coupable, la probabilité que chaque juré le déclare coupable est de 20%, indépendamment l'un de l'autre.

Attention : des événements peuvent être indépendants pour une certaine probabilité mais par pour une autre.

a. Calculer la probabilité que chaque juré déclare l'accusé coupable.

b. Calculer la probabilité que les deux jurés déclarent l'accusé coupable.

c. Les événements «le premier juré déclare l'accusé coupable» et «le second juré déclare l'accusé coupable» sont-ils indépendants ?

d. Calculer la probabilité que l'accusé soit non coupable s'il est déclaré coupable par les deux jurés.

On définit les événements suivants :

- C : «L'accusé est coupable.»
- J_1 : «Le premier juré déclare l'accusé coupable.»
- J_2 : «Le second juré déclare l'accusé coupable.»

Les données de l'énoncé s'écrivent alors :

$$P(C) = \frac{6}{10} \qquad P_C(J_1) = P_C(J_2) = \frac{7}{10} \qquad P_{\overline{C}}(J_1) = P_{\overline{C}}(J_2) = \frac{2}{10}$$

Les données d'indépendance sont pour la probabilité conditionnée par C et pour celle conditionnée par $\overline{C}$:

$$P_C(J_1 \cap J_2) = P_C(J_1) \times P_C(J_2) \qquad \text{et} \qquad P_{\overline{C}}(J_1 \cap J_2) = P_{\overline{C}}(J_1) \times P_{\overline{C}}(J_2)$$

a. On utilise la formule de probabilités totales. La famille $(C, \overline{C})$ est un système complet d'événements donc :

$$P(J_1) = P(C)P_C(J_1) + P(\overline{C})P_{\overline{C}}(J_1)$$

On obtient :

$$P(J_1) = \frac{6}{10} \times \frac{7}{10} + \left(1 - \frac{6}{10}\right) \times \frac{2}{10} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

De même : $P(J_2) = \dfrac{1}{2}$

Ainsi la probabilité que le premier juré déclare l'accusé coupable est de 0,5 et de même pour le second juré.

b. On applique la formule des probabilités totales avec, encore, le système complet d'événements $(C, \overline{C})$:

$$P(J_1 \cap J_2) = P(C)P_C(J_1 \cap J_2) + P(\overline{C})P_{\overline{C}}(J_1 \cap J_2)$$

Par indépendance :

$$P_C(J_1 \cap J_2) = P_C(J_1) \times P_C(J_2) = \frac{7}{10} \times \frac{7}{10} = \frac{49}{100}$$

$$\text{et} \qquad P_{\overline{C}}(J_1 \cap J_2) = P_{\overline{C}}(J_1) \times P_{\overline{C}}(J_2) = \frac{2}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{4}{100}$$

On obtient :

$$P(J_1 \cap J_2) = \frac{6}{10} \times \frac{49}{100} + \frac{4}{10} \times \frac{4}{100} = \frac{31}{100}$$

La probabilité que les deux jurés déclarent l'accusé coupable est donc de 0,31.

c. On constate que :

$$P(J_1) \times P(J_2) = \frac{5}{10} \times \frac{5}{10} = \frac{25}{100} \qquad \text{et} \qquad P(J_1 \cap J_2) = \frac{31}{100}$$

Comme

$$P(J_1 \cap J_2) \neq P(J_1) \times P(J_2)$$

alors les événements J_1 et J_2 ne sont pas indépendants.

d. La probabilité demandée est $P_{J_1 \cap J_2}(\overline{C})$: la probabilité que l'accusé ne soit pas coupable s'il est déclaré coupable par les deux jurés.

La formule d'inversion cause-effet nous donne :

$$P_{J_1 \cap J_2}(\overline{C}) = \frac{P_{\overline{C}}(J_1 \cap J_2) P(\overline{C})}{P(J_1 \cap J_2)}$$

Toutes les valeurs sont connues :

$$P_{J_1 \cap J_2}(\overline{C}) = \frac{\frac{4}{100} \times \frac{4}{10}}{\frac{31}{100}} = \frac{16}{310} = \frac{8}{155} \simeq 0{,}052$$

La probabilité d'une erreur judiciaire en défaveur de l'accusé est donc de 0,052, presque une chance sur vingt.

On peut calculer aussi que la probabilité que l'accusé soit coupable alors que les deux jurés le déclarent non coupable est de $\frac{27}{155} \simeq 0{,}175$, puis que la probabilité d'une erreur judiciaire est de $\frac{7}{31}$ soit approximativement 0,226.

Remarque.

Cet exercice montre que l'on peut calculer des probabilités sans faire référence aucune à l'univers.

Ici on pourrait choisir pour univers l'ensemble :

$$\Omega = \{\mathrm{c}, \mathrm{nc}\}^3$$

Il contient les triplets (a, j_1, j_2) où a, j_1, j_2 prennent les valeurs «c» ou «nc» pour «coupable» et «non coupable», a exprimant la réelle culpabilité de l'accusé alors que j_1 et j_2 expriment les avis des deux jurés.

C'est un ensemble à huit éléments, mais ils ne sont pas équiprobables.

Les événements C, J_1, J_2 ne sont pas élémentaires. Par exemple :

$$C = \{(\mathrm{c}, \mathrm{c}, \mathrm{c}), (\mathrm{c}, \mathrm{c}, \mathrm{nc}), (\mathrm{c}, \mathrm{nc}, \mathrm{c}), (\mathrm{c}, \mathrm{nc}, \mathrm{nc})\}$$

On peut calculer :

$$P(\{(\mathrm{c}, \mathrm{c}, \mathrm{c})\}) = P(C \cap J_1 \cap J_2) = \frac{6 \times 7^2}{1000} \quad \text{et} \quad P(\{(\mathrm{nc}, \mathrm{c}, \mathrm{c})\}) = P(\overline{C} \cap J_1 \cap J_2) = \frac{16}{1000}$$

Ceci confirme que les événements élémentaires ne sont pas équiprobables.

Complément.

On remplace les valeurs de l'énoncé par des données inconnues :

$$P(C) = \lambda \qquad P_C(J_1) = P_C(J_2) = \alpha \qquad P_{\overline{C}}(J_1) = P_{\overline{C}}(J_2) = \beta$$

On suppose toujours que si l'accusé est coupable alors les événements J_1 et J_2 sont indépendants et de même si l'accusé est non-coupable.

Alors on peut démontrer que J_1 et J_2 ne sont pas indépendants si $\lambda \in]0, 1[$.

7 On évalue un test permettant de détecter la présence d'un certain gène chez un patient.

La probabilité que ce test indique l'absence du gène alors qu'il est présent est $\alpha = \frac{1}{500}$.

La probabilité qu'il indique la présence de gène alors qu'il est absent est $\beta = \frac{1}{100}$.

On note λ la proportion de la population possédant le gène recherché.

a. Quelle est la fiabilité du test, c'est-à-dire la probabilité qu'il renvoie le bon résultat ?

b. Une personne est détectée positive au test. Quelle est la probabilité qu'elle possède le gène ?

On note A l'événement «avoir le gène» et B l'événement «être détecté positif».

Les données de l'énoncé se traduisent par :

$$P_A(\overline{B}) = \alpha \qquad P_{\overline{A}}(B) = \beta \qquad P(A) = \lambda$$

a. Soit C l'événement «le test renvoie le bon résultat». La famille $\left(A, \overline{A}\right)$ est un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(C) = P(A)P_A(C) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(C)$$

Si le patient possède le gène alors le test renvoie le bon résultat si et seulement si l'événement B a lieu, et si le patient ne possède pas le gène alors le test renvoie le bon résultat si et seulement si l'événement B n'a pas lieu :

$$P_A(C) = P_A(B) \qquad \text{et} \qquad P_{\overline{A}}(C) = P_{\overline{A}}(\overline{B})$$

On en déduit que

$$P(C) = \lambda(1 - \alpha) + (1 - \lambda)(1 - \beta)$$

Ceci donne

$$P(C) = \lambda(\beta - \alpha) + (1 - \beta) = \frac{495 + 4\lambda}{500}$$

Comme $\lambda \in [0, 1]$ alors cette probabilité est entre $\frac{495}{500} = 0{,}99$ et $\frac{499}{500} = 0{,}998$.

b. On cherche la probabilité $P_B(A)$. La famille $\left(A, \overline{A}\right)$ étant un système complet d'évènements la formule de Bayes donne :

$$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P_A(B)P(A) + P_{\overline{A}}(B)P(\overline{A})}$$

c'est-à-dire :

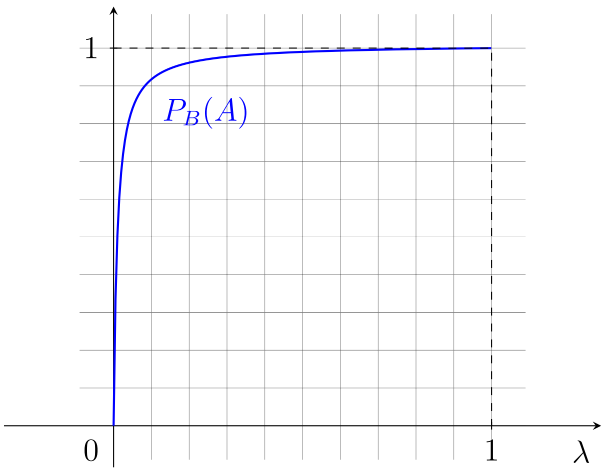
$$P_B(A) = \frac{(1-\alpha)\lambda}{(1-\alpha-\beta)\lambda+\beta} = \frac{499\lambda}{494\lambda+5}$$

On remarque que si $\lambda = 0$ alors $P_B(A) = 0$ et si $\lambda = 1$ alors $P_B(A) = 1$.

On aller plus loin dans l'interpétation de ce résultat en traçant la courbe de la fonction $f : \lambda \mapsto P_B(A)$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

La fonction f est dérivable, de dérivée : $f'(\lambda) = \frac{5\times 499}{(494\lambda+5)^2}$

On obtient une courbe comme la suivante :



La probabilité qu'un patient possède le gène s'il est détecté positif est donc proche de 1, sauf si la fréquence du gène est faible.

8 Alphonse essaie de ne pas fumer tous les jours. S'il ne fume pas un certain jour, alors il a une chance sur trois de fumer le lendemain. Par contre s'il fume un certain jour, alors il n'a qu'une chance sur six de fumer le lendemain.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'événement «Alphonse fume le jour n». On suppose que le jour 0 il a fumé. On note u_n la probabilité de A_n.

a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

b. En déduire l'expression générale de u_n. Interpréter la limite de la suite (u_n).

a. Les données de l'énoncé s'écrivent :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = \frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{6}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. La famille $\left(A_n, \overline{A}_n\right)$ est un système complet d'événements. La formule des probabilités totales montre que :

$$P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{\overline{A}_n}(A_{n+1})P(\overline{A}_n)$$

Comme $u_n = P(A_n)$ alors $P(\overline{A}_n) = 1 - u_n$. On obtient $u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3}(1 - u_n)$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6}u_n$$

b. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique. On note γ le réel tel que :

$$\gamma = \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\gamma$$

Alors $\gamma = \frac{2}{7}$ et par soustraction :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} - \gamma = -\frac{1}{6}(u_n - \gamma)$$

La suite $(u_n - \gamma)$ est géométrique. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n - \gamma = \left(-\frac{1}{6}\right)^n (u_0 - \gamma)$$

Comme Alphonse a fumé le jour 0 alors $u_0 = 1$, et on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \frac{2}{7} + \frac{5}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$$

Comme $\left|-\frac{1}{6}\right| < 1$ alors cette suite converge vers $\frac{2}{7}$.
On peut en déduire qu'au bout d'un temps long à ce régime, le probabilité qu'Alphonse fume un certain jour est de $\frac{2}{7}$, donc en moyenne il fume 2 jours sur 7.

$\boxed{9}$ Aldo, Bob et charlie jouent au frisbee. Lorsque Aldo ou Bob a le frisbee, il l'envoie deux fois sur trois à Charlie, et sinon à l'autre joueur, et lorsque Charlie a le frisbee il l'envoie deux fois sur trois à Aldo et une fois sur trois à Bob.

On note A_n, B_n, C_n les événements «Aldo a le frisbee», «Bob a le frisbee» et «Charlie a le frisbee» à l'instant n.

Soit $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$, $c_n = P(C_n)$, et $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

a. Exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n, et c_n. Déterminer la matrice A telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $X_{n+1} = AX_n$.

b. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}$. Calculer $D = P^{-1}AP$, puis D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer X_n en fonction de X_0, D, P et n. En déduire les termes généraux de a_n, b_n et c_n, sachant qu'Aldo a le frisbee au début du jeu.

Calculer les limites de a_n, b_n et c_n.

a. D'après l'énoncé à tout instant l'un des trois joueurs possède le frisbee. Ceci montre que l'événement $A_n \cup B_n \cup C_n$ est certain.

De plus il est impossible que deux joueurs aient le frisbee en même temps, donc les événements A_n, B_n et C_n sont deux-à-deux incompatibles.

Ainsi la famille (A_n, B_n, C_n) forme un système complet d'événements, que l'on admettra de probabilités non-nulles.

La formule des probabilités totales montre alors que :

$$P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1})P(C_n)$$

De même :

$$\begin{aligned} P(B_{n+1}) &= P_{A_n}(B_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(B_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(B_{n+1})P(C_n) \\ P(C_{n+1}) &= P_{A_n}(C_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(C_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(C_{n+1})P(C_n) \end{aligned}$$

L'énoncé donne les probabilités que chaque joueur ait le frisbee à un instant si chacun des autres joueurs le possède à l'instant précédent, et il montre également que les joueurs ne le gardent jamais. On traduit ceci en terme de probabilités :

$$\begin{array}{lllllllll} P_{A_n}(A_{n+1}) & = & 0 & P_{B_n}(A_{n+1}) & = & \frac{1}{3} & P_{C_n}(A_{n+1}) & = & \frac{2}{3} \\ P_{A_n}(B_{n+1}) & = & \frac{1}{3} & P_{B_n}(B_{n+1}) & = & 0 & P_{C_n}(B_{n+1}) & = & \frac{1}{3} \\ P_{A_n}(C_{n+1}) & = & \frac{2}{3} & P_{B_n}(C_{n+1}) & = & \frac{2}{3} & P_{C_n}(C_{n+1}) & = & 0 \end{array}$$

On obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + \frac{2}{3}c_n \qquad b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n \qquad c_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n$$

Ceci s'exprime matriciellement :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

Puis :

$$X_{n+1} = AX_n \qquad \text{avec} \qquad A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

b. Grâce à l'algorithme du pivot de Gauss-Jordan on calcule P^{-1}, puis par multiplication on obtient D :

$$P^{-1} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 5 & -15 & 5 \\ 8 & 8 & -12 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme la matrice D est diagonale alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad D^n = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{2}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c. On démontre par récurrence que : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = A^n X_0$

Comme $A^0 = I_3$ alors $A_0 X_0 = X_0$, donc la propriété est vraie au rang 0.

Supposons que la propriété est vraie au rang n : $X_n = A^n X_0$. Comme $X_{n+1} = AX_n$ alors $X_{n+1} = A^{n+1}X_0$ donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

Par récurrence la propriété $X_n = A^n X_0$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On sait que $D = P^{-1}AP$. Par multiplication à gauche par P et à droite par P^{-1} ceci donne $A = PDP^{-1}$. Ensuite on écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$$

Puis

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad X_n = PD^nP^{-1}X_0.$$

Au début du jeu Aldo qui a le frisbee, donc $a_0 = 1$ et $b_0 = c_0 = 0$. Ceci donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{2}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 5 & -15 & 5 \\ 8 & 8 & -12 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En multipliant (de droite à gauche c'est plus simple) on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \begin{cases} a_n = \frac{1}{20}\left(7 + 5\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 8\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right) \\ b_n = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) \\ c_n = \frac{2}{5}\left(1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right) \end{cases}$$

Comme $\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$ et $\left|-\frac{2}{3}\right| < 1$ alors les limites sont :

$$\lim a_n = \frac{7}{20} \qquad \lim b_n = \frac{1}{4} = \frac{5}{20} \qquad \lim c_n = \frac{2}{5} = \frac{8}{20}$$

Ces limites sont les probabilités qu'au bout d'un long temps de jeu chacun des joueurs possède le frisbee. On peut aussi les interpréter comme le temps moyen de possession du frisbee de chaque joueur : sur une assez longue partie, Aldo possède le frisbee 35% du temps, Bob le possède 25% de temps et Charlie le possède 40% du temps.

10 Une urne contient 9 boules blanches et 1 boule noire. On effectue des tirages successifs dans l'urne. À chaque tirage, si on obtient une boule blanche alors on la remet dans l'urne et on ajoute une boule blanche de plus.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note B_k l'événement «une boule blanche apparaît au tirage k» et N_k l'événement «la boule noire apparaît pour la première fois au tirage k».

a. Combien a-t-on de boules dans l'urne après $k-1$ tirages si on n'a obtenu que des boules blanches ?

b. Justifier que $N_k = B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap N_k$. En déduire $P(N_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

c. Simplifier la somme $\frac{1}{8+k} - \frac{1}{9+k}$. En déduire la probabilité p_n de $\bigcup\limits_{k=1}^{n} N_k$.

Interpréter la limite de p_n.

a. Si au bout de $k-1$ tirages on n'a obtenu que des boules blanches, alors on a ajouté $k-1$ boules blanches dans l'urne, donc elle contient maintenant $9+(k-1) = 8+k$ boules blanches, et toujours une boule noire, ce qui fait au total $9+k$ boules.

b. L'événement N_k a lieu si et seulement si les tirages 1 à $k-1$ donnent des boules blanches et le tirage k donne une boule noire. Ceci implique que les événements $B_1, \ldots, B_{k-1}$ ont lieu, ce qui donne l'inclusion :

$$N_k \subseteq B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}$$

On en déduit l'égalité :

$$N_k = B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap N_k$$

D'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(N_k) &= P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1\cap B_2}(B_3)\cdots P_{B_1\cap\cdots\cap B_{k-2}}(B_{k-1})P_{B_1\cap\cdots\cap B_{k-1}}(N_k) \\ &= \left(\prod_{j=1}^{k-1} P_{B_1\cap\cdots\cap B_{j-1}}(B_j)\right) P_{B_1\cap\cdots\cap B_{k-1}}(N_k) \end{aligned}$$

Pour tout $j = 1, \ldots, k-1$ l'événement $B_1 \cap \cdots \cap B_{j-1}$ signifie que les $j-1$ premiers tirages ont donné une boule blanche. D'après la première question dans ce cas l'urne contient $9+j$ boules dont $8+j$ boules blanches et une seule boule noire, donc :

$$P_{B_1\cap\cdots\cap B_{j-1}}(B_j) = \frac{8+j}{9+j} \qquad \text{et} \qquad P_{B_1\cap\cdots\cap B_{k-1}}(N_k) = \frac{1}{9+k}$$

Ceci donne :

$$P(N_k) = \left(\prod_{j=1}^{k-1} \frac{8+j}{9+j}\right) \frac{1}{9+k} = \frac{\prod\limits_{j=1}^{k-1} (8+j)}{\prod\limits_{j=1}^{k} (9+j)}$$

Le changement d'indice $i = j+1$ dans le produit du dénominateur donne :

$$P(N_k) = \frac{\prod\limits_{j=1}^{k-1} (8+j)}{\prod\limits_{i=2}^{k+1} (8+i)} = \frac{9}{(8+k)(9+k)}$$

c. On calcule :

$$\frac{1}{8+k} - \frac{1}{9+k} = \frac{1}{(8+k)(9+k)}$$

Les événements N_k, pour k allant de 1 à n sont deux-à-deux incompatibles car la boule noire ne peut arriver pour la première fois à deux tirages différents. L'additivité de la probabilité donne alors :

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} N_k) = \sum_{k=1}^{n} P(N_k)$$

Ceci donne :

$$p_n = \sum_{k=1}^{n} 9\left(\frac{1}{8+k} - \frac{1}{9+k}\right) = 9\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{8+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{9+k}\right)$$

Il s'agit d'une somme télescopique. En appliquant le changement d'indice $\ell = k+1$ dans la seconde somme on obtient :

$$p_n = 9\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{8+k} - \sum_{\ell=2}^{n+1} \frac{1}{8+\ell}\right) = 9\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{9+n}\right) = \frac{n}{9+n}$$

Par équivalence en $+\infty$: $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 1$

Ceci montre que pour un grand nombre de tirages la probabilité d'obtenir la boule noire est presque égale à 1, donc on est «presque sûr» de l'avoir au bout d'un certain temps.

11 Aldo et Bob jouent avec un dé. À chaque tour Aldo jette le dé, puis Bob jette le dé. Le premier qui obtient 6 gagne la partie.

On utilisera les événements X_k : «Aldo obtient 6 lors de son k-ème tirage» et Y_k : «Bob obtient 6 lors de son k-ème tirage».

a. Soit k un entier naturel non-nul. Calculer la probabilité des événements A_k : «Aldo gagne la partie au k-ème tour» et B_k : «Bob gagne la partie au k-ème tour».

b. Quelle est la probabilité qu'Aldo gagne la partie durant les n premiers tours ? Que Bob gagne la partie durant les n premiers tours ? Interpréter les limites de ces deux probabilités lorsque n tend vers $+\infty$.

c. On note A l'événement «Aldo gagne la partie» et B l'événement «Bob gagne la partie». On admet que $P(A \cup B) = 1$.
Justifier que $P_{\overline{X}_1}(B) = P(A)$, et en déduire les valeurs de $P(A)$ et de $P(B)$.

a. L'événement A_k a lieu si et seulement si Aldo n'obtient pas de 6 à ces tirages 1 à $k-1$, Bob n'obtient pas de 6 à ses tirages 1 à $k-1$, et Aldo obtient un 6 à son tirage k. Ceci s'écrit :

$$A_k = \overline{X}_1 \cap \overline{Y}_1 \cap \overline{X}_2 \cap \cdots \cap \overline{Y}_{k-1} \cap X_k = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \left(\overline{X}_i \cap \overline{Y}_i \right) \right) \cap X_k$$

Le numéro obtenu à un tirage n'influence pas les autres tirages, donc les événements de cette intersection sont mutuellement indépendants. Ainsi :

$$P(A_k) = \left(\prod_{i=1}^{k-1} \left(P(\overline{X}_i) \times P(\overline{Y}_i) \right) \right) \times P(X_k)$$

Le dé est supposé parfaitement équilibré, si bien que : $\forall i \in \mathbb{N} \quad P(X_i) = P(Y_i) = \frac{1}{6}$
On obtient donc :

$$P(A_k) = \left(\frac{5}{6} \right)^{2(k-1)} \frac{1}{6}$$

L'événement B_k a lieu si Aldo et Bob n'obtiennent pas de 6 à leurs tirages 1 à $k-1$, Aldo n'obtient pas de 6 à son tirage k, et Bob obtient un 6 à son tirage k :

$$B_k = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \left(\overline{X}_i \cap \overline{Y}_i \right) \right) \cap \overline{X}_k \cap Y_k$$

On en déduit, par indépendance mutuelle :

$$P(B_k) = \left(\prod_{i=1}^{k-1} \left(P(\overline{X}_i) \times P(\overline{Y}_i) \right) \right) \times P(\overline{X}_k) \times P(Y_k) = \left(\frac{5}{6} \right)^{2(k-1)} \frac{5}{36}$$

b. On note S_n l'événement «Aldo gagne lors de l'un de ses n premiers tirages».
L'événement S_n a lieu si et seulement si l'un des événements $A_1, \ldots, A_n$ a lieu, donc :

$$S_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

Les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont incompatibles car Aldo ne peut obtenir son premier 6 lors de deux tirages différents. Par additivité :

$$P(S_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

La formule obtenue dans la question précédente donne :

$$P(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\frac{5}{6} \right)^{2(k-1)} \frac{1}{6} \right] = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{25}{36} \right)^{k-1}$$

Il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{25}{36}$. On calcule alors :

$$P(S_n) = \frac{6}{11} \left(1 - \left(\frac{25}{36} \right)^n \right)$$

On définit ensuite T_n : «Bob gagne lors de l'un de ses n premiers tirages». Alors :

$$T_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$$

Les B_k sont incompatibles. Par additivité :

$$P(T_n) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k) = \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\frac{5}{6}\right)^{2(k-1)} \frac{5}{36}\right]$$

On obtient :

$$P(T_n) = \frac{5}{11}\left(1 - \left(\frac{25}{36}\right)^n\right)$$

Comme $\left|\frac{25}{36}\right| < 1$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} P(S_n) = \frac{6}{11} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} P(T_n) = \frac{5}{11}$$

La limite de l'événement S_n lorsque n tend vers $+\infty$ peut s'interpréter comme l'événement «Aldo gagne la partie», et celle de l'événement T_n comme «Bob gagne la partie». Ainsi la probabilité qu'Aldo gagne est de $\frac{6}{11}$ alors que celle que Bob gagne est de $\frac{5}{11}$. Cette différence s'explique par le fait qu'Aldo est avantagé puisqu'il commence à jeter le dé.

c. Si l'événement $\overline{X}_1$ a lieu alors Aldo n'a pas obtenu 6 à son premier tirage. On peut considérer que la partie recommence mais que cette fois c'est Bob qui entame le jeu. La probabilité que Bob gagne maintenant est donc égale à celle qu'avait Aldo de gagner au début. Ainsi $P_{\overline{X}_1}(B) = P(A)$.

Ceci s'écrit : $\dfrac{P(\overline{X}_1 \cap B)}{P(\overline{X}_1)} = P(A)$

Si Bob gagne alors Aldo n'a pas obtenu de 6 à son premier tirage : l'événement B implique l'événement $\overline{X}_1$ et donc $B \subseteq \overline{X}_1$ puis $\overline{X}_1 \cap B = B$.

De plus les événements A et B sont incompatibles : comme les joueurs jouent à tour de rôle alors ils ne peuvent gagner simultanément. Ainsi par additivité $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. On a admis que $P(A \cup B) = 1$ donc $P(B) = 1 - P(A)$.

On en déduit :

$$P(A) = \frac{1 - P(A)}{P(\overline{X}_1)}$$

On sait que $P(\overline{X}_1) = \frac{5}{6}$. L'équation ci-dessus permet de calculer $P(A) = \frac{6}{11}$.
Comme $P(B) = 1 - P(A)$ alors $P(B) = \frac{5}{11}$.
On retrouve les résultats de la question précédente :

$$P(A) = \frac{6}{11} \qquad \text{et} \qquad P(B) = \frac{5}{11}$$

12 Une urne contient 1 jeton marqué 1, 2 jetons marqués 2, et ainsi de suite jusqu'à n jetons marqués n. On tire un jeton dans l'urne. Soit X la variable aléatoire égale au numéro obtenu.

a. Déterminer la loi de X et vérifier que l'on obtient bien une loi de probabilité.

b. Calculer l'espérance et la variance de X.

c. On suppose que $n = 25$, et on note $m = E(X)$, $\sigma = \sigma(X)$. Quelle est la probabilité que X soit dans l'intervalle $[m - \sigma, m + \sigma]$? Dans l'intervalle $[m - 2\sigma, m + 2\sigma]$?

a. L'urne contient $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ jetons.
La variable aléatoire X est le numéro du jeton que l'on pioche, donc elle peut prendre toutes les valeurs entre 1 et n :

$$X(\Omega) = \{1, \dots, n\}$$

Pour tout k allant de 1 à n il existe k jetons numérotés k et les jetons sont supposés indiscernables, donc équiprobables, et ainsi :

$$\forall k = 1, \dots, n \qquad P(X = k) = \frac{k}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2k}{n(n+1)}$$

Vérifions que l'on a bien une loi de probabilité.

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(X = k) = \sum_{k=1}^{n} \tfrac{2k}{n(n+1)} = \tfrac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k = 1$

(ii) $\forall k \in \{1, \dots, n\} \qquad P(X = k) \geqslant 0$

Les $P(X = k)$ sont positifs et leur somme est égale à 1 donc ils sont tous inférieurs ou égaux à 1 et finalement :

$\forall k \in \{1, \dots, n\} \qquad 0 \leqslant P(X = k) \leqslant 1$

On a donc bien obtenu une loi de probabilité.

b. On calcule l'espérance de X :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k^2}{n(n+1)} \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2}{n(n+1)} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n+1}{3} \end{aligned}$$

On remarque que pour $n = 1$ on obtient $E(X) = 1$, effectivement dans ce cas on a un unique jeton numéroté 1, donc X suit la loi constante égale à 1, qui admet 1 pour espérance.
Sinon cette espérance est de l'ordre de $\frac{2}{3}n$. Effectivement l'urne contient plus de jetons portant des grands numéros que de jetons portant des petits numéros, donc la moyenne est plus proche de n que de 1.

On calcule ensuite l'espérance de X^2 :

$$\begin{aligned}E(X^2) &= \sum_{k=1}^{n} k^2 P(X=k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k^3}{n(n+1)}\\ &= \frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{2}{n(n+1)}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

On en déduit la variance de X grâce à la formule de König-Huyghens :

$$\begin{aligned}V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = \frac{n(n+1)}{2} - \left(\frac{2n+1}{3}\right)^2\\ &= \frac{9n(n+1) - 2(2n+1)^2}{18} = \frac{9n^2+9n-8n^2-8n-2}{18} = \frac{n^2+n-2}{18}\end{aligned}$$

Cette variance est nulle pour $n=1$. On peut factoriser :

$$V(X) = \frac{(n-1)(n+2)}{18}$$

Le fait qu'elle soit nulle pour $n=1$ était prévisible, car si $n=1$ alors X suit la loi constante égale à 1 donc elle est de variance nulle.

c. Si $n=25$ alors :

$$E(X) = \frac{51}{3} = 17 \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{24\times 27}{18} = 36$$

On en déduit $\sigma(X) = 6$, puis

$$[m-\sigma, m+\sigma] = [11, 23] \qquad \text{et} \qquad [m-2\sigma, m+2\sigma] = [5, 29]$$

On calcule donc :

$$P(11 \leqslant X \leqslant 23) = \sum_{k=11}^{23} P(X=k) = \sum_{k=11}^{23} \frac{k}{25\times 13}$$

On pourrait poursuivre par :

$$\sum_{k=11}^{23} k = \sum_{k=1}^{23} k - \sum_{k=1}^{10} k = \frac{23\times 24}{2} - \frac{10\times 11}{2}$$

Mais le calcul n'est pas simple.
Il est plus facile de changer d'indice, $i = k-10$:

$$P(11 \leqslant X \leqslant 23) = \frac{1}{25\times 13}\sum_{i=1}^{13}(i+10) = \frac{1}{25\times 13}\left(\frac{13\times 14}{2} + 10\times 13\right) = \frac{17}{25}$$

On obtient donc :

$$p_1 = P(m-\sigma \leqslant x \leqslant m+\sigma) = \frac{17}{25} = 0{,}68$$

Il est effectivement connu que cette probabilité est aux alentours de 65% en général.

Pour la probabilité p_2 il faut veiller à ce que X ne peut prendre de valeurs supérieures à 25 :

$$P(5 \leqslant X \leqslant 29) = \sum_{k=5}^{29} P(X = k) = \sum_{k=5}^{25} P(X = k) \qquad \text{car} \quad X(\Omega) = \{1, \ldots, 25\}$$

On calcule :

$$\begin{aligned} P(5 \leqslant X \leqslant 29) &= \sum_{k=5}^{25} \frac{k}{25 \times 13} = \frac{1}{25 \times 13} \sum_{i=1}^{21} (i+4) \\ &= \frac{1}{25 \times 13} \left(\frac{21 \times 22}{2} + 21 \times 4 \right) = \frac{21 \times 15}{25 \times 13} = \frac{63}{65} \end{aligned}$$

On a obtenu :

$$p_2 = P(m - 2\sigma \leqslant x \leqslant m + 2\sigma) = \frac{63}{65} \simeq 0{,}969$$

Usuellement cette probabilité est aux alentours de 95%.

$\boxed{\textbf{13}}$ Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, avec $n \geqslant 1$. On tire une boule de l'urne, on la remet puis on en tire une seconde. On note X la variable aléatoire égale au plus petit numéro obtenu.

a. Déterminer $X(\Omega)$, puis pour tout $k \in X(\Omega)$ la probabilité $P(X > k)$.

b. En déduire la loi de X. Vérifier que l'on obtient bien une loi de probabilité.

c. Calculer l'espérance de X.

d. Répondre de nouveau aux questions précédentes en supposant que $n \geqslant 2$ et que l'on tire les deux boules sans remise.

a. Les boules sont numérotées de 1 à n donc le plus petit numéro obtenu peut aller de 1 à n, et donc :

$$X(\Omega) = \{1, \ldots, n\}$$

On choisit pour modéliser l'expérience l'univers $\Omega = \{1, \ldots, n\}^2$, c'est-à-dire l'ensemble des listes de deux entiers compris entre 1 et n.

Les boules sont supposées indiscernables donc cet univers est muni de la probabilité uniforme.

Soit $k \in X(\Omega)$. L'événement $(X = k)$ a lieu si et seulement si les deux numéros obtenus sont strictement supérieurs à k, c'est-à-dire s'il appartiennent à l'ensemble $\{k+1, \ldots, n\}$. Cet ensemble contient $n - k$ éléments, donc par équiprobabilité :

$$P(X > k) = \frac{\operatorname{Card}(X > k)}{\operatorname{Card} \Omega} = \frac{(n-k)^2}{n^2}$$

On peut remarquer que cette formule est valable aussi pour $k = 0$.

b. Soit $k \in X(\Omega)$. L'événement $(X = k)$ a lieu si et seulement si l'événement $(X > k-1)$ a lieu mais pas l'événement $(X > k)$, donc :

$$P(X = k) = P(X > k-1) - P(X > k)$$

Plus précisément :

$$\begin{array}{rl} \text{Comme} & (X = k) = (X > k-1) \setminus (X > k) \\ \text{alors} & P(X = k) = P(X > k-1) - P((X > k-1) \cap (X > k)) \\ & \qquad\quad\; = P(X > k-1) - P(X > k) \end{array}$$

D'après la question précédente :

$$\forall k = 1, \ldots, n \qquad P(X = k) = \frac{(n-(k-1))^2}{n^2} - \frac{(n-k)^2}{n^2} = \frac{2n-2k+1}{n^2}$$

On peut vérifier par exemple : $P(X = n) = \frac{1}{n^2}$. Effectivement le minimum est égal à n si et seulement si on a obtenu le couple (n, n), lequel forme un événement élémentaire, et donc admet $\frac{1}{n^2}$ pour probabilité.

c. Calcul de l'espérance de X :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{n} k\frac{2n-2k+1}{n^2} \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(2nk + k - 2k^2) = \frac{1}{n^2}\left((2n+1)\sum_{k=1}^{n} k - 2\sum_{k=1}^{n} k^2\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\left(\frac{(2n+1)n(n+1)}{2} - 2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{n}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n} \end{aligned}$$

On peut remarquer que pour $n = 1$ on obtient $E(X) = 1$, ce qui est cohérent puisque dans ce cas le sac contient une et une seule boule numérotée 1.

d. Si on pioche deux boules sans remise alors le minimum est un entier compris entre 1 et $n-1$. En effet on ne peut avoir deux fois la boule numéro n, au maximum on pioche la boule n et la boule $n-1$ et donc le minimum est $n-1$. Ainsi :

$$X(\Omega) = \{1, \ldots, n-1\}$$

L'univers Ω contient maintenant les parties à deux éléments de l'ensemble des n numéros, il est donc de cardinal $\binom{n}{2}$, et il est muni de la probabilité uniforme.

L'événement $(X > k)$ a lieu si et seulement si on pioche deux boules parmi les $(n-k)$ boules portant les numéros $(k+1)$ à n, donc il est de cardinal $\binom{n-k}{2}$.

Par équiprobabilité :

$$P(X > k) = \frac{\binom{n-k}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)}$$

On peut remarque que cette formule est valable aussi pour $k = 0$.
On en déduit :

$$\forall k \in \{1, \dots, n-1\} \qquad \begin{aligned} P(X = k) &= P(X > k-1) - P(X > k) \\ &= \frac{(n-k+1)(n-k)}{n(n-1)} - \frac{(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)} \\ &= \frac{2(n-k)}{n(n-1)} \end{aligned}$$

On remarque que cette formule est valable aussi pour $k = n$, puisque $P(X = n) = 0$.
On calcule l'espérance de X :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{n-1} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{n-1} k\frac{2(n-k)}{n(n-1)} \\ &= \frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}(nk - k^2) = \frac{2}{n(n-1)}\left(n\sum_{k=1}^{n-1}k - \sum_{k=1}^{n-1}k^2\right) \\ &= \frac{2}{n(n-1)}\left(n\frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right) = \frac{n+1}{3} \end{aligned}$$

Si $n = 2$ alors cette espérance est égale à 1. Il s'agit du cas minimal, où l'urne ne contient que les boules numérotées 1 et 2. On pioche alors les deux boules, et donc le minimum est égal à 1, la loi de X est certaine.
On remarque que cette espérance est équivalente à $\frac{n}{3}$ lorsque n tend vers $+\infty$. Dans le cas du tirage avec remise on avait obtenu $E(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$ donc $E(X) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{2n^2}{6n} = \frac{n}{3}$.
En effet, si le nombre de boule est très grand alors le fait qu'il y ait remise ou non tend à perdre de son importance puisqu'on a peu de chances de piocher une boule déjà obtenue. Les deux espérances sont donc équivalentes lorsque n tend vers $+\infty$.