Lycée Bellevue – Toulouse **Année 2025-2026**
MPSI – Mathématiques

Programme de colles
Semaine 25
du 13 au 17 avril 2026

Questions de cours

Sauf mention explicite il faut connaître l'énoncé et la démonstration.

1. Soit $f : E \to F$ linéaire et $\mathscr{B}$ une base de E. Alors f est injective si et seulement si la famille $f(\mathscr{B})$ est libre.
2. Lemme : Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Soit E' un supplémentaire de $\ker f$ dans E. Alors $g : E' \to \operatorname{im} f$ qui à u associe $f(u)$ est un isomorphisme.
3. Théorème du rang, démonstration à l'aide du lemme précédent.
4. Premier corollaire du théorème du rang.

Exercices

Chapitre A12. Intégration

I. Continuité uniforme
II. Définition des intégrales
III. Propriétés
IV. Sommes de Riemann
V. Théorèmes
VI. Intégrales des fonctions complexes

Programme prévisionnel de la semaine suivante

Chapitres A12 (Intégration) et B10 (Dimension).

Chapitre A12. Intégration

I. Continuité uniforme

Définition, exemples. Si f est lipschitzienne alors elle est uniformément continue, si elle est uniformément continue alors elle est continue. Théorème de Heine.

II. Définition des intégrales

Subdivision d'un segment, fonctions en escalier, intégrales des fonctions en escalier. Continuité par morceaux, théorème d'approximation par une fonction en escalier. Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

III. Propriétés

Linéarité, croissance de l'intégrale. Si f est continue positive d'intégrale nulle sur un segment non réduit à un point alors f est nulle. Inégalité triangulaire, relation de Chasles.

IV. Sommes de Riemann

Méthodes des carrés et des trapèzes. Théorème : si f est continue alors les suites (R_n) et (S_n) convergent vers $\int_a^b f(t)dt$.

V. Théorèmes

Théorème fondamental et corollaire : toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive. Valeur moyenne, atteinte si f est continue. Exemples de fonctions définies par une intégrale.

Formule de Taylor avec reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange.

VI. Intégrales des fonctions complexes

Définition, inégalité triangulaire.