

Corrigé du T. D. C1 Probabilités

① Soit A, B, C trois événements. Déterminer la probabilité de $A \cup B \cup C$ en fonction des probabilités des événements A, B, C et de leurs intersections.

On applique la formule :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (1)$$

En remplaçant A par $A \cup B$ et B par C :

$$P((A \cup B) \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C)$$

Par distributivité de l'intersection par rapport à l'union :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cap C) \cup (B \cap C))$$

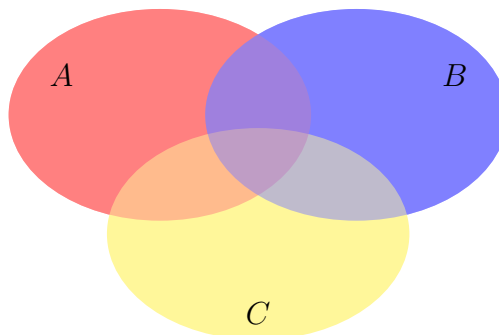
On applique deux fois la formule (1) :

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) \\ &\quad - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P((A \cap C) \cap (B \cap C)) \end{aligned}$$

Comme $(A \cap C) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$ on en déduit :

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &\quad - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ &\quad + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

On peut comprendre cette formule grâce au schéma suivant :



On ajoute les probabilités de A, B, C , puis on supprime celles de $A \cap B, A \cap C$ et $B \cap C$ qui ont été comptées deux fois, puis on ajoute celle de $A \cap B \cap C$, qui a été comptée trois fois puis enlevée trois fois.

On peut extrapoler la formule pour quatre ensembles :

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C \cup D) &= P(A) + P(B) + P(C) + P(D) \\ &\quad - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(A \cap D) - P(B \cap C) - P(B \cap D) - P(C \cap D) \\ &\quad + P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap D) + P(A \cap C \cap D) + P(B \cap C \cap D) \\ &\quad - P(A \cap B \cap C \cap D) \end{aligned}$$

On voit apparaître les coefficients du binôme.

La formule générale est la *formule du crible*, due à Henri Poincaré (1854 – 1912), valable pour n ensembles, où $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{p=1}^n (-1)^{p-1} \left(\sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_p \leq n} P(A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_p}) \right)$$

② Un dé est truqué : la probabilité que l'entier $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$ apparaisse est proportionnelle à k .

Donner un espace probabilisé modélisant le lancer de ce dé, puis calculer la probabilité qu'on obtienne un résultat pair.

On choisit l'univers $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket$.

On définit les événements A_k : «obtenir k » pour k allant de 1 à 6.

Selon l'énoncé la probabilité de l'événement A_k est proportionnelle à k . Il existe donc un réel λ tel que :

$$\forall k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket \quad P(A_k) = \lambda k$$

Comme la famille $(A_k)_{1 \leq k \leq 6}$ est un système complet d'événements alors :

$$\sum_{k=1}^6 P(A_k) = 1$$

Ceci donne $\sum_{k=1}^6 (\lambda k) = 1$, et comme $\sum_{k=1}^6 k = \frac{6 \times 7}{2} = 21$ on en déduit $\lambda = \frac{1}{21}$.

Les probabilités des événements élémentaires sont donc :

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

Soit A l'événement : «obtenir un numéro pair».

Cet événement a lieu si et seulement si on obtient 2, 4, ou 6, donc : $A = A_2 \cup A_4 \cup A_6$

Comme les A_k sont incompatibles alors :

$$P(A) = P(A_2) + P(A_4) + P(A_6)$$

On obtient $P(A) = \frac{4}{7}$, la probabilité d'obtenir un nombre pair avec ce dé est de $\frac{4}{7}$.

③ On possède une urne contenant 10 boules numérotées de 1 à 10.

Trois fois de suite on pioche une boule, on note le numéro obtenu et on garde la boule.

a. Donner un espace probabilisé modélisant cette expérience.

b. Calculer la probabilité des événements :

- B : «On n'obtient jamais le 10.»
- C : «On obtient au moins une fois le 10.»
- D : «On obtient le 10 lors du troisième tirage.»

a. On choisit pour univers Ω l'ensemble des triplets d'entiers distincts compris entre 1 et 10 :

$$\Omega = \left\{ (a, b, c) \in \llbracket 1, 10 \rrbracket^3 \mid a, b, c \text{ distincts} \right\}$$

On admet que chaque boule a autant de chances d'être piochée que les autres. Alors chaque triplet de Ω a autant de chance d'arriver que les autres, et donc on peut munir Ω de la probabilité uniforme.

b. Les éléments élémentaires de Ω étant équiprobables, on peut appliquer la formule suivante pour tout événement A :

$$P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$$

On compte d'abord le nombre d'éléments de Ω .

Pour le premier numéro 10 nombres sont possibles. Une fois que ce numéro est pioché, pour le second il reste 9 numéros possibles, et pour le troisième il en reste alors 8.

Ainsi Ω possède $10 \times 9 \times 8 = 720$ éléments.

La probabilité d'un événement élémentaire, comme par exemple «obtenir (6, 3, 7)», est donc de $\frac{1}{720}$.

Calculons maintenant les probabilités des événements B , C , D .

- L'événement B contient les triplets de Ω où le 10 n'apparaît pas. Il contient donc les triplets de trois nombres distincts parmi $\llbracket 1, 9 \rrbracket$:

$$B = \left\{ (a, b, c) \in \llbracket 1, 9 \rrbracket^3 \mid a, b, c \text{ distincts} \right\}$$

Son cardinal est : $\text{Card } B = 9 \times 8 \times 7$

On en déduit par équiprobabilité :

$$P(B) = \frac{\text{Card } B}{\text{Card } \Omega} = \frac{9 \times 8 \times 7}{10 \times 9 \times 8} = \frac{7}{10}$$

- L'événement contraire de C est : «ne jamais obtenir le 10». Il s'agit de l'événement B , donc $C = \overline{B}$.

On en déduit :

$$P(C) = 1 - P(B) = \frac{3}{10}$$

- L'événement D contient les triplets de trois nombres distincts entre 1 et 10 où le troisième est le 10 :

$$D = \left\{ (a, b, 10) \in \llbracket 1, 10 \rrbracket^3 \mid a, b \text{ distincts} \right\}$$

Le a peut prendre 9 valeurs distinctes, puisque le 10 est en position 3. Pour chaque valeur de a , 8 valeurs sont encore possibles pour b .

On en déduit : $\text{Card } D = 9 \times 8$

Par équiprobabilité :

$$P(D) = \frac{\text{Card } D}{\text{Card } \Omega} = \frac{9 \times 8}{10 \times 9 \times 8} = \frac{1}{10}$$

Évidemment, ceci est logique : en troisième position le 10 a autant de chances que les autres numéros d'apparaître.

④ On jette trois dés. On note X la variable aléatoire égale à la somme des trois dés. Calculer $P(X = k)$ pour $k = 2, 3, 4, 5, 6, 10$.

Comme chaque dés donne une valeur comprise entre 1 et 6, la variable aléatoire X prend ses valeurs dans l'ensemble $X(\Omega) = \llbracket 3, 18 \rrbracket$.

Pour modéliser cette expérience on choisit l'univers Ω contenant les triplets d'entiers compris entre 1 et 6 :

$$\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^3 = \{(a, b, c) \mid 1 \leq a, b, c \leq 6\}$$

Les cardinal de cet ensemble est : $\text{Card } \Omega = 6^3 = 216$

Chaque numéro a autant de chance d'arriver que les autres sur chaque dé, donc tous les triplets sont équiprobables, *i.e.*, Ω est muni de la probabilité uniforme.

On explicite maintenant les événements $(X = k)$ demandés pour calculer leurs probabilités.

L'événement $(X = 2)$ est impossible donc $P(A_2) = 0$.

Comme $(X = 3) = \{(1, 1, 1)\}$ alors par équiprobabilité $P(X = 3) = \frac{1}{216}$.

Comme $(X = 4) = \{(1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)\}$ alors $P(X = 4) = \frac{3}{216} = \frac{1}{72}$.

Pour l'événement $(X = 5)$ on obtient les trois permutations de $(1, 1, 3)$ et les trois permutations de $(1, 2, 2)$, donc six possibilités. Ainsi $P(X = 5) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$.

Pour l'événement $(X = 6)$ on obtient $(2, 2, 2)$, les trois permutations de $(1, 1, 4)$ et les six permutations de $(1, 2, 3)$, donc dix possibilités. Ainsi $P(X = 6) = \frac{10}{216} = \frac{5}{108}$.

Enfin pour l'événement $(X = 10)$ on écrit :

$(1, 3, 6)$	donne	6	permutations
$(2, 2, 6)$		3	permutations
$(1, 4, 5)$		6	permutations
$(2, 3, 5)$		6	permutations
$(2, 4, 4)$		3	permutations
$(3, 3, 4)$		3	permutations.

Ainsi 27 triplets conviennent, et donc $P(X = 10) = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}$.

La suite pour k allant de 3 à 10 est 1, 3, 6, 10, 15, 21, 25, 27 sur 216. Pour k allant de 11 à 18 c'est la suite inverse.

On peut même démontrer que :

$$\forall k = 1, \dots, 20 \quad P(X = k) = \begin{cases} \frac{(k-1)(k-2)}{2 \times 6^3} & \text{si } 1 \leq k \leq 8 \\ -\frac{k^2 - 21k + 83}{6^3} & \text{si } 7 \leq k \leq 14 \\ \frac{(20-k)(19-k)}{2 \times 6^3} & \text{si } 13 \leq k \leq 20. \end{cases}$$

⑤ Soit $k \in \llbracket 0, 26 \rrbracket$. On pioche k lettres une par une dans un sac contenant les 26 lettres de l'alphabet.

a. Décrire l'univers modélisant cette expérience. Quel est son cardinal ?

On note S_k l'événement : «le S apparaît lors de l'un des k tirages» et T_k l'événement «le S apparaît lors du k -ème tirage».

b. Calculer la probabilité de S_k .

Exprimer T_k en fonction de S_k et S_{k-1} et en déduire sa probabilité.

c. Autre méthode : Calculer directement la probabilité de T_k .

Exprimer S_k en fonction des T_i et en déduire sa probabilité.

a. L'univers Ω est l'ensemble des listes de k éléments distincts de l'alphabet, donc :

$$\text{Card } \Omega = \frac{26!}{(26-k)!}$$

En effet 26 lettres sont possibles pour la première, puis 25 pour la seconde, etc jusqu'à $(26 - (k - 1)) = 27 - k$ pour la k -ème, donc :

$$\text{Card } \Omega = 26 \times 25 \times \dots \times (27 - k) = \frac{26!}{(26-k)!}$$

On suppose que les lettres sont indiscernables au toucher, et donc les éléments de Ω sont équiprobables.

b. L'événement S_k est l'ensemble des listes contenant k éléments distincts dont le S.

Ce S peut être placé en k positions différentes. Ensuite pour les $k - 1$ lettres restantes, il faut compter le nombre de listes de $k - 1$ éléments distincts d'un ensemble à 25 éléments, donc :

$$\text{Card } S_k = k \times \frac{25!}{(25 - (k - 1))!} = \frac{k 25!}{(26 - k)!}$$

Par équiprobabilité :

$$P(S_k) = \frac{\text{Card } S_k}{\text{Card } \Omega} = \frac{k \times 25! \times (26 - k)!}{(26 - k)! \times 26!} = \frac{k}{26}$$

En piochant k lettres dans le sac, la probabilité d'obtenir le S est $\frac{k}{26}$.

Effectivement si $k = 0$ alors on ne peut obtenir le S et si $k = 26$ alors on est certain de l'obtenir.

L'événement T_k signifie que l'on obtient le S dans les k premiers tirages mais pas dans les $(k - 1)$ premiers tirages : $T_k = S_k \setminus S_{k-1}$.

On en déduit : $P(T_k) = P(S_k) - P(S_k \cap S_{k-1})$

Si l'événement S_{k-1} a lieu alors le S est obtenu lors des $(k - 1)$ premiers tirages, donc *a fortiori* le S est obtenu lors des k premiers tirages. Ainsi $S_{k-1} \subseteq S_k$, puis $S_{k-1} \cap S_k = S_{k-1}$.

On peut donc calculer :

$$P(T_k) = P(S_k) - P(S_{k-1}) = \frac{k}{26} - \frac{k-1}{26} = \frac{1}{26}$$

La probabilité d'obtenir le S lors du tirage k est de $\frac{1}{26}$.

Ceci semble logique, le S a autant de chance d'arriver que toutes les autres lettres.

- c. L'événement T_k contient les listes de k éléments distincts de l'alphabet dont le S en position k .

Ce S étant placé, il reste à compléter la liste avec une liste de $(k - 1)$ éléments distincts parmi un ensemble à 25 éléments, donc :

$$\text{Card } T_k = \frac{25!}{(25 - (k - 1))!} = \frac{25!}{(26 - k)!}$$

Par équiprobabilité :

$$P(T_k) = \frac{\text{Card } T_k}{\text{Card } \Omega} = \frac{25! \times (26 - k)!}{(26 - k)! \times 26!} = \frac{1}{26}$$

On retrouve bien le résultat de la question précédente.

L'événement S_k signifie que le S est obtenu lors de l'un des tirages 1 à k , donc que l'un des événements T_1, T_2, \dots, T_k a lieu :

$$S_k = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_k = \bigcup_{i=1}^k T_i$$

Si le S est pioché à un tirage i alors il ne peut être pioché à un autre tirage puisque les lettres ne sont pas remises dans le sac après chaque tirage. Ceci justifie que les événements T_i sont incompatibles : si $i \neq j$ alors $T_i \cap T_j = \emptyset$.

On en déduit, par additivité :

$$P(S_k) = \sum_{i=1}^k P(T_i)$$

La question précédente donne $P(S_k) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{26} = \frac{k}{26}$.

On retrouve bien le résultat de la question b.

⑥ Une urne contient une boule noire, deux boules rouges et sept boules blanches.

- On pioche simultanément n boules de l'urne ($0 \leq n \leq 10$). Quelle est la probabilité d'obtenir la boule noire ? Au moins une rouge ?
- On pioche n fois de suite une boule de l'urne ($n \in \mathbb{N}$) puis on la remet dans l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir la boule noire ? Au moins une rouge ?

- a. L'univers Ω est l'ensemble des parties à n éléments de l'urne, laquelle contient 10 boules. Donc Ω est de cardinal $\binom{10}{n}$. De plus on suppose que toutes les boules sont identiques (à part leur couleur) et donc les éléments de Ω sont équiprobables.

On définit les événements :

- A : «On obtient la boule noire.»
- B : «On obtient au moins une boule rouge.»

Alors A est l'ensemble des parties contenant la boule noire et $n-1$ boules parmi les 9 autres boules, donc A est de cardinal $\binom{9}{n-1}$. Par équiprobabilité :

$$P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega} = \frac{\binom{9}{n-1}}{\binom{10}{n}} = \frac{9!}{(n-1)!(10-n)!} \times \frac{n!(10-n)!}{10!} = \frac{n}{10}$$

La probabilité d'obtenir la boule noire est donc de $\frac{n}{10}$.

Si $n = 0$ alors cette probabilité est nulle car on ne pioche pas de boules.

Si $n = 1$ alors cette probabilité est de $\frac{1}{10}$, ce qui se comprend bien, on pioche une boule dans une urne contenant 10 boules dont une seule noire.

Si $n = 10$ alors cette probabilité est égale à 1 car on pioche toutes les boules.

Pour calculer la probabilité de B on considère son événement contraire \bar{B} : «on n'obtient pas de boule rouge». Ceci signifie que l'on obtient n boules parmi les 8 boules qui ne sont pas rouges, donc B est de cardinal $\binom{8}{n}$. Par équiprobabilité :

$$P(\bar{B}) = \frac{\text{Card } \bar{B}}{\text{Card } \Omega} = \frac{\binom{8}{n}}{\binom{10}{n}} = \frac{8!}{n!(8-n)!} \times \frac{n!(10-n)!}{10!} = \frac{(10-n)(9-n)}{90}$$

On en déduit :

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = \frac{90 - ((10-n)(9-n))}{90} = \frac{n^2 - 19n}{90} = \frac{n(19-n)}{90}$$

La probabilité d'obtenir au moins une boule rouge est donc de $\frac{n(19-n)}{90}$.

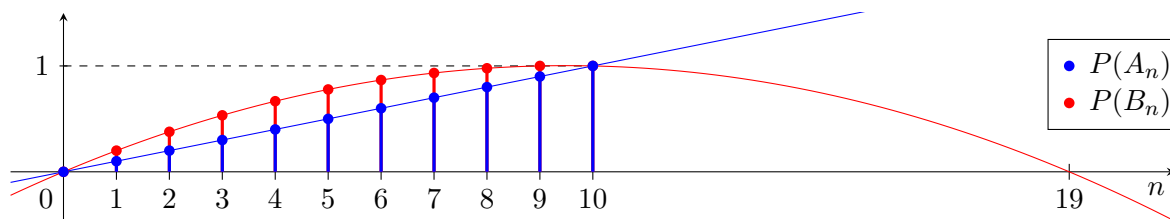
Si $n = 0$ alors cette probabilité est nulle car on ne pioche pas de boules.

Si $n = 1$ alors cette probabilité est de $\frac{18}{90} = \frac{2}{10}$, ce qui se comprend bien, on pioche une boule dans une urne contenant 10 boules dont deux rouges.

Si $n = 10$ alors cette probabilité est égale à $\frac{10 \times 9}{90}$ donc à 1. En effet on pioche toutes les boules donc on est certain d'en obtenir au moins une rouge.

Si $n = 9$ alors cette probabilité est égale à $\frac{9 \times 10}{90}$ donc à 1. En effet, on pioche 9 boules dans l'urne qui en contient 10, mais deux boules sont rouges donc on est certain d'avoir au moins une rouge.

On peut représenter ces probabilités sur un graphique. La probabilité de A est sur la droite d'équation $y = \frac{x}{10}$, celle de B est sur la parabole d'équation $\frac{x(19-x)}{90}$. Cette parabole est orientée vers le bas, elle coupe l'axe des abscisses aux points 0 et 19.



- b. L'univers Ω contient maintenant les listes de n éléments parmi 10. Son cardinal est donc 10^n , et il est muni de la probabilité uniforme.

L'événement A est maintenant : «on obtient au moins une fois la boule noire», l'événement B est inchangé : «on obtient au moins une fois une boule rouge».

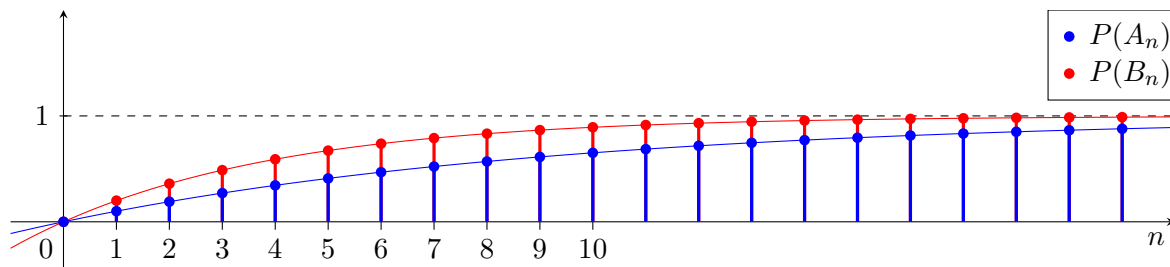
On considère les événements contraires \bar{A} : «on n'obtient jamais la noire» et \bar{B} : «on n'obtient jamais une rouge».

Alors \bar{A} contient les listes de n éléments parmi 9, car 9 boules ne sont pas noires, et \bar{B} contient les listes de n éléments parmi 8, car 8 boules ne sont pas rouges. Ainsi \bar{A} est de cardinal 9^n et \bar{B} est de cardinal 8^n . Par équiprobabilité :

$$P(A) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n \quad \text{et} \quad P(B) = 1 - \left(\frac{8}{10}\right)^n$$

On peut représenter graphiquement ses probabilités. Elles sont sur les courbes des fonctions f et g définie par $f(x) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^x$ et $g(x) = 1 - \left(\frac{8}{10}\right)^x$.

Ce sont des formes exponentielles, par exemple $f(x) = 1 - e^{x \ln \frac{9}{10}}$.



⑦ Quelle est la probabilité en piochant cinq cartes d'un jeu de Poker d'obtenir un brelan qui n'est ni un full ni un carré? D'obtenir deux paires mais pas de full?

On rappelle que le Poker se joue avec un jeu de 52 cartes, réparties en 4 couleurs et 13 valeurs. Une paire est un ensemble de deux cartes de même valeur, un brelan est un ensemble de trois cartes de même valeur, un full est l'union d'un brelan et d'une paire.

Il existe 13 valeurs possibles pour un brelan : du 2 à l'as.

Pour une valeur donnée il existe 4 brelans : c'est le nombre de façons de choisir 3 éléments parmi 4. Par exemple il existe 4 brelans d'as, 4 brelans de roi, etc.

Il existe donc 4×13 brelans, auxquels il faut ajouter deux cartes de valeurs différentes, sinon on aurait un full.

Il faut donc choisir 2 valeurs parmi les 12 restantes, soit $\binom{12}{2} = 6 \times 11$ possibilités.

Et une fois ces valeurs choisies il existe 4 cartes de chaque valeur, une par couleur.

Le nombre de mains contenant un brelan est donc :

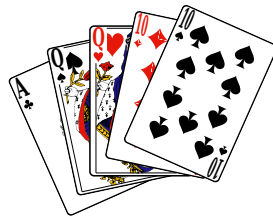
$$13 \times 4 \times 6 \times 11 \times 4^2 = 2^7 \times 3 \times 11 \times 13$$

Par exemple pour le brelan suivant :



On a 13 façons de choisir le valet, puis 4 brelans de valets, ici on a choisi les valets de pique, cœur et trèfle. Puis $\binom{12}{2}$ façons de choisir le cinq et le huit, et enfin 4 cinq et 4 huit possibles.

Pour les deux paires : on choisit deux valeurs parmi 13, soit $\binom{13}{2} = 13 \times 6$ possibilités. Par exemple une paire de dames et une paire de 10.



Pour une paire donnée il existe $\binom{4}{2} = 6$ façons de choisir la paire, on choisit deux couleurs parmi les 4 possibles. Par exemple pour les dames on choisit pique et cœur et pour les 10 on choisit carreau et pique.

Ensuite il reste une carte à choisir parmi les $52 - 8 = 44$ cartes qui n'ont pas les valeurs des paires, c'est-à-dire dans notre cas ni une dame ni un 10.

Le nombre de mains contenant deux paires est donc :

$$13 \times 6 \times 6^2 \times 44 = 2^5 \times 3^3 \times 11 \times 13$$

⑧ On jette deux fois de suite une pièce de monnaie équilibrée.

Quelle est la probabilité que l'on obtienne deux piles sachant que l'on en a obtenu au moins un ?

L'univers Ω contient quatre éléments :

$$\Omega = \{(F, F), (F, P), (P, F), (P, P)\}$$

Ces quatre éléments sont équiprobables car la pièce est équilibrée.

On définit les événements :

- A : «on obtient au moins un pile»
- B : «on obtient deux piles»

Comme $A = \{(F, P), (P, F), (P, P)\}$ alors par équiprobabilité :

$$P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega} = \frac{3}{4}$$

Comme $B = \{(P, P)\}$ alors par équiprobabilité :

$$P(B) = \frac{\text{Card } B}{\text{Card } \Omega} = \frac{1}{4}$$

La probabilité demandée est $P_A(B)$. Par définition des probabilités conditionnelles :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Comme $A \cap B = B$ alors :

$$P_A(B) = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{1}{3}$$

La probabilité que l'on obtienne deux piles sachant que l'on en a obtenu au moins un est donc de $\frac{1}{3}$.

⑨ On pioche des lettres une par une dans un sac contenant les 26 lettres de l'alphabet, sans les remettre. Pour tout $k \in \llbracket 0, 26 \rrbracket$ on note T_k l'événement : «le S apparaît au tirage k ».

- Pour tout $i \in \llbracket 1, 26 \rrbracket$ calculer directement $P_{\overline{T_1} \cap \dots \cap \overline{T_{i-1}}}(\overline{T_i})$.
- En déduire la probabilité de l'événement S_k : «le S apparaît lors de l'un des k tirages».

a. Pour tout $k \in \llbracket 1, 26 \rrbracket$ l'événement $\overline{T_k}$ signifie que le S n'est pas pioché au tirage k .

L'événement $\overline{T_1} \cap \dots \cap \overline{T_{i-1}}$ signifie donc que le S n'apparaît pas aux tirages 1 à $i-1$.

Si cet événement a lieu alors il reste $(26 - (i-1)) = 27 - i$ lettres dans le sac, dont le S. Par équiprobabilité la probabilité de le piocher au tirage suivant est donc de $\frac{1}{27-i}$, et la probabilité de ne pas le piocher est $1 - \frac{1}{27-i}$:

$$\forall i \in \llbracket 1, 26 \rrbracket \quad P_{\overline{T_1} \cap \dots \cap \overline{T_{i-1}}}(\overline{T_i}) = \frac{26-i}{27-i}$$

On peut remarquer que cette formule est valable aussi pour $i = 1$, auquel cas l'événement $\overline{T_1} \cap \dots \cap \overline{T_{i-1}}$ est l'événement certain, et donc $P(\overline{T_1}) = \frac{25}{26}$.

b. Soit $k \in \llbracket 1, 26 \rrbracket$. D'après la formule des probabilités composées :

$$P(\overline{T_1} \cap \dots \cap \overline{T_k}) = \prod_{i=1}^k P_{\overline{T_1} \cap \dots \cap \overline{T_{i-1}}}(\overline{T_i})$$

D'après la question précédente :

$$P(\overline{T_1} \cap \dots \cap \overline{T_k}) = \prod_{i=1}^k \frac{26-i}{27-i}$$

On remarque un télescopage, que l'on peut rédiger correctement de la façon suivante, en utilisant le changement d'indice $j = i - 1$:

$$\prod_{i=1}^k \frac{26-i}{27-i} = \frac{\prod_{i=1}^k (26-i)}{\prod_{i=1}^k (27-i)} = \frac{\prod_{i=1}^k (26-i)}{\prod_{j=0}^{k-1} (27-(j+1))} = \frac{\prod_{i=1}^k (26-i)}{\prod_{i=0}^{k-1} (26-i)} = \frac{26-k}{26}$$

L'événement $\overline{T_1} \cap \dots \cap \overline{T_k}$ signifie que le S n'apparaît pas aux tirages 1 à k . L'événement contraire est : «le S apparaît lors de l'un des k tirages». Il s'agit de l'événement S_k .

On en déduit :

$$P(S_k) = 1 - P(\overline{T_1} \cap \dots \cap \overline{T_k}) = \frac{k}{26}$$

Notons que cette formule est cohérente avec l'intuition pour les valeurs $k = 0, 1$ et 26 .

10 On possède un sac avec n jetons numérotés de 1 à n ($n \in \mathbb{N}^*$), et n urnes $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$ contenant chacune k boules blanches et $n - k$ boules noires.

On pioche un jeton dans le sac. On obtient un numéro k . On pioche ensuite une boule dans l'urne \mathcal{U}_k .

a. Quelle est la probabilité que la boule obtenue soit blanche ?

b. La boule obtenue est blanche. Quelle est la probabilité, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, qu'elle provienne de l'urne \mathcal{U}_k ?

a. On reconnaît une expérience aléatoire en deux phases, pour laquelle la formule des probabilités totales est toute indiquée.

Pour tout $k = 1, \dots, n$ on note A_k l'événement «le jeton pioché dans le sac porte le numéro k ».

On note ensuite B l'événement «la boule piochée est blanche».

On souhaite donc calculer la probabilité de l'événement B .

La famille (A_1, \dots, A_n) est un système complet d'événements car :

- On pioche un numéro entre 1 et n , donc l'un au moins des événements A_k a lieu, *i.e.*, $A_1 \cup \dots \cup A_n = \Omega$.

- On ne pioche qu'un seul jeton, donc deux événements A_i distincts ne peuvent avoir lieu simultanément : si $i \neq j$ alors $A_i \cap A_j = \emptyset$.

De plus les A_i sont de probabilités non-nulles car le sac contient au moins un jeton portant chaque numéro de 1 à n .

Ces hypothèses permettent d'appliquer la formule des probabilités totales :

$$P(B) = \sum_{k=1}^n P_{A_k}(B)P(A_k)$$

Le sac contient n jetons, que l'on suppose identiques au toucher donc indiscernables. De plus pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ le sac contient 1 seul jeton numéroté k , donc par équiprobabilité :

$$\forall k = 1, \dots, n \quad P(A_k) = \frac{1}{n}$$

Si l'événement A_k a lieu alors on pioche une boule dans l'urne \mathcal{U}_k , laquelle contient k boules blanches sur un total de n boules aussi supposées indiscernables, donc par équiprobabilité :

$$\forall k = 1, \dots, n \quad P_{A_k}(B) = \frac{k}{n}$$

On en déduit :

$$P(B) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \frac{n+1}{2n}$$

Par exemple pour $n = 1$ on obtient $P(B) = 1$. En effet, le sac contient juste un jeton numéroté 1 et on a une unique urne, qui contient une boule blanche. Il est donc certain que l'on piochera cette boule.

On peut aussi remarquer que $P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$, ce qui montre que lorsque n tend vers $+\infty$ la probabilité de piocher une boule blanche tend vers $\frac{1}{2}$.

- b. On souhaite calculer la probabilité de l'événement A_k sachant que l'événement B a lieu. Il s'agit de la probabilité $P_B(A_k)$. D'après la formule d'inversion cause-effet :

$$P_B(A_k) = \frac{P_{A_k}(B)P(A_k)}{P(B)}$$

Toutes ces probabilités sont connues, on obtient :

$$\forall k = 1, \dots, n \quad P_B(A_k) = \frac{2k}{n(n+1)}$$

On remarque que la somme des ces probabilités est égale à 1, ce qui était prévisible car la famille (A_1, \dots, A_n) est un système complet d'événements et P_B est une probabilité, donc :

$$\sum_{k=1}^n P_B(A_k) = 1$$

11 Démontrer que A et B sont indépendants si et seulement si A et \bar{B} sont indépendants, si et seulement si \bar{A} et B sont indépendants, si et seulement si \bar{A} et \bar{B} sont indépendants.

Supposons que A et B sont indépendants. Alors par définition $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ et :

$$P(\bar{A})P(B) = (1 - P(A))P(B) = P(B) - P(A)P(B) = P(B) - P(A \cap B)$$

Par propriété $P(B) - P(A \cap B) = P(B \setminus A)$. Or $B \setminus A = B \cap \bar{A}$, et donc on a prouvé que :

$$P(\bar{A})P(B) = P(\bar{A} \cap B)$$

Les événements \bar{A} et B sont indépendants.

On a démontré l'implication suivante, valable pour tous événements A et B :

$$A, B \text{ indépendants} \implies \bar{A}, B \text{ indépendants.}$$

En remplaçant A par \bar{A} on obtient :

$$\bar{A}, B \text{ indépendants} \implies A, B \text{ indépendants.}$$

Ceci donne :

$$A, B \text{ indépendants} \iff \bar{A}, B \text{ indépendants.}$$

En intervertissant A et B :

$$A, B \text{ indépendants} \iff A, \bar{B} \text{ indépendants.}$$

En remplaçant A par \bar{A} :

$$\bar{A}, B \text{ indépendants} \iff \bar{A}, \bar{B} \text{ indépendants.}$$

Toutes les équivalences sont finalement démontrées.

12 Un jeu de 52 cartes possède 13 cœurs et 4 dames dont la dame de cœur.

On pioche une carte dans ce jeu. On note A et B les événements «on obtient un cœur» et «on obtient une dame». Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Et si on enlève le roi de trèfle du jeu ?

L'événement A contient 13 éléments, l'événement B contient 4 éléments.

L'événement $A \cap B$ ne contient qu'un seul élément : la dame de cœur.

Par équiprobabilité on en déduit :

$$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} \quad P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{52}$$

On remarque que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, car $4 \times 13 = 52$. Les événements A et B sont donc indépendants.

Supposons maintenant qu'on a enlevé le roi de trèfle. Alors le jeu contient 51 cartes dont 13 cœurs, 4 dames, et une seule dame de cœur. Les probabilités deviennent :

$$P(A) = \frac{13}{51} \quad P(B) = \frac{4}{51} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{51}$$

On remarque que :

$$P(A)P(B) = \frac{52}{51^2} \quad \text{et} \quad P(A \cap B) = \frac{51}{51^2}$$

Les événements A et B ne sont pas indépendants car $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$.

13 On réalise l'expérience consistant à jeter deux dés, un rouge et un bleu, et on définit les événements :

- A : «Le dé rouge donne 6»
- B : «Le dé bleu donne 6»
- C : «La somme des deux dés est égale à 7».

Vérifier que A , B , C sont deux-à-deux indépendants, mais ne sont pas mutuellement indépendants.

L'univers Ω contient 36 éléments équiprobables : les couples (a, b) où a et b sont deux entiers entre 1 et 6.

L'événement A contient les couples $(6, b)$ pour b allant de 1 à 6, l'événement B contient les couples $(a, 6)$ pour a allant de 1 à 6, et l'événement C contient les couples $(a, 7 - a)$ pour a allant de 1 à 6, c'est-à-dire les couples :

$$(1, 6) \quad (2, 5) \quad (3, 4) \quad (4, 3) \quad (5, 2) \quad (6, 1)$$

Ces trois événements sont de cardinal 6, alors que l'univers est de cardinal 36, donc par équiprobabilité leurs probabilités sont $\frac{6}{36}$ soit :

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{6}$$

L'événement $A \cap B$ ne contient que le couple $(6, 6)$, l'événement $A \cap C$ ne contient que le couple $(6, 1)$, l'événement $B \cap C$ ne contient que le couple $(1, 6)$. Par équiprobabilité :

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{36}$$

Ceci donne :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad P(A \cap C) = P(A)P(C) \quad P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

Les événements A , B , C sont donc deux à deux indépendants. Par contre l'événement $A \cap B \cap C$ est impossible : si A et B ont lieu alors les deux dés donnent 6 et donc la somme ne peut être égale à 6. Ainsi :

$$P(A \cap B \cap C) = 0 \quad \text{et} \quad P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{6^3}$$

Les événements A , B , C ne sont pas mutuellement indépendants.

14 On jette trois dés. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de six obtenus.

- Déterminer la loi de X .
- Vérifier que l'on obtient bien une loi de probabilité de X .

- a. Comme on jette trois dés, le nombre de six obtenus est un entier compris entre 0 et 3, donc $X(\Omega) = \llbracket 0, 3 \rrbracket$.

On choisit pour univers l'ensemble des listes de 3 entiers parmi $\llbracket 1, 6 \rrbracket$:

$$\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^3 = \{(a_1, \dots, a_3) \mid \forall i = 1, \dots, 3 \quad a_i \in \llbracket 1, 6 \rrbracket\}$$

Cet univers contient 6^3 éléments, lesquels sont équiprobables car on suppose que les dés ne sont pas truqués.

Soit $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$. On calcule le nombre de tirages pour lesquels $X = k$, donc le nombre de tirages contenant exactement k six.

Il existe $\binom{3}{k}$ façons de choisir les places pour les k six, puis 5^{3-k} façons de choisir les nombres aux $3 - k$ places restantes. On en déduit $\text{Card}(X = k) = \binom{3}{k} 5^{3-k}$ puis par équiprobabilité :

$$P(X = k) = \frac{\binom{3}{k} 5^{3-k}}{6^3}$$

- b. La première condition est évidente :

$$\forall k = 0, \dots, 3 \quad P(X = k) = \frac{\binom{3}{k} 5^{3-k}}{6^3} \geq 0.$$

Pour vérifier que la somme des $P(X = k)$ est bien égale à 1 on applique la formule du binôme :

$$\sum_{k=0}^3 P(X = k) = \frac{1}{6^3} \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} 1^k 5^{3-k} = \frac{(1+5)^3}{6^3} = 1.$$

On a bien obtenu une loi de probabilité pour X .

Ceci implique que :

$$\forall k = 0, \dots, 3 \quad 0 \leq P(X = k) \leq 1.$$

Le fait que chaque probabilité soit inférieure à 1 n'est *a priori* pas immédiat.

15 On jette deux dés et on note X la variable aléatoire égale au plus grand numéro obtenu.

- Déterminer $X(\Omega)$ puis $P(X \leq k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.
- En déduire la loi de X .
- Calculer l'espérance de X .

a. Le plus grand numéro obtenu avec deux dés est un entier compris entre 1 et 6 donc :

$$X(\Omega) = \llbracket 1, 6 \rrbracket$$

L'événement $(X \leq k)$ signifie que le plus grand numéro est inférieur ou égal à k , donc que les deux numéros sont inférieurs ou égaux à k .

Cet événement a lieu si et seulement si on a obtenu deux fois un numéro entre 1 et k , ce qui se produit avec la probabilité $\frac{k}{6}$. Or les deux tirages sont indépendants donc :

$$P(X \leq k) = \left(\frac{k}{6}\right)^2 = \frac{k^2}{36}$$

On aurait aussi pu expliciter les ensembles :

$$\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2 \quad \text{et} \quad (X \leq k) = \llbracket 1, k \rrbracket^2$$

Donc par équiprobabilité sur Ω :

$$P(X \leq k) = \frac{\text{Card}(X \leq k)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{k^2}{36}$$

Si $k = 1$ on obtient $P(X \leq 1) = \frac{1}{36}$, c'est la probabilité d'obtenir le couple $(1, 1)$. Si $k = 6$ on obtient $P(X \leq 6) = 1$, car il est certain que le plus grand numéro est inférieur ou égal à 6.

On remarque également que cette formule est valable pour $k = 0$: en effet l'événement $(X = 0)$ est impossible, donc sa probabilité est nulle. Ceci sera utilisé dans la question suivante.

b. L'événement $(X = k)$ a lieu si $(X \leq k)$ a lieu mais $(X \leq k - 1)$ n'a pas lieu, donc :

$$P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k - 1)$$

Pour être plus précis on pourrait noter que $(X = k) = (X \leq k) \setminus (X \leq k - 1)$, donc

$$P(X = k) = P(X \leq k) - P((X \leq k) \cap (X \leq k - 1))$$

L'implication $(X \leq k - 1) \implies (X \leq k)$ montre que $(X \leq k) \cap (X \leq k - 1) = (X \leq k - 1)$ et donc on aboutit bien à :

$$P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k - 1)$$

Cette formule est valable pour k allant de 1 à 6, car la formule pour $P(X \leq k)$ est valable pour k allant de 0 à 6.

Grâce à la question précédente :

$$P(X = k) = \frac{k^2}{36} - \frac{(k-1)^2}{36} = \frac{2k-1}{36}$$

Ceci donne la loi de k . On peut vérifier que :

- $P(X = 1) = \frac{1}{36}$ car l'événement $(X = 1)$ ne contient que le couple $(1, 1)$.
- $P(X = 2) = \frac{3}{36}$ car l'événement $(X = 2)$ contient les couples :

$$(1, 2) \quad (2, 2) \quad (2, 1)$$

- $P(X = 3) = \frac{5}{36}$ car l'événement $(X = 3)$ contient les couples :

$$(1, 3) \quad (2, 3) \quad (3, 3) \quad (3, 2) \quad (3, 1)$$

- etc jusqu'à $P(X = 6) = \frac{11}{36}$ car l'événement $(X = 6)$ contient les couples :

$$(1, 6) \quad \dots \quad (6, 6) \quad \dots \quad (6, 1)$$

Le tableau suivant montre en case (i, j) la maximum entre i et j :

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

On voit par exemple que 7 couples réalisent l'événement $X = 4$.

c. Par définition de l'espérance :

$$E(X) = \sum_{k=1}^6 kP(X = k).$$

On calcule :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^6 \frac{k(2k-1)}{36} = \frac{1}{36} \left(2 \sum_{k=1}^6 k^2 - \sum_{k=1}^6 k \right) \\ &= \frac{1}{36} \left(\frac{2 \times 6 \times 7 \times 13}{6} - \frac{6 \times 7}{2} \right) = \frac{6 \times 7}{36} \times \frac{26-3}{6} = \frac{7 \times 23}{36} = \frac{161}{36} \end{aligned}$$

On remarque que $E(X) = 4 + \frac{17}{36} \simeq 4,47222\dots$

Si on jette un seul dé la valeur moyenne obtenue est 3,5. Si on jette deux dés et garde la maximum alors la valeur moyenne obtenue est supérieure à 3,5 et inférieure au maximum 6, donc la valeur 4,4722 est cohérente.

16 Soit X une variable aléatoire finie à valeurs dans \mathbb{N} , et soit $n = \max X(\Omega)$.
Démontrer que :

$$E(X) = \sum_{k=1}^n P(X \geq k)$$

Comme $X(\Omega) \subseteq \llbracket 0, n \rrbracket$ alors par définition de l'espérance :

$$E(X) = \sum_{k=0}^n kP(X = k)$$

Si un entier k n'est pas dans $X(\Omega)$ alors la probabilité de l'événement $(X = k)$ est nulle, donc $kP(X = k) = 0$, et donc on peut tout de même l'ajouter à la somme ci-dessus sans changer la valeur de l'espérance.

On remarque que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad P(X \geq k) = \sum_{i=k}^n P(X = i)$$

Ceci est valable car X est une variable aléatoire entière de maximum n .

En on déduit :

$$\sum_{k=1}^n P(X \geq k) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=k}^n P(X = i)$$

Il s'agit d'une somme triangulaire :

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=k}^n P(X = i) = \sum_{1 \leq k \leq i \leq n} P(X = i) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i P(X = i)$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^n P(X \geq k) = \sum_{i=1}^n iP(X = i)$$

Comme i est une variable muette ceci donne bien :

$$\sum_{k=1}^n P(X \geq k) = \sum_{k=0}^n kP(X = k) = E(X).$$

17 Démontrer la formule donnant $V(aX + b)$ en fonction de $V(X)$, a et b .

Par définition de la variance :

$$V(aX + b) = E\left((aX + b - E(aX + b))^2\right)$$

La linéarité de l'espérance donne $E(aX + b) = aE(X) + b$ donc :

$$\begin{aligned} V(aX + b) &= E\left((aX + b - aE(X) - b)^2\right) \\ &= E\left(a^2(X - E(X))^2\right) \end{aligned}$$

Par linéarité de l'espérance :

$$V(aX + b) = a^2 E((X - E(X))^2)$$

On retrouve la définition de la variance :

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

La propriété est démontrée.

18 Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega)$ est un singleton : $X(\Omega) = \{b\}$ avec $b \in \mathbb{R}$.

Déterminer la loi de X , son espérance, sa variance et son écart-type.

Comme $X(\Omega) = \{b\}$ alors la loi de X est :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(X = x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = b \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par définition de l'espérance :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) = bP(X = b) = b.$$

Effectivement, comme X ne prend que la valeur b alors elle est égale à b en moyenne.

De même, X^2 est la variable aléatoire certaine égale à b^2 , donc $E(X^2) = b^2$, puis grâce à la formule de Koenig-Huyghens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 0.$$

Ceci s'explique car X ne varie pas, donc sa variance est nulle.

On en déduit $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 0$.

19 On pioche une boule dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n , et on note X le numéro obtenu.

Déterminer la loi de X . Calculer son espérance, sa variance et son écart-type.

La variable aléatoire X prend ses valeurs dans l'intervalle entier $\llbracket 1, n \rrbracket$. Les boules sont supposées identiques et indiscernables donc ses valeurs sont équiprobables, et :

$$X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in X(\Omega) \quad P(X = k) = \frac{1}{n}.$$

L'espérance de X est :

$$E(X) = \sum_{k=1}^n kP(X = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Pour la variance on commence par calculer l'espérance de X^2 :

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^n k^2 P(X = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{n} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

Ensuite, d'après la formule de König-Huyghens :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{n+1}{12} (2(2n+1) - 3(n+1)) = \frac{(n+1)(n-1)}{12} = \frac{n^2-1}{12} \end{aligned}$$

On constate que cette variance est nulle si et seulement si $n = 1$. Effectivement si $n = 1$ alors X suit la loi constante égale à 1, on retrouve les valeurs obtenues dans l'exercice précédent.

1 Soit A, B, C trois événements d'un univers Ω . Décrire en terme d'ensembles les événements :

- Au moins un des événements A, B, C se réalise.
- A, B, C se réalisent tous les trois.
- A, B, C ne se réalisent pas tous.
- Aucun des trois événements A, B, C ne se réalise.
- A se réalise mais ni B ni C ne se réalisent.
- A ne se réalise pas mais l'un des deux autres au moins se réalise.
- Un seulement parmi A et B se réalise.

- $A \cup B \cup C$
- $A \cap B \cap C$
- $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$
- $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$
- $A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ ou $A \setminus (B \cup C)$
- $\bar{A} \cap (B \cup C)$
- $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ ou $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

2 Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé (Ω, P) . Simplifier :

$$P(A \cup B) + P(\bar{A} \cup B) + P(A \cup \bar{B}) + P(\bar{A} \cup \bar{B})$$

On utilise la formule :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Celle-ci est valable pour tous événements A et B . On l'applique pour $A \cup B$ et $\bar{A} \cup B$:

$$P((A \cup B) \cup (\bar{A} \cup B)) = P(A \cup B) + P(\bar{A} \cup B) - P((A \cup B) \cap (\bar{A} \cup B)) \quad (2)$$

Or par associativité et commutativité de la loi \cup :

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cup (\bar{A} \cup B) &= A \cup B \cup \bar{A} \cup B = A \cup \bar{A} \cup B \cup B \\ &= (A \cup \bar{A}) \cup (B \cup B) = \Omega \cup B = \Omega \end{aligned}$$

Par distributivité de l'intersection par rapport à l'union :

$$(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup B) = (A \cap \bar{A}) \cup B = \emptyset \cup B = B$$

L'égalité (2) donne donc :

$$P(A \cup B) + P(\bar{A} \cup B) = P(\Omega) + P(B) = 1 + P(B)$$

Cette égalité est valable pour tous événements A et B . En remplaçant B par \bar{B} on obtient :

$$P(A \cup \bar{B}) + P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 + P(\bar{B})$$

Par somme on en déduit :

$$P(A \cup B) + P(\bar{A} \cup B) + P(A \cup \bar{B}) + P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 2 + P(B) + P(\bar{B})$$

Comme $P(\bar{B}) = 1 - P(B)$ alors finalement :

$$P(A \cup B) + P(\bar{A} \cup B) + P(A \cup \bar{B}) + P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 3.$$

Cette formule est valable pour tout événements A et B .

3 Une urne contient une boule rouge, une boule bleue et une boule jaune. On tire plusieurs fois une boule de l'urne, en la remettant à chaque fois. On cherche la probabilité que l'on obtienne les trois couleurs en n tirages ($n \in \mathbb{N}^*$).

a. Dans cette question on fixe n et on note R (respectivement B , J) l'événement «on obtient au moins une boule rouge (respectivement bleue, jaune) en n tirages».

(i) Calculer $P(\bar{R})$, $P(\bar{B})$ et $P(\bar{J})$, puis $P(\bar{R} \cap \bar{B})$, $P(\bar{R} \cap \bar{J})$, $P(\bar{B} \cap \bar{J})$, et $P(\bar{R} \cap \bar{B} \cap \bar{J})$.

(ii) En déduire $P(\bar{R} \cup \bar{B} \cup \bar{J})$.

b. Soit A_n l'événement «lors des n tirages, toutes les couleurs ont été obtenues».

Calculer $P(A_n)$.

c. Vérifier la formule obtenue pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

a. (i) L'événement \bar{R} signifie que l'on obtient aucune boule rouge, donc juste des boules bleues et jaunes.

À chaque tirage la probabilité de piocher une boule bleue ou jaune est $\frac{2}{3}$, car l'urne ne contient que trois boules, supposées indiscernables, et on pioche une boule parmi ces trois boules.

Les boules sont remises dans l'urne après chaque tirage, donc les tirages sont identiques et mutuellement indépendants.

On en déduit : $P(\bar{R}) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et de même : $P(\bar{B}) = P(\bar{J}) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

L'événement $\bar{R} \cap \bar{B}$ signifie que l'on n'obtient aucune boule rouge et aucune boule bleue, donc juste des boules jaunes.

À chaque tirage la probabilité d'obtenir la boule jaune est $\frac{1}{3}$ et les tirages sont mutuellement indépendants, donc : $P(\bar{R} \cap \bar{B}) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

De même : $P(\overline{R} \cap \overline{J}) = P(\overline{B} \cap \overline{J}) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

L'événement $\overline{R} \cap \overline{B} \cap \overline{J}$ signifie que l'on n'obtient aucune boule rouge et aucune boule bleue et aucune boule jaune. Or l'urne ne contient que des boules rouges, bleues et jaunes, on obtient donc obligatoirement l'une des trois boules au moins, car $n \geq 1$. Ainsi l'événement $\overline{R} \cap \overline{B} \cap \overline{J}$ est impossible et : $P(\overline{R} \cap \overline{B} \cap \overline{J}) = 0$

(ii) On applique la formule du crible :

$$\begin{aligned} P(\overline{R} \cup \overline{B} \cup \overline{J}) &= P(\overline{R}) + P(\overline{B}) + P(\overline{J}) \\ &\quad - P(\overline{R} \cap \overline{B}) - P(\overline{R} \cap \overline{J}) - P(\overline{B} \cap \overline{J}) \\ &\quad + P(\overline{R} \cap \overline{B} \cap \overline{J}) \end{aligned}$$

Avec les résultats de la question précédente on obtient :

$$P(\overline{R} \cup \overline{B} \cup \overline{J}) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{2^n - 1}{3^{n-1}}$$

b. L'événement A_n signifie que les trois couleurs ont été obtenues, donc que les trois événements R , B et J ont lieu :

$$A_n = R \cap B \cap J$$

L'événement contraire est :

$$\overline{A_n} = \overline{R \cap B \cap J} = \overline{R} \cup \overline{B} \cup \overline{J}$$

En utilisant la question précédente ceci donne :

$$P(A_n) = 1 - P(\overline{R} \cup \overline{B} \cup \overline{J}) = 1 - \frac{2^n - 1}{3^{n-1}} = \frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{3^{n-1}}$$

c. On calcule : $P(A_1) = 0$ et $P(A_2) = 0$. Effectivement si on pioche une fois ou deux fois une boule dans l'urne alors on ne peut obtenir une boule de chaque couleur car il y a trois couleurs dans l'urne.

Pour $n = 3$ on obtient $P(A_3) = \frac{2}{9}$.

Dans ce cas l'univers est l'ensemble des triplets d'éléments de $\{r, b, j\}$:

$$\Omega = \{r, b, j\}^3$$

Il contient 27 éléments, équiprobables car les boules sont supposées indiscernables.

L'événement A_3 signifie que les trois couleurs ont été obtenues, donc il contient les permutations de l'ensemble $\{r, b, j\}$, donc $3! = 6$ éléments.

On peut les expliciter :

$$A_3 = \{(r, b, j), (r, j, b), (b, r, j), (b, j, r), (j, r, b), (j, b, r)\}$$

On en déduit par équiprobabilité :

$$P(A_3) = \frac{\text{Card } A_3}{\text{Card } \Omega} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$$

Ceci est confirmé par la formule.

On peut aussi remarquer que $\lim P(A_n) = 1$, par exemple en écrivant :

$$P(A_n) = 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

Effectivement, plus on pioche de boules dans l'urne plus on a de chances d'obtenir toutes les couleurs, et l'événement A_n tend vers l'événement certain, sans jamais toutefois lui être égal car on a toujours une chance, même petite, de n'obtenir que deux couleurs parmi les trois.

4 Une urne contient 8 boules bleues et 4 boules rouges.

- a. On tire simultanément deux boules de l'urne. Quelle est la probabilité de tirer deux bleues ? Deux rouges ? Une boule de chaque couleur ?
- b. On tire trois boules maintenant. Quelle est la probabilité de tirer trois boules bleues ? Trois boules rouges ? Au moins une boule bleue et une boule rouge ? Exactement une boule bleue ?

- a. On pioche 2 boules parmi 12, le nombre de résultats possibles est donc le nombre de parties à 2 éléments d'un ensemble à 12 éléments, c'est-à-dire $\binom{12}{2} = \frac{12 \times 11}{2} = 66$.

On suppose que les boules sont indiscernables au toucher et à la pesée, donc les résultats sont équiprobables.

On note respectivement A, B, C les événements «tirer deux bleues», «tirer deux rouges» et «tirer deux boules de couleurs différentes».

L'événement A contient les sous-ensembles à 2 éléments de l'ensemble des 8 boules bleues, donc il est de cardinal $\binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$.

L'événement B contient les sous-ensembles à 2 éléments de l'ensemble des 4 boules rouges, donc il est de cardinal $\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$.

L'événement C contient les sous-ensembles avec une boule bleue parmi les 8 boules bleues et une boule rouge parmi les 4 boules rouges, donc il est de cardinal $\binom{8}{1} \binom{4}{1} = 32$.

Par équiprobabilité :

$$P(A) = \frac{28}{66} = \frac{14}{33} \quad P(B) = \frac{6}{66} = \frac{3}{33} \quad P(C) = \frac{32}{66} = \frac{16}{33}$$

On remarque que $P(A) + P(B) + P(C) = 1$. Effectivement la famille (A, B, C) est un système complet d'événements : en piochant deux boules on obtient soit deux boules bleues, soit deux boules rouges, soit une boule de chaque couleur.

- b. On pioche 3 boules parmi 12 donc le nombre de résultats possibles est :

$$\binom{12}{3} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2} = 220$$

On nomme les événements :

- A : «On obtient trois boules bleues.»

- B : «On obtient trois boules rouges.»
- C : «On obtient au moins une boule bleue et une boule rouge.»
- D : «On obtient exactement une boule bleue.»

De même que dans la question précédente :

$$\text{Card } A = \binom{8}{3} = 56 \quad \text{Card } B = \binom{4}{3} = 4$$

Par équiprobabilité :

$$P(A) = \frac{56}{220} = \frac{14}{55} \quad P(B) = \frac{4}{220} = \frac{1}{55}$$

L'événement \bar{C} signifie que l'on obtient trois boules de la même couleur, donc trois boules bleues ou trois boules rouges. Ainsi $\bar{C} = A \cup B$.

De plus A et B sont incompatibles donc $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. On calcule :

$$P(C) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) = \frac{40}{55} = \frac{8}{11}$$

L'événement D est de cardinal $\binom{8}{1}\binom{4}{2} = 8 \times 6 = 48$. En effet on compte les sous-ensembles contenant une boule parmi les 8 boules bleues et 2 boules parmi les 4 rouges. Par équiprobabilité :

$$P(D) = \frac{48}{220} = \frac{12}{55}$$

5 La probabilité de gagner au Loto est de $\frac{1}{N}$ où N est un grand entier.

- En jouant N fois au Loto, quelle est la probabilité de gagner au moins une fois ?
- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{\frac{1}{x}}$ et en déduire une approximation de la probabilité précédente.

a. Soit A l'événement : «On gagne au moins une fois lors de N parties».

L'événement \bar{A} signifie alors : «On perd N fois» ou «On perd toutes les parties».

Pour tout k allant de 1 à N on note A_k l'événement : «On gagne lors de la partie k ».

L'événement \bar{A} a lieu si et seulement si on perd toutes les parties donc :

$$\bar{A} = \bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_N$$

Les parties sont mutuellement indépendantes donc les événements A_1, \dots, A_N sont mutuellement indépendants et :

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1) \times \dots \times P(\bar{A}_N)$$

Par énoncé la probabilité de gagner lors d'une expérience est de $\frac{1}{N}$ donc :

$$\forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket \quad P(A_k) = \frac{1}{N} \quad \text{puis} \quad P(\bar{A}_k) = 1 - \frac{1}{N}$$

On en déduit :

$$P(\overline{A}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^N$$

Finalement la probabilité de l'événement A est :

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^N$$

b. On commence par écrire : $(1-x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln(1-x)}$

Le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1-x)$ est

$$\ln(1-x) \underset{(0)}{=} -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Donc :

$$\frac{1}{x} \ln(1-x) \underset{(0)}{=} -1 - \frac{x}{2} + o(x)$$

Puis :

$$e^{\frac{1}{x} \ln(1-x)} \underset{(0)}{=} e^{-1} e^{-\frac{x}{2} + o(x)} \underset{(0)}{=} e^{-1} \left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right) \underset{(0)}{=} \frac{1}{e} - \frac{x}{2e} + o(x)$$

En conséquence :

$$P(A) \underset{(0)}{=} 1 - \frac{1}{e} + \frac{1}{2eN} + o\left(\frac{1}{N}\right) = 1 - \frac{1}{e} + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

Si N est grand alors $P(A)$ est proche de $1 - \frac{1}{e} \simeq 0,63$. L'erreur est de l'ordre de $\frac{1}{N}$.

6 On possède un jeu de $2n$ cartes ($n \geq 1$) composé de n paires d'animaux.

- Quelle est la probabilité d'obtenir une paire si on pioche deux cartes dans ce jeu ?
- Et si on en pioche trois (avec $n \geq 2$) ?

On note A l'événement : «On obtient une paire.»

- Dans le cas où on pioche deux cartes dans le jeu, l'univers Ω contient les sous-ensembles à deux éléments du jeu de $2n$ cartes, il est donc de cardinal $\binom{2n}{2}$:

$$\text{Card } \Omega = \binom{2n}{2} = \frac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1)$$

On suppose que le dos des cartes sont tous identiques, donc les éléments de Ω sont équiprobables.

L'événement A contient les sous-ensembles à deux éléments contenant une paire. Or il y a exactement n paires par définition du jeu de cartes. Par équiprobabilité :

$$P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega} = \frac{n}{n(2n-1)} = \frac{1}{2n-1}$$

Cette probabilité peut être comprise différemment de la façon suivante : on peut supposer que l'on pioche une carte puis une carte. La première carte appartient à une certaine paire, et il reste après l'avoir piochée $(2n - 1)$ cartes dans le jeu. Une seule carte complète la paire de la première carte, donc la probabilité de l'obtenir au second tirage est de $\frac{1}{2n-1}$.

On peut remarquer que dans le cas minimal, si $n = 1$, cette probabilité est égale à 1. Effectivement, le jeu contient deux cartes qui constituent une paire, on pioche deux cartes, donc on obtient la paire.

- b. Dans le cas où on pioche trois cartes dans le jeu l'univers Ω contient les sous-ensembles à trois éléments du jeu de $2n$ cartes, il est donc de cardinal $\binom{2n}{3}$:

$$\text{Card } \Omega = \binom{2n}{3} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{3!} = \frac{n(2n-1)(2n-2)}{3}$$

L'événement A est composé d'une paire, ce qui laisse n possibilités, puis d'une carte parmi les $2n - 2$ restantes, donc il est de cardinal $n(2n - 2)$. Par équiprobabilité :

$$P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega} = \frac{n(2n-2)}{\frac{n(2n-1)(2n-2)}{3}} = \frac{3}{2n-1}$$

On peut remarquer que dans le cas minimal où $n = 2$ cette probabilité est égale à 1. Effectivement, le jeu contient quatre cartes séparées en deux paires. Si on pioche trois cartes alors on obtient une paire.

7 Combien faut-il piocher de cartes dans un jeu de 52 cartes pour avoir au moins une chance sur deux d'obtenir l'as de pique :

- si on pioche les cartes successivement en les gardant ?
- si on les pioche en les remettant après chaque tirage ?

On pioche n cartes dans le jeu. On note A_n l'événement : «on obtient l'as de pique».

- a. Si on pioche simultanément les cartes alors Ω est l'ensemble des parties à n éléments du jeu de 52 cartes, et A_n est l'ensemble des parties composées de l'as de pique et de $n - 1$ cartes parmi les 51 autres cartes.

Ainsi Ω est de cardinal $\binom{52}{n}$ et A_n est de cardinal $\binom{51}{n-1}$. Par équiprobabilité sur Ω :

$$P(A_n) = \frac{\text{Card } A_n}{\text{Card } \Omega} = \frac{\binom{51}{n-1}}{\binom{52}{n}} = \frac{51! n! (52-n)!}{(n-1)! (52-n)! 52!} = \frac{n}{52}$$

On cherche n tel que $P(A_n) \geq \frac{1}{2}$. Cette équation donne $n \geq 26$.

Il faut donc piocher au moins 26 cartes pour avoir plus d'une chance sur deux d'obtenir l'as de pique.

- b. Si on pioche les n cartes successivement avec remise alors Ω est l'ensemble des listes de n éléments parmi les 52 cartes. Il est de cardinal 52^n .

L'événement \bar{A}_n signifie «aucune carte parmi les n cartes piochées n'est l'as de pique». C'est l'ensemble des listes de n cartes parmi les 51 cartes qui ne sont pas l'as de pique. Il est de cardinal 51^n . Ainsi, par équiprobabilité sur Ω :

$$P(\bar{A}_n) = \frac{\text{Card } \bar{A}_n}{\text{Card } \Omega} = \left(\frac{51}{52}\right)^n$$

On obtient donc : $P(A_n) = 1 - \left(\frac{51}{52}\right)^n$

Cherchons à quelle condition cette probabilité est supérieur ou égale à $\frac{1}{2}$. Pour ceci on résout l'inéquation $P(A_n) \geq \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} P(A_n) \geq \frac{1}{2} &\iff 1 - \left(\frac{51}{52}\right)^n \geq \frac{1}{2} &\iff \left(\frac{51}{52}\right)^n \leq \frac{1}{2} \\ &\iff n \ln \frac{51}{52} \leq \ln \frac{1}{2} &\iff n \geq \frac{\ln 2}{\ln \frac{51}{52}} \simeq 35,7 \end{aligned}$$

Pour la dernière équivalence on a divisé l'inégalité par $\ln \frac{51}{52}$, lequel est négatif car $\frac{51}{52} < 1$, donc le signe est inversé.

La calculatrice montre que $\frac{\ln 2}{\ln \frac{51}{52}} \simeq 35,7$ donc il faut piocher au moins 36 cartes pour avoir au moins une chance sur 2 d'obtenir l'as de pique.

- 8** On pioche deux jetons au hasard dans un sac contenant 10 jetons numérotés de 1 à 10. Soit p la probabilité que la somme des deux numéros obtenus soit paire.
- Calculer p si les deux tirages sont simultanés.
 - Calculer p si les deux tirages sont successifs avec remise entre les deux.
 - Répondre aux mêmes questions en supposant que le sac contient 11 jetons numérotés de 1 à 11.

On note A l'événement : «la somme des numéros est paire.»

- On pioche simultanément deux jetons dans un sac contenant 10 jetons. Le nombre de résultats possibles est donc $\binom{10}{2}$.

La somme des numéros est paire si les deux numéros sont pairs ou si les deux numéros sont impairs.

On note B l'événement «les deux numéros sont pairs» et C l'événement «les deux numéros sont impairs».

Alors $A = B \cup C$, et de plus B et C sont incompatibles. Ainsi par additivité :

$$P(A) = P(B) + P(C)$$

La sac contient 5 numéros pairs et 5 numéros impairs. L'événement B est donc de cardinal $\binom{5}{2}$ (on pioche 2 numéros parmi les 5 pairs) et l'événement C est également de cardinal $\binom{5}{2}$.

Par équiprobabilité :

$$P(A) = \frac{\text{Card } B}{\text{Card } \Omega} + \frac{\text{Card } C}{\text{Card } \Omega} = \frac{\binom{5}{2} + \binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{2 \times \frac{5 \times 4}{2}}{\frac{10 \times 9}{2}} = \frac{4}{9}$$

b. Dans le cas de tirages avec remise l'univers Ω contient les listes de deux numéros entre 1 et 10, soit $10^2 = 100$ éléments. Ses éléments sont toujours équiprobables.

On peut toujours écrire $A = B \cup C$ avec B et C incompatibles.

Les événements B et C sont de cardinaux 5^2 tous les deux, ce sont les listes de deux numéros pairs ou de deux numéros impairs, et le sac contient 5 numéros pairs et 5 numéros impairs. On en déduit

$$P(A) = \frac{5^2 + 5^2}{10^2} = \frac{1}{2}$$

On a donc obtenu $p = \frac{4}{9} = 0,444\dots$ si le tirage est sans remise et $p = \frac{1}{2} = 0,5$ sinon.

c. Dans le cas où le sac contient les jetons de 1 à 11, il contient 5 numéros pairs et 6 numéros impairs. Les calculs deviennent, dans le cas du tirage simultané :

$$P(A) = \frac{\binom{5}{2} + \binom{6}{2}}{\binom{11}{2}} = \frac{\frac{5 \times 4}{2} + \frac{6 \times 5}{2}}{\frac{11 \times 10}{2}} = \frac{5}{11}$$

Dans le cas du tirage avec remise :

$$P(A) = \frac{5^2 + 6^2}{11^2} = \frac{61}{121}$$

On a donc obtenu $p = \frac{5}{11} = 0,4545\dots$ si le tirage est sans remise et $p = \frac{61}{121} \simeq 0,5041$ sinon.

9 Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

On pioche simultanément k lettres d'un sac contenant les 26 lettres de l'alphabet.

- Calculer la probabilité que l'on obtienne le A, puis celle que l'on obtienne le B, et enfin celle que l'on obtienne le A et le B.
- Les événements «obtenir le A» et «obtenir le B» sont-ils indépendants ?
- Calculer la probabilité que l'on obtienne le B sachant que l'on a obtenu le A.
- On suppose $k < 26$. Calculer la probabilité que l'on obtienne le B sachant que l'on n'a pas obtenu le A.

a. On peut supposer que l'on pioche les k lettres simultanément : à la fin de l'expérience on a k lettres distinctes dans les mains, et on s'intéresse juste aux événements «avoir le A» et «avoir le B», sans se préoccuper de leur ordre d'arrivée.

On notera A et B ces deux événements. On choisit donc pour univers Ω l'ensemble des parties à k éléments de l'ensemble des 26 lettres. Il est de cardinal $\binom{26}{k}$, et on suppose que les lettres du sac sont indiscernables au toucher, ce qui implique que les éléments de Ω sont équiprobables.

L'événement A contient les parties à k éléments dont le A. Il s'agit donc des parties à $k - 1$ éléments de l'alphabet privé du A, auxquelles on ajoute le A. Le cardinal de A est donc $\binom{1}{1} \binom{25}{k-1}$: 1 élément parmi 1 pour le A et $k - 1$ éléments parmi 25 pour les autres.

De même l'événement B est de cardinal $\binom{1}{1} \binom{25}{k-1}$.

L'événement $A \cap B$, qui s'énonce «on obtient le A et le B», est l'ensemble des parties à k éléments dont le A et le B, il est de cardinal $\binom{2}{2} \binom{24}{k-2}$: 2 éléments parmi l'ensemble $\{A, B\}$ et $k - 2$ éléments de l'ensemble de 24 lettres différentes de A et de B.

Par équiprobabilités :

$$P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega} = \frac{25!}{(k-1)!(26-k)!} \frac{k!(26-k)!}{26!} = \frac{k}{26}$$

$$P(B) = P(A) = \frac{k}{26}$$

$$P(A \cap B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card } \Omega} = \frac{24!}{(k-2)!(26-k)!} \frac{k!(26-k)!}{26!} = \frac{k(k-1)}{26 \times 25}$$

On remarque que cette dernière probabilité est nulle si $k = 1$: effectivement si on pioche une seule lettre on ne peut recevoir le A et le B.

On remarque également que si $k = 26$ alors les trois probabilités valent 1 : si on pioche toutes les lettres alors on est certain de recevoir le A et le B.

b. On cherche une condition nécessaire et suffisante pour que A et B soient indépendants :

$$\begin{aligned} P(A \cap B) = P(A)P(B) &\iff \frac{k(k-1)}{26 \times 25} = \left(\frac{k}{26}\right)^2 \\ &\iff \frac{k-1}{25} = \frac{k}{26} && \text{car } k \neq 0 \\ &\iff 26(k-1) = 25k \\ &\iff k = 26 \end{aligned}$$

Ainsi A et B sont indépendants si et seulement si $k = 26$, c'est-à-dire si on pioche toutes les lettres. Effectivement dans ce cas, les événements A et B sont certains, donc ils sont indépendants.

Par contre si on ne pioche pas toutes les lettres alors les événements A et B ne sont pas indépendants.

c. On cherche la probabilité $P_A(B)$. Pour ceci on applique la définition :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{k(k-1)}{26 \times 25} \frac{26}{k} = \frac{k-1}{25}$$

d. On cherche la probabilité $P_{\bar{A}}(B)$. Pour ceci on applique la formule d'inversion cause-effet :

$$P_{\bar{A}}(B) = \frac{P_B(\bar{A})P(B)}{P(\bar{A})}$$

Elle donne :

$$\begin{aligned} P_{\bar{A}}(B) &= \frac{(1 - P_B(A))P(B)}{1 - P(A)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} \\ &= \frac{\left(\frac{k}{26} - \frac{k(k-1)}{26 \times 25}\right)}{1 - \frac{k}{26}} = \frac{26k - k^2}{25(26 - k)} = \frac{k}{25} \end{aligned}$$

On peut mettre les trois probabilités de B sous le même dénominateur pour les comparer :

$$P(B) = \frac{25k}{26 \times 25} = \frac{26k - k}{26 \times 25} \quad P_A(B) = \frac{26k - 26}{26 \times 25} \quad P_{\bar{A}}(B) = \frac{26k}{26 \times 25}$$

On constate que $P_A(B) \leq P(B) \leq P_{\bar{A}}(B)$. Effectivement on a plus de chance d'obtenir le B si on n'a pas obtenu le A, mais moins de chance si on a eu le A.

10 On possède un sac contenant n jetons numérotés de 1 à n (avec $n \geq 2$). On pioche un jeton, on note son numéro k , puis on le remet dans le sac. On pioche ensuite simultanément k jetons dans le sac.

- Soit i un entier compris entre 1 et n . Quelle est la probabilité que le jeton numéro i soit obtenu au second tirage ?
- Soit i et j deux entiers distincts compris entre 1 et n . Quelle est la probabilité que les jetons i et j soient présents parmi les jetons tirés au second tirage ?

On définit les événements :

- Pour tout $k = 1, \dots, n$ A_k : «on obtient le jeton numéro k au premier tirage»
- Pour tout $i = 1, \dots, n$ B_i : «on obtient le jeton numéro i au second tirage»

- Au premier tirage on pioche un jeton parmi les k jetons, lesquels sont supposés indiscernables. La probabilité d'obtenir chacun d'entre eux est donc de $\frac{1}{k}$:

$$\forall k = 1, \dots, n \quad P(A_k) = \frac{1}{k}$$

Au second tirage on pioche k jetons parmi n simultanément. Le nombre de résultats possibles est donc $\binom{n}{k}$.

Parmi ces résultats, ceux qui contiennent le i sont composés du i et d'un ensemble de $k - 1$ jetons parmi les $n - 1$ autres jetons. Le cardinal de B_i dans le cas où A_k a lieu est donc $\binom{1}{1} \binom{n-1}{k-1}$. Par équiprobabilité sur les $\binom{n}{k}$ résultats du second tirage :

$$P_{A_k}(B_i) = \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{k}{n}$$

Pour calculer la probabilité de l'événement B_i on applique la formule des probabilités totales.

La famille (A_1, \dots, A_n) est un système complet d'événements, car au premier tirage on pioche un et un seul jeton numéroté entre 1 et n .

La formule des probabilités totales donne, pour i quelconque :

$$P(B_i) = \sum_{k=1}^n P_{A_k}(B_i) P(A_k)$$

On calcule :

$$P(B_i) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}$$

Tout ceci est valable dans le cas particulier où $n = 1$. On obtient alors $P(B_1) = 1$, car il est certain que l'on pioche le jeton numéro 1 à chaque tirage.

- b. On procède de même pour calculer la probabilité de l'événement $B_i \cap B_j$, où $i \neq j$.

Au second tirage on pioche k jetons parmi n . Les résultats sont au nombre de $\binom{n}{k}$. Ceux qui contiennent le i et le j sont composés du i , du j , et d'un ensemble de $k - 2$ jetons parmi les $n - 2$ autres jetons. Le cardinal de $B_i \cap B_j$ dans le cas où A_k a lieu est donc $\binom{2}{2} \binom{n-2}{k-2}$: 2 jetons parmi $\{i, j\}$, $k - 2$ jetons parmi les autres.

Par équiprobabilité sur les résultats du second tirage :

$$P_{A_k}(B_i \cap B_j) = \frac{\binom{n-2}{k-2}}{\binom{n}{k}} = \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

La famille (A_1, \dots, A_n) est un système complet d'événements. On applique la formule des probabilités totales :

$$P(B_i \cap B_j) = \sum_{k=1}^n P_{A_k}(B_i \cap B_j)P(A_k)$$

On calcule :

$$\begin{aligned} P(B_i \cap B_j) &= \sum_{k=1}^n \frac{k(k-1)}{n^2(n-1)} = \frac{1}{n^2(n-1)} \sum_{k=1}^n (k^2 - k) \\ &= \frac{1}{n^2(n-1)} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) \\ &= \frac{n+1}{n(n-1)} \left(\frac{2n+1}{6} - \frac{1}{2} \right) = \frac{(n+1)(2n-2)}{6n(n-1)} = \frac{n+1}{3n} \end{aligned}$$

Par exemple dans le cas où $n = 2$, l'événement $B_1 \cap B_2$ a lieu si et seulement si on pioche deux jetons au second tirage, ce qui a lieu si et seulement si on obtient le jeton numéro 2 au premier tirage, ce qui a lieu avec la probabilité $\frac{1}{2}$. Et effectivement dans ce cas $P(B_i \cap B_j) = \frac{1}{2}$.

11 Une urne contient 1 boule d'or, 2 boules d'argent et 7 boules de bronze, toutes indiscernables au toucher et à la pesée. On pioche ces dix boules une par une, sans les remettre. On souhaite calculer la probabilité de l'événement B : «la boule d'or arrive avant les boules d'argent».

- Modéliser cette expérience par un univers Ω uniformément probabilisé. Donner son cardinal.
 - Soit k un entier tel que $1 \leq k \leq 10$. Calculer la probabilité de l'événement A_k : «la boule d'or est tirée au k -ème tirage».
 - Calculer les probabilités des événements $A_k \cap B$.
 - En déduire la probabilité de l'événement B .
- a. On choisit pour univers Ω l'ensemble des permutations des 10 boules, il est de cardinal $10!$.

Comme les boules sont indiscernables alors les éléments de Ω sont équiprobables.

- b. L'événement A_k contient les permutations des 10 boules où la boule d'or est placée en position k . Cette boule étant placée il reste $9!$ permutations possibles des 9 autres boules. Ainsi $\text{Card } A_k = 9!$ puis par équiprobabilité :

$$\forall k = 1, \dots, 10 \quad P(A_k) = \frac{\text{Card } A_k}{\text{Card } \Omega} = \frac{9!}{10!} = \frac{1}{10}$$

- c. Pour obtenir le cardinal de l'événement $A_k \cap B$ on compte les permutations des 10 boules où la boule d'or est placée en position k et les positions 1 à $k-1$ contiennent des boules de bronze.

Le nombre de listes de $k-1$ éléments distincts parmi 7 est $\frac{7!}{(8-k)!}$ si $1 \leq k \leq 8$, et 0 sinon. Le nombre de permutations des boules restantes est $(10-k)!$, il s'agit des boules placées après la boule d'or, donc en positions $k+1$ à 10.

Ainsi $\text{Card}(A_k \cap B) = \frac{7!}{(8-k)!} \times (10-k)!$ et par équiprobabilité :

$$\forall k = 1, \dots, 8 \quad P(A_k \cap B) = \frac{\text{Card}(A_k \cap B)}{\text{Card } \Omega} = \frac{7!(10-k)!}{(8-k)!10!} = \frac{(10-k)(9-k)}{10 \times 9 \times 8}$$

On remarque que cette formule est valable également pour $k=9$ et $k=10$.

- d. Comme la boule d'or est obtenue à l'un des tirages 1 à 10 et à un seul de ces tirages alors la famille A_1, \dots, A_{10} est un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne alors :

$$P(B) = \sum_{k=1}^{10} P(A_k)P_{A_k}(B) = \sum_{k=1}^{10} P(A_k \cap B)$$

On calcule donc :

$$P(B) = \sum_{k=1}^{10} P(A_k \cap B) = \sum_{k=1}^{10} \frac{(10-k)(9-k)}{10 \times 9 \times 8}$$

Le changement d'indice $j = 9 - k$ donne :

$$P(B) = \sum_{k=1}^8 \frac{(10-k)(9-k)}{10 \times 9 \times 8} = \sum_{j=1}^8 \frac{j(j+1)}{10 \times 9 \times 8}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{1}{10 \times 9 \times 8} \left(\sum_{j=1}^8 j^2 + \sum_{j=1}^8 j \right) = \frac{1}{10 \times 9 \times 8} \left(\frac{8 \times 9 \times 17}{6} + \frac{8 \times 9}{2} \right) \\ &= \frac{1}{10} \left(\frac{17}{6} + \frac{3}{6} \right) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Cette probabilité de $\frac{1}{3}$ s'explique de la façon suivante : si on considère juste les boules d'or et d'argent alors l'une de ces trois boules arrivera avant les autres, et par équiprobabilité on a une chance sur 3 que ce soit la boule d'or.

12 Au cours d'un procès deux jurés déclarent un accusé coupable ou non coupable.

On suppose que :

- La probabilité que l'accusé soit coupable est de 60%.
- S'il est coupable alors la probabilité que chaque juré le déclare coupable est de 70%, et ceci indépendamment l'un de l'autre.
- Si l'accusé n'est pas coupable, la probabilité que chaque juré le déclare coupable est de 20%, indépendamment l'un de l'autre.

Attention : des événements peuvent être indépendants pour une certaine probabilité mais pas pour une autre.

- Calculer la probabilité que chaque juré déclare l'accusé coupable.
- Calculer la probabilité que les deux jurés déclarent l'accusé coupable.
- Les événements «le premier juré déclare l'accusé coupable» et «le second juré déclare l'accusé coupable» sont-ils indépendants ?
- Calculer la probabilité que l'accusé soit non coupable s'il est déclaré coupable par les deux jurés.

On définit les événements suivants :

- C : «L'accusé est coupable.»
- J_1 : «Le premier juré déclare l'accusé coupable.»
- J_2 : «Le second juré déclare l'accusé coupable.»

Les données de l'énoncé s'écrivent alors :

$$P(C) = \frac{6}{10} \quad P_C(J_1) = P_C(J_2) = \frac{7}{10} \quad P_{\bar{C}}(J_1) = P_{\bar{C}}(J_2) = \frac{2}{10}$$

Les données d'indépendance sont pour la probabilité conditionnée par C et pour celle conditionnée par \bar{C} :

$$P_C(J_1 \cap J_2) = P_C(J_1) \times P_C(J_2) \quad \text{et} \quad P_{\bar{C}}(J_1 \cap J_2) = P_{\bar{C}}(J_1) \times P_{\bar{C}}(J_2)$$

- On utilise la formule de probabilités totales. La famille (C, \bar{C}) est un système complet d'événements donc :

$$P(J_1) = P(C)P_C(J_1) + P(\bar{C})P_{\bar{C}}(J_1)$$

On obtient :

$$P(J_1) = \frac{6}{10} \times \frac{7}{10} + \left(1 - \frac{6}{10}\right) \times \frac{2}{10} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

De même : $P(J_2) = \frac{1}{2}$

Ainsi la probabilité que le premier juré déclare l'accusé coupable est de 0,5 et de même pour le second juré.

- On applique la formule des probabilités totales avec, encore, le système complet d'événements (C, \bar{C}) :

$$P(J_1 \cap J_2) = P(C)P_C(J_1 \cap J_2) + P(\bar{C})P_{\bar{C}}(J_1 \cap J_2)$$

Par indépendance :

$$P_C(J_1 \cap J_2) = P_C(J_1) \times P_C(J_2) = \frac{7}{10} \times \frac{7}{10} = \frac{49}{100}$$

$$\text{et } P_{\bar{C}}(J_1 \cap J_2) = P_{\bar{C}}(J_1) \times P_{\bar{C}}(J_2) = \frac{2}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{4}{100}$$

On obtient :

$$P(J_1 \cap J_2) = \frac{6}{10} \times \frac{49}{100} + \frac{4}{10} \times \frac{4}{100} = \frac{31}{100}$$

La probabilité que les deux jurés déclarent l'accusé coupable est donc de 0,31.

c. On constate que :

$$P(J_1) \times P(J_2) = \frac{5}{10} \times \frac{5}{10} = \frac{25}{100} \quad \text{et} \quad P(J_1 \cap J_2) = \frac{31}{100}$$

Comme

$$P(J_1 \cap J_2) \neq P(J_1) \times P(J_2)$$

alors les événements J_1 et J_2 ne sont pas indépendants.

d. La probabilité demandée est $P_{J_1 \cap J_2}(\bar{C})$: la probabilité que l'accusé ne soit pas coupable s'il est déclaré coupable par les deux jurés.

La formule d'inversion cause-effet nous donne :

$$P_{J_1 \cap J_2}(\bar{C}) = \frac{P_{\bar{C}}(J_1 \cap J_2)P(\bar{C})}{P(J_1 \cap J_2)}$$

Toutes les valeurs sont connues :

$$P_{J_1 \cap J_2}(\bar{C}) = \frac{\frac{4}{100} \times \frac{4}{10}}{\frac{31}{100}} = \frac{16}{310} = \frac{8}{155} \simeq 0,052$$

La probabilité d'une erreur judiciaire en défaveur de l'accusé est donc de 0,052, presque une chance sur vingt.

On peut calculer aussi que la probabilité que l'accusé soit coupable alors que les deux jurés le déclarent non coupable est de $\frac{27}{155} \simeq 0,175$, puis que la probabilité d'une erreur judiciaire est de $\frac{7}{31}$ soit approximativement 0,226.

Remarque.

Cet exercice montre que l'on peut calculer des probabilités sans faire référence aucune à l'univers.

Ici on pourrait choisir pour univers l'ensemble :

$$\Omega = \{c, nc\}^3$$

Il contient les triplets (a, j_1, j_2) où a, j_1, j_2 prennent les valeurs «c» ou «nc» pour «coupable» et «non coupable», a exprimant la réelle culpabilité de l'accusé alors que j_1 et j_2 expriment les avis des deux jurés.

C'est un ensemble à huit éléments, mais ils ne sont pas équiprobables.

Les événements C , J_1 , J_2 ne sont pas élémentaires. Par exemple :

$$C = \{(c, c, c), (c, c, nc), (c, nc, c), (c, nc, nc)\}$$

On peut calculer :

$$P(\{(c, c, c)\}) = P(C \cap J_1 \cap J_2) = \frac{6 \times 7^2}{1000} \quad \text{et} \quad P(\{(nc, c, c)\}) = P(\overline{C} \cap J_1 \cap J_2) = \frac{16}{1000}$$

Ceci confirme que les événements élémentaires ne sont pas équiprobables.

Complément.

On remplace les valeurs de l'énoncé par des données inconnues :

$$P(C) = \lambda \quad P_C(J_1) = P_C(J_2) = \alpha \quad P_{\overline{C}}(J_1) = P_{\overline{C}}(J_2) = \beta$$

On suppose toujours que si l'accusé est coupable alors les événements J_1 et J_2 sont indépendants et de même si l'accusé est non-coupable.

Alors on peut démontrer que J_1 et J_2 ne sont pas indépendants si $\lambda \in]0, 1[$.

13 On évalue un test permettant de détecter la présence d'un certain gène chez un patient.

La probabilité que ce test indique l'absence du gène alors qu'il est présent est $\alpha = \frac{1}{500}$.

La probabilité qu'il indique la présence de gène alors qu'il est absent est $\beta = \frac{1}{100}$.

On note λ la proportion de la population possédant le gène recherché.

- Quelle est la fiabilité du test, c'est-à-dire la probabilité qu'il renvoie le bon résultat ?
- Une personne est détectée positive au test. Quelle est la probabilité qu'elle possède le gène ?

On note A l'événement «avoir le gène» et B l'événement «être détecté positif».

Les données de l'énoncé se traduisent par :

$$P_A(\overline{B}) = \alpha \quad P_{\overline{A}}(B) = \beta \quad P(A) = \lambda$$

- Soit C l'événement «le test renvoie le bon résultat». La famille (A, \overline{A}) est un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(C) = P(A)P_A(C) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(C)$$

Si le patient possède le gène alors le test renvoie le bon résultat si et seulement si l'événement B a lieu, et si le patient ne possède pas le gène alors le test renvoie le bon résultat si et seulement si l'événement \overline{B} a lieu :

$$P_A(C) = P_A(B) \quad \text{et} \quad P_{\overline{A}}(C) = P_{\overline{A}}(\overline{B})$$

On en déduit que

$$P(C) = \lambda(1 - \alpha) + (1 - \lambda)(1 - \beta)$$

Ceci donne

$$P(C) = \lambda(\beta - \alpha) + (1 - \beta) = \frac{495 + 4\lambda}{500}$$

Comme $\lambda \in [0, 1]$ alors cette probabilité est entre $\frac{495}{500} = 0,99$ et $\frac{499}{500} = 0,998$.

b. On cherche la probabilité $P_B(A)$. La famille (A, \bar{A}) étant un système complet d'évènements la formule de Bayes donne :

$$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P_A(B)P(A) + P_{\bar{A}}(B)P(\bar{A})}$$

c'est-à-dire :

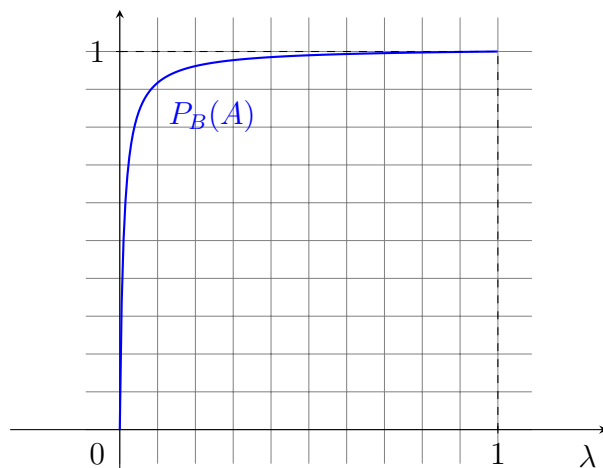
$$P_B(A) = \frac{(1 - \alpha)\lambda}{(1 - \alpha - \beta)\lambda + \beta} = \frac{499\lambda}{494\lambda + 5}$$

On remarque que si $\lambda = 0$ alors $P_B(A) = 0$ et si $\lambda = 1$ alors $P_B(A) = 1$.

On aller plus loin dans l'interprétation de ce résultat en traçant la courbe de la fonction $f : \lambda \mapsto P_B(A)$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

La fonction f est dérivable, de dérivée : $f'(\lambda) = \frac{5 \times 499}{(494\lambda + 5)^2}$

On obtient une courbe comme la suivante :



La probabilité qu'un patient possède le gène s'il est détecté positif est donc proche de 1, sauf si la fréquence du gène est faible.

14 Alphonse essaie de ne pas fumer tous les jours. S'il ne fume pas un certain jour, alors il a une chance sur trois de fumer le lendemain. Par contre s'il fume un certain jour, alors il n'a qu'une chance sur six de fumer le lendemain.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'événement «Alphonse fume le jour n ». On suppose que le jour 0 il a fumé. On note u_n la probabilité de A_n .

- Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
- En déduire l'expression générale de u_n . Interpréter la limite de la suite (u_n) .

a. Les données de l'énoncé s'écrivent :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{6}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. La famille $(A_n, \overline{A_n})$ est un système complet d'événements. La formule des probabilités totales montre que :

$$P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})P(\overline{A_n})$$

Comme $u_n = P(A_n)$ alors $P(\overline{A_n}) = 1 - u_n$. On obtient $u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3}(1 - u_n)$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6}u_n$$

b. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique. On note γ le réel tel que :

$$\gamma = \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\gamma$$

Alors $\gamma = \frac{2}{7}$ et par soustraction :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - \gamma = -\frac{1}{6}(u_n - \gamma)$$

La suite $(u_n - \gamma)$ est géométrique. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n - \gamma = \left(-\frac{1}{6}\right)^n (u_0 - \gamma)$$

Comme Alphonse a fumé le jour 0 alors $u_0 = 1$, et on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{2}{7} + \frac{5}{7} \left(-\frac{1}{6}\right)^n$$

Comme $|\frac{1}{6}| < 1$ alors cette suite converge vers $\frac{2}{7}$.

On peut en déduire qu'au bout d'un temps long à ce régime, la probabilité qu'Alphonse fume un certain jour est de $\frac{2}{7}$, donc en moyenne il fume 2 jours sur 7.

15 Aldo, Bob et charlie jouent au frisbee. Lorsque Aldo ou Bob a le frisbee, il l'envoie deux fois sur trois à Charlie, et sinon à l'autre joueur, et lorsque Charlie a le frisbee il l'envoie deux fois sur trois à Aldo et une fois sur trois à Bob.

On note A_n, B_n, C_n les événements «Aldo a le frisbee», «Bob a le frisbee» et «Charlie a le frisbee» à l'instant n .

Soit $a_n = P(A_n), b_n = P(B_n), c_n = P(C_n)$, et $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

a. Exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n , et c_n . Déterminer la matrice A telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $X_{n+1} = AX_n$.

b. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}$. Calculer $D = P^{-1}AP$, puis D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer X_n en fonction de X_0, D, P et n . En déduire les termes généraux de a_n, b_n et c_n , sachant qu'Aldo a le frisbee au début du jeu.

Calculer les limites de a_n, b_n et c_n .

a. D'après l'énoncé à tout instant l'un des trois joueurs possède le frisbee. Ceci montre que l'événement $A_n \cup B_n \cup C_n$ est certain.

De plus il est impossible que deux joueurs aient le frisbee en même temps, donc les événements A_n, B_n et C_n sont deux-à-deux incompatibles.

Ainsi la famille (A_n, B_n, C_n) forme un système complet d'événements, que l'on admettra de probabilités non-nulles.

La formule des probabilités totales montre alors que :

$$P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1})P(C_n)$$

De même :

$$P(B_{n+1}) = P_{A_n}(B_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(B_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(B_{n+1})P(C_n)$$

$$P(C_{n+1}) = P_{A_n}(C_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(C_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(C_{n+1})P(C_n)$$

L'énoncé donne les probabilités que chaque joueur ait le frisbee à un instant si chacun des autres joueurs le possède à l'instant précédent, et il montre également que les joueurs ne le gardent jamais. On traduit ceci en terme de probabilités :

$$\begin{array}{lll} P_{A_n}(A_{n+1}) = 0 & P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{3} & P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{2}{3} \\ P_{A_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{3} & P_{B_n}(B_{n+1}) = 0 & P_{C_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{3} \\ P_{A_n}(C_{n+1}) = \frac{2}{3} & P_{B_n}(C_{n+1}) = \frac{2}{3} & P_{C_n}(C_{n+1}) = 0 \end{array}$$

On obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + \frac{2}{3}c_n \quad b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n \quad c_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n$$

Ceci s'exprime matriciellement :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

Puis :

$$X_{n+1} = AX_n \quad \text{avec} \quad A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

b. Grâce à l'algorithme du pivot de Gauss-Jordan on calcule P^{-1} , puis par multiplication on obtient D :

$$P^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 5 & -15 & 5 \\ 8 & 8 & -12 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme la matrice D est diagonale alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad D^n = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{2}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c. On démontre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = A^n X_0$

Comme $A^0 = I_3$ alors $A_0 X_0 = X_0$, donc la propriété est vraie au rang 0.

Supposons que la propriété est vraie au rang n : $X_n = A^n X_0$. Comme $X_{n+1} = AX_n$ alors $X_{n+1} = A^{n+1} X_0$ donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

Par récurrence la propriété $X_n = A^n X_0$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On sait que $D = P^{-1}AP$. Par multiplication à gauche par P et à droite par P^{-1} ceci donne $A = PDP^{-1}$. Ensuite on écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = (PDP^{-1})^n = PD^n P^{-1}$$

Puis

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = PD^n P^{-1} X_0.$$

Au début du jeu Aldo qui a le frisbee, donc $a_0 = 1$ et $b_0 = c_0 = 0$. Ceci donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{2}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 5 & -15 & 5 \\ 8 & 8 & -12 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En multipliant (de droite à gauche c'est plus simple) on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} a_n = \frac{1}{20} (7 + 5\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 8\left(-\frac{2}{3}\right)^n) \\ b_n = \frac{1}{4} (1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n) \\ c_n = \frac{2}{5} (1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n) \end{cases}$$

Comme $|\frac{1}{3}| < 1$ et $|\frac{2}{3}| < 1$ alors les limites sont :

$$\lim a_n = \frac{7}{20} \quad \lim b_n = \frac{1}{4} = \frac{5}{20} \quad \lim c_n = \frac{2}{5} = \frac{8}{20}$$

Ces limites sont les probabilités qu'au bout d'un long temps de jeu chacun des joueurs possède le frisbee. On peut aussi les interpréter comme le temps moyen de possession du frisbee de chaque joueur : sur une assez longue partie, Aldo possède le frisbee 35% du temps, Bob le possède 25% de temps et Charlie le possède 40% du temps.

16 Une urne contient 9 boules blanches et 1 boule noire. On effectue des tirages successifs dans l'urne. À chaque tirage, si on obtient une boule blanche alors on la remet dans l'urne et on ajoute une boule blanche de plus.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note B_k l'événement «une boule blanche apparaît au tirage k » et N_k l'événement «la boule noire apparaît pour la première fois au tirage k ».

- Combien a-t-on de boules dans l'urne après $k - 1$ tirages si on n'a obtenu que des boules blanches ?
- Justifier que $N_k = B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k$. En déduire $P(N_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
- Simplifier la somme $\frac{1}{8+k} - \frac{1}{9+k}$. En déduire la probabilité p_n de $\bigcup_{k=1}^n N_k$.

Interpréter la limite de p_n .

- Si au bout de $k - 1$ tirages on n'a obtenu que des boules blanches, alors on a ajouté $k - 1$ boules blanches dans l'urne, donc elle contient maintenant $9 + (k - 1) = 8 + k$ boules blanches, et toujours une boule noire, ce qui fait au total $9 + k$ boules.
- L'événement N_k a lieu si et seulement si les tirages 1 à $k - 1$ donnent des boules blanches et le tirage k donne une boule noire. Ceci implique que les événements B_1, \dots, B_{k-1} ont lieu, ce qui donne l'inclusion :

$$N_k \subseteq B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}$$

On en déduit l'égalité :

$$N_k = B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k$$

D'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(N_k) &= P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1 \cap B_2}(B_3) \cdots P_{B_1 \cap \dots \cap B_{k-2}}(B_{k-1})P_{B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}}(N_k) \\ &= \left(\prod_{j=1}^{k-1} P_{B_1 \cap \dots \cap B_{j-1}}(B_j) \right) P_{B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}}(N_k) \end{aligned}$$

Pour tout $j = 1, \dots, k - 1$ l'événement $B_1 \cap \dots \cap B_{j-1}$ signifie que les $j - 1$ premiers tirages ont donné une boule blanche. D'après la première question dans ce cas l'urne contient $9 + j$ boules dont $8 + j$ boules blanches et une seule boule noire, donc :

$$P_{B_1 \cap \dots \cap B_{j-1}}(B_j) = \frac{8 + j}{9 + j} \quad \text{et} \quad P_{B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}}(N_k) = \frac{1}{9 + k}$$

Ceci donne :

$$P(N_k) = \left(\prod_{j=1}^{k-1} \frac{8+j}{9+j} \right) \frac{1}{9+k} = \frac{\prod_{j=1}^{k-1} (8+j)}{\prod_{j=1}^k (9+j)}$$

Le changement d'indice $i = j + 1$ dans le produit du dénominateur donne :

$$P(N_k) = \frac{\prod_{j=1}^{k-1} (8+j)}{\prod_{i=2}^{k+1} (8+i)} = \frac{9}{(8+k)(9+k)}$$

c. On calcule :

$$\frac{1}{8+k} - \frac{1}{9+k} = \frac{1}{(8+k)(9+k)}$$

Les événements N_k , pour k allant de 1 à n sont deux-à-deux incompatibles car la boule noire ne peut arriver pour la première fois à deux tirages différents. L'additivité de la probabilité donne alors :

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n N_k\right) = \sum_{k=1}^n P(N_k)$$

Ceci donne :

$$p_n = \sum_{k=1}^n 9 \left(\frac{1}{8+k} - \frac{1}{9+k} \right) = 9 \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{8+k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{9+k} \right)$$

Il s'agit d'une somme télescopique. En appliquant le changement d'indice $\ell = k + 1$ dans la seconde somme on obtient :

$$p_n = 9 \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{8+k} - \sum_{\ell=2}^{n+1} \frac{1}{8+\ell} \right) = 9 \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{9+n} \right) = \frac{n}{9+n}$$

Par équivalence en $+\infty$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 1$

Ceci montre que pour un grand nombre de tirages la probabilité d'obtenir la boule noire est presque égale à 1, donc on est «presque sûr» de l'avoir au bout d'un certain temps.

17 Aldo et Bob jouent avec un dé. À chaque tour Aldo jette le dé, puis Bob jette le dé. Le premier qui obtient 6 gagne la partie.

On utilisera les événements X_k : «Aldo obtient 6 lors de son k -ème tirage» et Y_k : «Bob obtient 6 lors de son k -ème tirage».

- Soit k un entier naturel non-nul. Calculer la probabilité des événements A_k : «Aldo gagne la partie au k -ème tour» et B_k : «Bob gagne la partie au k -ème tour».
- Quelle est la probabilité qu'Aldo gagne la partie durant les n premiers tours ? Que Bob gagne la partie durant les n premiers tours ? Interpréter les limites de ces deux probabilités lorsque n tend vers $+\infty$.
- On note A l'événement «Aldo gagne la partie» et B l'événement «Bob gagne la partie». On admet que $P(A \cup B) = 1$. Justifier que $P_{\overline{X}_1}(B) = P(A)$, et en déduire les valeurs de $P(A)$ et de $P(B)$.

- a. L'événement A_k a lieu si et seulement si Aldo n'obtient pas de 6 à ces tirages 1 à $k-1$, Bob n'obtient pas de 6 à ses tirages 1 à $k-1$, et Aldo obtient un 6 à son tirage k . Ceci s'écrit :

$$A_k = \overline{X}_1 \cap \overline{Y}_1 \cap \overline{X}_2 \cap \cdots \cap \overline{Y}_{k-1} \cap X_k = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} (\overline{X}_i \cap \overline{Y}_i) \right) \cap X_k$$

Le numéro obtenu à un tirage n'influence pas les autres tirages, donc les événements de cette intersection sont mutuellement indépendants. Ainsi :

$$P(A_k) = \left(\prod_{i=1}^{k-1} (P(\overline{X}_i) \times P(\overline{Y}_i)) \right) \times P(X_k)$$

Le dé est supposé parfaitement équilibré, si bien que : $\forall i \in \mathbb{N} \quad P(X_i) = P(Y_i) = \frac{1}{6}$

On obtient donc :

$$P(A_k) = \left(\frac{5}{6} \right)^{2(k-1)} \frac{1}{6}$$

L'événement B_k a lieu si Aldo et Bob n'obtiennent pas de 6 à leurs tirages 1 à $k-1$, Aldo n'obtient pas de 6 à son tirage k , et Bob obtient un 6 à son tirage k :

$$B_k = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} (\overline{X}_i \cap \overline{Y}_i) \right) \cap \overline{X}_k \cap Y_k$$

On en déduit, par indépendance mutuelle :

$$P(B_k) = \left(\prod_{i=1}^{k-1} (P(\overline{X}_i) \times P(\overline{Y}_i)) \right) \times P(\overline{X}_k) \times P(Y_k) = \left(\frac{5}{6} \right)^{2(k-1)} \frac{5}{36}$$

- b. On note S_n l'événement «Aldo gagne lors de l'un de ses n premiers tirages».

L'événement S_n a lieu si et seulement si l'un des événements A_1, \dots, A_n a lieu, donc :

$$S_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$$

Les événements A_1, \dots, A_n sont incompatibles car Aldo ne peut obtenir son premier 6 lors de deux tirages différents. Par additivité :

$$P(S_n) = \sum_{k=1}^n P(A_k)$$

La formule obtenue dans la question précédente donne :

$$P(S_n) = \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{5}{6} \right)^{2(k-1)} \frac{1}{6} \right] = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n \left(\frac{25}{36} \right)^{k-1}$$

Il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{25}{36}$. On calcule alors :

$$P(S_n) = \frac{6}{11} \left(1 - \left(\frac{25}{36} \right)^n \right)$$

On définit ensuite T_n : «Bob gagne lors de l'un de ses n premiers tirages». Alors :

$$T_n = \bigcup_{k=1}^n B_k$$

Les B_k sont incompatibles. Par additivité :

$$P(T_n) = \sum_{k=1}^n P(B_k) = \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{5}{6} \right)^{2(k-1)} \frac{5}{36} \right]$$

On obtient :

$$P(T_n) = \frac{5}{11} \left(1 - \left(\frac{25}{36} \right)^n \right)$$

Comme $\left| \frac{25}{36} \right| < 1$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n) = \frac{6}{11} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_n) = \frac{5}{11}$$

La limite de l'événement S_n lorsque n tend vers $+\infty$ peut s'interpréter comme l'événement «Aldo gagne la partie», et celle de l'événement T_n comme «Bob gagne la partie». Ainsi la probabilité qu'Aldo gagne est de $\frac{6}{11}$ alors que celle que Bob gagne est de $\frac{5}{11}$. Cette différence s'explique par le fait qu'Aldo est avantagé puisqu'il commence à jeter le dé.

- c. Si l'événement \overline{X}_1 a lieu alors Aldo n'a pas obtenu 6 à son premier tirage. On peut considérer que la partie recommence mais que cette fois c'est Bob qui entame le jeu. La probabilité que Bob gagne maintenant est donc égale à celle qu'avait Aldo de gagner au début. Ainsi $P_{\overline{X}_1}(B) = P(A)$.

Ceci s'écrit : $\frac{P(\overline{X}_1 \cap B)}{P(\overline{X}_1)} = P(A)$

Si Bob gagne alors Aldo n'a pas obtenu de 6 à son premier tirage : l'événement B implique l'événement \overline{X}_1 et donc $B \subseteq \overline{X}_1$ puis $\overline{X}_1 \cap B = B$.

De plus les événements A et B sont incompatibles : comme les joueurs jouent à tour de rôle alors ils ne peuvent gagner simultanément. Ainsi par additivité $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. On a admis que $P(A \cup B) = 1$ donc $P(B) = 1 - P(A)$.

On en déduit :

$$P(A) = \frac{1 - P(A)}{P(\overline{X}_1)}$$

On sait que $P(\overline{X}_1) = \frac{5}{6}$. L'équation ci-dessus permet de calculer $P(A) = \frac{6}{11}$.

Comme $P(B) = 1 - P(A)$ alors $P(B) = \frac{5}{11}$.

On retrouve les résultats de la question précédente :

$$P(A) = \frac{6}{11} \quad \text{et} \quad P(B) = \frac{5}{11}$$

18 Une urne contient 1 jeton marqué 1, 2 jetons marqués 2, et ainsi de suite jusqu'à n jetons marqués n . On tire un jeton dans l'urne. Soit X la variable aléatoire égale au numéro obtenu.

- Déterminer la loi de X et vérifier que l'on obtient bien une loi de probabilité.
- Calculer l'espérance et la variance de X .
- On suppose que $n = 25$, et on note $m = E(X)$, $\sigma = \sigma(X)$. Quelle est la probabilité que X soit dans l'intervalle $[m - \sigma, m + \sigma]$? Dans l'intervalle $[m - 2\sigma, m + 2\sigma]$?

- a. L'urne contient $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ jetons.

La variable aléatoire X est le numéro du jeton que l'on pioche, donc elle peut prendre toutes les valeurs entre 1 et n :

$$X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$$

Pour tout k allant de 1 à n il existe k jetons numérotés k et les jetons sont supposés indiscernables, donc équiprobables, et ainsi :

$$\forall k = 1, \dots, n \quad P(X = k) = \frac{k}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2k}{n(n+1)}$$

Vérifions que l'on a bien une loi de probabilité.

$$(i) \quad \sum_{k=1}^n P(X = k) = \sum_{k=1}^n \frac{2k}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k = 1$$

$$(ii) \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad P(X = k) \geq 0$$

Les $P(X = k)$ sont positifs et leur somme est égale à 1 donc ils sont tous inférieurs ou égaux à 1 et finalement :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad 0 \leq P(X = k) \leq 1$$

On a donc bien obtenu une loi de probabilité.

b. On calcule l'espérance de X :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^n kP(X=k) = \sum_{k=1}^n \frac{2k^2}{n(n+1)} \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{2}{n(n+1)} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n+1}{3} \end{aligned}$$

On remarque que pour $n=1$ on obtient $E(X)=1$, effectivement dans ce cas on a un unique jeton numéroté 1, donc X suit la loi constante égale à 1, qui admet 1 pour espérance.

Sinon cette espérance est de l'ordre de $\frac{2}{3}n$. Effectivement l'urne contient plus de jetons portant des grands numéros que de jetons portant des petits numéros, donc la moyenne est plus proche de n que de 1.

On calcule ensuite l'espérance de X^2 :

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=1}^n k^2P(X=k) = \sum_{k=1}^n \frac{2k^3}{n(n+1)} \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{2}{n(n+1)} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

On en déduit la variance de X grâce à la formule de König-Huyghens :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = \frac{n(n+1)}{2} - \left(\frac{2n+1}{3} \right)^2 \\ &= \frac{9n(n+1) - 2(2n+1)^2}{18} = \frac{9n^2 + 9n - 8n^2 - 8n - 2}{18} = \frac{n^2 + n - 2}{18} \end{aligned}$$

Cette variance est nulle pour $n=1$. On peut factoriser :

$$V(X) = \frac{(n-1)(n+2)}{18}$$

Le fait qu'elle soit nulle pour $n=1$ était prévisible, car si $n=1$ alors X suit la loi constante égale à 1 donc elle est de variance nulle.

c. Si $n=25$ alors :

$$E(X) = \frac{51}{3} = 17 \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{24 \times 27}{18} = 36$$

On en déduit $\sigma(X)=6$, puis

$$[m - \sigma, m + \sigma] = [11, 23] \quad \text{et} \quad [m - 2\sigma, m + 2\sigma] = [5, 29]$$

On calcule donc :

$$P(11 \leq X \leq 23) = \sum_{k=11}^{23} P(X=k) = \sum_{k=11}^{23} \frac{k}{25 \times 13}$$

On pourrait poursuivre par :

$$\sum_{k=11}^{23} k = \sum_{k=1}^{23} k - \sum_{k=1}^{10} k = \frac{23 \times 24}{2} - \frac{10 \times 11}{2}$$

Mais le calcul n'est pas simple.

Il est plus facile de changer d'indice, $i = k - 10$:

$$P(11 \leq X \leq 23) = \frac{1}{25 \times 13} \sum_{i=1}^{13} (i + 10) = \frac{1}{25 \times 13} \left(\frac{13 \times 14}{2} + 10 \times 13 \right) = \frac{17}{25}$$

On obtient donc :

$$p_1 = P(m - \sigma \leq x \leq m + \sigma) = \frac{17}{25} = 0,68$$

Il est effectivement connu que cette probabilité est aux alentours de 65% en général.

Pour la probabilité p_2 il faut veiller à ce que X ne peut prendre de valeurs supérieures à 25 :

$$P(5 \leq X \leq 29) = \sum_{k=5}^{29} P(X = k) = \sum_{k=5}^{25} P(X = k) \quad \text{car } X(\Omega) = \llbracket 1, 25 \rrbracket$$

On calcule :

$$\begin{aligned} P(5 \leq X \leq 29) &= \sum_{k=5}^{25} \frac{k}{25 \times 13} = \frac{1}{25 \times 13} \sum_{i=1}^{21} (i + 4) \\ &= \frac{1}{25 \times 13} \left(\frac{21 \times 22}{2} + 21 \times 4 \right) = \frac{21 \times 15}{25 \times 13} = \frac{63}{65} \end{aligned}$$

On a obtenu :

$$p_2 = P(m - 2\sigma \leq x \leq m + 2\sigma) = \frac{63}{65} \simeq 0,969$$

Usuellement cette probabilité est aux alentours de 95%.

19 Soit n un entier strictement positif et X à valeur dans l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$. On suppose que pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ la probabilité de l'événement $(X = k)$ est la moitié de celle de l'événement $(X = k - 1)$.

- Déterminer la loi de X .
- Calculer $P(X \leq k)$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
- En remarquant que $k = \sum_{i=1}^k 1$, calculer l'espérance de X .

a. Par énoncé : $\forall k = 2, \dots, n \quad P(X = k) = \frac{1}{2} P(X = k - 1)$.

Ainsi la suite $(P(X = k))_{1 \leq k \leq n}$ est une suite (finie) géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Il existe alors un réel λ tel que :

$$\forall k = 1, \dots, n \quad P(X = k) = \lambda \left(\frac{1}{2} \right)^k$$

La famille $(X = k)_{1 \leq k \leq n}$ est un système complet d'événements donc :

$$\sum_{k=1}^n P(X = k) = 1$$

On obtient :

$$\sum_{k=1}^n P(X = k) = 1 \quad \iff \quad \lambda \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 1 \quad \iff \quad \lambda = \frac{2^n}{2^n - 1}$$

On en déduit :

$$\forall k = 1, \dots, n \quad P(X = k) = \frac{2^{n-k}}{2^n - 1}$$

- b. Comme les $X = k$ forment un système complet d'événements alors ils sont deux-à-deux incompatibles, donc par additivité :

$$\forall k = 0, \dots, n \quad P(X \leq k) = P\left(\bigcup_{i=1}^k X = i\right) = \sum_{i=1}^k P(X = i)$$

On utilise la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique :

$$P(X \leq k) = \sum_{i=1}^k \frac{2^n}{2^n - 1} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{2^n}{2^n - 1} \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{\frac{1}{2}} = \frac{2^n - 2^{n-k}}{2^n - 1}$$

On peut vérifier que cette valeur est correcte pour $k = 0$ et $k = n$.

En effet, comme $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ alors l'événement $(X \leq 0)$ est impossible et l'événement $(X \leq n)$ est certain. On obtient bien $P(X \leq 0) = 0$ et $P(X \leq n) = 1$.

- c. Par définition de l'espérance et en utilisant l'indication :

$$E(X) = \sum_{k=1}^n k P(X = k) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k P(X = k).$$

Il s'agit d'une somme triangulaire :

$$E(X) = \sum_{1 \leq i \leq k \leq n} P(X = k) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^n P(X = k).$$

On peut remarquer que l'on retrouve la formule $E(X) = \sum_{i=1}^n P(X \geq i)$, et ainsi utiliser la question précédente : $P(X \geq i) = 1 - P(X \leq i - 1)$.

Mais sinon :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^n \frac{2^{n-k}}{2^n - 1} = \frac{1}{2^n - 1} \sum_{i=1}^n \frac{2^{n-i} - 2^{-1}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n - 1} \left(\sum_{i=1}^n 2^{n-i+1} - n \right)$$

Finalement :

$$E(X) = 2 - \frac{n}{2^n - 1}$$

On peut vérifier cette formule pour $n = 1$ et $n = 2$.

20 Une urne contient n boules numérotées de 1 à n , avec $n \geq 1$. On tire une boule de l'urne, on la remet puis on en tire une seconde. On note X la variable aléatoire égale au plus petit numéro obtenu.

- Déterminer $X(\Omega)$, puis pour tout $k \in X(\Omega)$ la probabilité $P(X > k)$.
- En déduire la loi de X . Vérifier que l'on obtient bien une loi de probabilité.
- Calculer l'espérance de X .
- Répondre de nouveau aux questions précédentes en supposant que $n \geq 2$ et que l'on tire les deux boules sans remise.

- a. Les boules sont numérotées de 1 à n donc le plus petit numéro obtenu peut aller de 1 à n , et donc :

$$X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$$

On choisit pour modéliser l'expérience l'univers $\Omega = \llbracket 1, n \rrbracket^2$, c'est-à-dire l'ensemble des listes de deux entiers compris entre 1 et n .

Les boules sont supposées indiscernables donc cet univers est muni de la probabilité uniforme.

Soit $k \in X(\Omega)$. L'événement $(X = k)$ a lieu si et seulement si les deux numéros obtenus sont strictement supérieurs à k , c'est-à-dire s'il appartient à l'ensemble $\llbracket k + 1, n \rrbracket$. Cet ensemble contient $n - k$ éléments, donc par équiprobabilité :

$$P(X > k) = \frac{\text{Card}(X > k)}{\text{Card } \Omega} = \frac{(n - k)^2}{n^2}$$

On peut remarquer que cette formule est valable aussi pour $k = 0$.

- b. Soit $k \in X(\Omega)$. L'événement $(X = k)$ a lieu si et seulement si l'événement $(X > k - 1)$ a lieu mais pas l'événement $(X > k)$, donc :

$$P(X = k) = P(X > k - 1) - P(X > k)$$

Plus précisément :

$$\begin{aligned} \text{Comme} \quad (X = k) &= (X > k - 1) \setminus (X > k) \\ \text{alors} \quad P(X = k) &= P(X > k - 1) - P((X > k - 1) \cap (X > k)) \\ &= P(X > k - 1) - P(X > k) \end{aligned}$$

D'après la question précédente :

$$\forall k = 1, \dots, n \quad P(X = k) = \frac{(n - (k - 1))^2}{n^2} - \frac{(n - k)^2}{n^2} = \frac{2n - 2k + 1}{n^2}$$

On peut vérifier par exemple : $P(X = n) = \frac{1}{n^2}$. Effectivement le minimum est égal à n si et seulement si on a obtenu le couple (n, n) , lequel forme un événement élémentaire, et donc admet $\frac{1}{n^2}$ pour probabilité.

c. Calcul de l'espérance de X :

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{k=1}^n kP(X = k) = \sum_{k=1}^n k \frac{2n - 2k + 1}{n^2} \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (2nk + k - 2k^2) = \frac{1}{n^2} \left((2n + 1) \sum_{k=1}^n k - 2 \sum_{k=1}^n k^2 \right) \\
 &= \frac{1}{n^2} \left(\frac{(2n + 1)n(n + 1)}{2} - 2 \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} \right) \\
 &= \frac{(n + 1)(2n + 1)}{n} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{(n + 1)(2n + 1)}{6n}
 \end{aligned}$$

On peut remarquer que pour $n = 1$ on obtient $E(X) = 1$, ce qui est cohérent puisque dans ce cas le sac contient une et une seule boule numérotée 1.

d. Si on pioche deux boules sans remise alors le minimum est un entier compris entre 1 et $n - 1$. En effet on ne peut avoir deux fois la boule numéro n , au maximum on pioche la boule n et la boule $n - 1$ et donc le minimum est $n - 1$. Ainsi :

$$X(\Omega) = \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$$

L'univers Ω contient maintenant les parties à deux éléments de l'ensemble des n numéros, il est donc de cardinal $\binom{n}{2}$, et il est muni de la probabilité uniforme.

L'événement $(X > k)$ a lieu si et seulement si on pioche deux boules parmi les $(n - k)$ boules portant les numéros $(k + 1)$ à n , donc il est de cardinal $\binom{n-k}{2}$.

Par équiprobabilité :

$$P(X > k) = \frac{\binom{n-k}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)}$$

On peut remarquer que cette formule est valable aussi pour $k = 0$.

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 \forall k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket \quad P(X = k) &= P(X > k - 1) - P(X > k) \\
 &= \frac{(n - k + 1)(n - k)}{n(n - 1)} - \frac{(n - k)(n - k - 1)}{n(n - 1)} \\
 &= \frac{2(n - k)}{n(n - 1)}
 \end{aligned}$$

On remarque que cette formule est valable aussi pour $k = n$, puisque $P(X = n) = 0$.

On calcule l'espérance de X :

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{k=1}^{n-1} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{n-1} k \frac{2(n - k)}{n(n - 1)} \\
 &= \frac{2}{n(n - 1)} \sum_{k=1}^{n-1} (nk - k^2) = \frac{2}{n(n - 1)} \left(n \sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \right) \\
 &= \frac{2}{n(n - 1)} \left(n \frac{n(n - 1)}{2} - \frac{n(n - 1)(2n - 1)}{6} \right) = \frac{n + 1}{3}
 \end{aligned}$$

Si $n = 2$ alors cette espérance est égale à 1. Il s'agit du cas minimal, où l'urne ne contient que les boules numérotées 1 et 2. On pioche alors les deux boules, et donc le minimum est égal à 1, la loi de X est certaine.

On remarque que cette espérance est équivalente à $\frac{n}{3}$ lorsque n tend vers $+\infty$. Dans le cas du tirage avec remise on avait obtenu $E(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$ donc $E(X) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{2n^2}{6n} = \frac{n}{3}$.

En effet, si le nombre de boules est très grand alors le fait qu'il y ait remise ou non tend à perdre de son importance puisqu'on a peu de chances de piocher une boule déjà obtenue. Les deux espérances sont donc équivalentes lorsque n tend vers $+\infty$.

21 Soit a et n deux entiers tels que $0 \leq a \leq n$.

Soit k un entier tel que $k \leq a$ et $k \leq n - a$.

a. Démontrer par dénombrement la formule : $\sum_{i=0}^k \binom{a}{i} \binom{n-a}{k-i} = \binom{n}{k}$.

On possède un sac avec n boules dont a sont blanches. On pioche simultanément k boules dans ce sac. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

b. Déterminer la loi de X . Retrouver ainsi la formule de la question précédente.

c. Calculer son espérance.

a. Considérons un ensemble E à n éléments dont a ont une propriété particulière, par exemple un ensemble de n boules dont a sont blanches.

Soit $\mathcal{P}_k(E)$ l'ensemble des parties à k éléments de E . Cet ensemble est de cardinal $\binom{n}{k}$.

Soit i un entier tel que $0 \leq i \leq k$. On note $\mathcal{P}_k^i(E)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{P}_k(E)$ contenant exactement i boules blanches. On a alors une union disjointe

$$\mathcal{P}_k(E) = \bigcup_{i=0}^k \mathcal{P}_k^i(E).$$

Ceci donne :

$$\text{Card}(\mathcal{P}_k(E)) = \sum_{i=0}^k \text{Card}(\mathcal{P}_k^i(E)). \quad (3)$$

Tout élément de $F \in \mathcal{P}_k^i(E)$ contient i boules blanches et $k - i$ boules non-blanches, donc est l'union disjointe d'un sous-ensemble à i éléments de l'ensemble des boules blanches et d'un sous-ensemble à $k - i$ éléments de l'ensemble des boules non blanches.

Il existe $\binom{a}{i}$ sous-ensembles à i éléments d'un ensemble à a éléments et $\binom{n-a}{k-i}$ sous-ensembles à $k - i$ éléments d'un ensemble à $n - a$ éléments, ce qui montre que l'ensemble $\mathcal{P}_k^i(E)$ est de cardinal $\binom{a}{i} \times \binom{n-a}{k-i}$.

On peut être plus précis dans la justification : soit E_1 l'ensemble des boules blanches de E , et E_2 celui des boules non-blanches de E , si bien que $E = E_1 \cup E_2$, cette union étant disjointes. Alors l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}_k^i(E) &\longrightarrow \mathcal{P}_i(E_1) \times \mathcal{P}_{k-i}(E_2) \\ F &\longmapsto (F \cap E_1, F \cap E_2) \end{aligned}$$

est bijective, de réciproque :

$$g : \mathcal{P}_i(E_1) \times \mathcal{P}_{k-i}(E_2) \longrightarrow \mathcal{P}_k^i(E) \\ (F_1, F_2) \longmapsto F_1 \cup F_2.$$

On peut démontrer que ces deux applications sont bien définies et vérifient $f \circ g = \text{id}$, $g \circ f = \text{id}$.

Comme f est bijective alors :

$$\text{Card}(\mathcal{P}_k^i(E)) = \text{Card}(\mathcal{P}_i(E_1) \times \mathcal{P}_{k-i}(E_2)) \\ = \text{Card}(\mathcal{P}_i(E_1)) \times \text{Card}(\mathcal{P}_{k-i}(E_2)) = \binom{a}{i} \times \binom{n-a}{k-i}.$$

L'égalité (3) donne donc :

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{a}{i} \binom{n-a}{k-i}.$$

b. Déterminons d'abord $X(\Omega)$.

Pour tout entier i , l'événement $(X = i)$ peut avoir lieu si $0 \leq i \leq k$ car on pioche k boules.

De plus X est le nombre de boules blanches obtenues et $k - X$ est le nombre de boules non blanches obtenues, donc $0 \leq i \leq a$ et $0 \leq k - i \leq n - a$, ce qui donne $k - n + a \leq i \leq k$. Comme $k \leq a$ et $k \leq n - a$ alors ceci est le cas pour tout i tel que $0 \leq i \leq k$, et ainsi $X(\Omega) = \llbracket 0, k \rrbracket$.

Il s'agit du schéma hypergéométrique, donc la loi de X est :

$$\forall i \in X(\Omega) \quad P(X = i) = \frac{\binom{a}{i} \binom{n-a}{k-i}}{\binom{n}{k}}.$$

Par propriété :

$$\sum_{i \in X(\Omega)} P(X = i) = 1.$$

Ceci démontre de nouveau la formule de la question précédente.

c. Par définition l'espérance de X est :

$$E(X) = \sum_{i \in X(\Omega)} iP(X = i).$$

Ainsi :

$$E(X) = \frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{i=0}^k i \binom{a}{i} \binom{n-a}{k-i}$$

Soit $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$. Comme $i \leq k$ alors $i \leq a$ et donc :

$$i \binom{a}{i} = i \frac{a!}{i!(a-i)!} = \begin{cases} \frac{a!}{(i-1)!(a-i)!} & \text{si } i > 0 \\ 0 & \text{si } i = 0 \end{cases}$$

Si $i > 0$ alors :

$$i \binom{a}{i} = a \frac{(a-1)!}{(i-1)!(a-i)!} = a \binom{a-1}{i-1}.$$

Il s'agit de la formule du capitaine.

On en déduit :

$$\sum_{i=0}^k i \binom{a}{i} \binom{n-a}{k-i} = \sum_{i=1}^k a \binom{a-1}{i-1} \binom{n-a}{k-i} = a \sum_{j=0}^{k-1} \binom{a-1}{j} \binom{n-a}{k-j-1}$$

D'après la formule de la question a :

$$\sum_{j=0}^{k-1} \binom{a-1}{j} \binom{n-a}{k-j-1} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Donc :

$$E(X) = a \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}}$$

On obtient finalement :

$$E(X) = k \frac{a}{n}.$$

Remarques

Tout ce qui précède est valable sans les conditions $k \leq a$ et $k \leq n - a$, mais alors les bornes des sommes ne sont pas les mêmes.

La formule pour l'espérance est cohérente si $k = 0$, $k = 1$ et $k = n$.

En effet dans ce dernier cas on pioche toutes les boules de l'urne, donc la variable aléatoire X est constante égale à a .

De plus cette espérance est la même que lorsque les k tirages sont effectués avec remise. En effet dans ce cas X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(k, \frac{a}{n})$, d'espérance $E(X) = k \frac{a}{n}$. Voir chapitre C3 pour cette loi.