Lycée Bellevue – Toulouse **3 mai 2024**
MPSI – Mathématiques

Devoir Surveillé n°7

Durée : 3 heures – Calculatrices non autorisées

- *On rappelle qu'une grande attention est portée à la présentation, l'orthographe, la qualité de la rédaction.*
- *En général les symboles mathématiques ne doivent pas figurer dans une phrase.*
- *Les objets introduits doivent être présentés correctement.*
- *Les références au cours doivent être citées, de même que les questions précédentes si elles sont utilisées.*
- *Il est inutile de recopier l'énoncé.*
- *Les copies doivent être numérotées, leur nombre total indiqué.*
- *Les annotations au crayon ne sont pas prises en compte.*
- *Le barème et indicatif.*
- *Si un élève est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Problème d'analyse : L'intégrale de Gauss. *(21 points)*

Le but de ce problème est de définir et de calculer l'intégrale de Gauss.

On définit la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Partie A : Définition. *(6 points)*

1. Justifier que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   Donner sa dérivée et ses variations.
2. Démontrer que pour tout $x \geqslant 1$:

$$f(x) \leqslant f(1) + \int_1^x e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

3. En déduire que f admet une limite finie I en $+\infty$.

On note $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et on appelle cette limite *intégrale de Gauss.*

Partie B : Deux fonctions définies par des intégrales. *(8 points)*

Soit φ une fonction continue sur $[0,1]$, ne s'annulant pas.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose :

$$g(x) = \int_0^1 \frac{e^{x\varphi(t)}}{\varphi(t)}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad h(x) = \int_0^1 e^{x\varphi(t)}\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que les fonctions g et h sont bien définies.
2. Rappeler, sans démonstration, le théorème sur l'inégalité de Taylor-Lagrange.
3. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad |e^x - 1 - x| \leqslant \dfrac{x^2}{2} e^{|x|}$.
4. Démontrer que pour tout $(x,u) \in \mathbb{R}^2$ avec $u \neq 0$:

$$\left| \frac{g(x+u) - g(x)}{u} - h(x) \right| \leqslant \frac{|u|}{2} \int_0^1 |\varphi(t)| e^{(|x|+|u|)|\varphi(t)|}\,\mathrm{d}t.$$

5. (a) Justifier que $M = \mathrm{Sup}_{[0,1]} |\varphi|$ est bien défini.
   (b) Démontrer que pour tout $(x,u) \in \mathbb{R}^2$ avec $u \neq 0$:

$$\left| \frac{g(x+u) - g(x)}{u} - h(x) \right| \leqslant \frac{|u|}{2} M e^{(|x|+|u|)M}.$$

6. Démontrer que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner sa dérivée.

Partie C : Calcul. *(7 points)*

Dans cette partie on pose $\varphi(t) = -(1+t^2)$, et on définit les fonctions g et h comme dans la partie précédente.
On pose aussi $G : x \mapsto g(x^2)$.

1. Démontrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G'(x) = 2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-(tx)^2}\,\mathrm{d}t.$$

2. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad G'(x) = 2f'(x)f(x)$.
3. En déduire qu'il existe une constante K à préciser telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x)^2 = G(x) + K.$$

4. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad |G(x)| \leqslant e^{-x^2}$.
5. Conclure ce problème : calculer $I = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Problème d'algèbre : Noyaux emboîtés. *(21 points)*

Partie A : Suites d'entiers. *(4 points)*

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers croissante et majorée.
   Démontrer que (u_n) est stationnaire.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $(u_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ une suite finie strictement croissante d'entiers.
   (a) Démontrer que la suite $(v_k)_{0\leqslant k\leqslant n} = (u_k - k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est croissante.
   (b) Démontrer que si $u_0 = 0$ alors : $\forall k = 0, \dots, n \quad u_k \geqslant k$.

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et f un endomorphisme de E.
Pour tout entier naturel k on note $f^k = f \circ \cdots \circ f$ le composé k fois de f.
On convient que $f^0 = \mathrm{Id}_E$.

Partie B : Cas général. *(17 points)*

1. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\ker f^k \subseteq \ker f^{k+1}$
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on note $a_k = \dim(\ker f^k)$.
   Démontrer que la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est stationnnaire.
3. Justifier qu'il existe un plus petit entier naturel k tel que $a_k = a_{k+1}$.

Dans toute la suite de ce problème on note p cet entier.

4. Démontrer que la suite $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant p}$ est strictement croissante et en déduire que $p \leqslant n$.
5. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à p.
   (a) Démontrer que si $u \in \ker f^{k+1}$ alors $f^{k-p}(u) \in \ker f^{p+1}$.
   (b) En déduire que $\ker f^k = \ker f^{k+1}$.
   La suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc stationnaire à partir du rang p.
6. (a) Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\operatorname{im} f^{k+1} \subseteq \operatorname{im} f^k$.
   (b) Démontrer que $\operatorname{im} f^{p+1} = \operatorname{im} f^p$
7. Démontrer que $\operatorname{im} f^p$ et $\ker f^p$ sont supplémentaires dans E.
8. (a) Démontrer que $\operatorname{im} f^p$ et $\ker f^p$ sont stables par f.
   Ceci permet de définir les deux endomorphismes :

$$\begin{array}{rcl} f_1 : \operatorname{im} f^p & \longrightarrow & \operatorname{im} f^p \\ u & \longmapsto & f(u) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rcl} f_2 : \ker f^p & \longrightarrow & \ker f^p \\ u & \longmapsto & f(u). \end{array}$$

   (b) Démontrer que f_1 est un automorphisme et que $f_2^p = 0$.
9. Soit $\mathcal{B}$ une base adaptée à la somme directe $E = \operatorname{im} f^p \oplus \ker f^p$, et soit A la matrice de f dans cette base.
   Démontrer que A est une matrice par blocs de la forme $\left(\begin{smallmatrix} B & 0 \\ 0 & N \end{smallmatrix}\right)$, où B et N sont deux matrices carrées et les 0 sont des matrices nulles.
   Donner une forme similaire pour la matrice de f^p dans la base $\mathcal{B}$.