Lycée Bellevue – Toulouse **2 mai 2025**
MPSI – Mathématiques

Devoir Surveillé n°7

Durée : 3 heures – Calculatrices non autorisées

- *On rappelle qu'une grande attention est portée à la présentation, l'orthographe, la qualité de la rédaction.*
- *En général les symboles mathématiques ne doivent pas figurer dans une phrase.*
- *Les objets introduits doivent être présentés correctement.*
- *Les références au cours doivent être citées, de même que les questions précédentes si elles sont utilisées.*
- *Il est inutile de recopier l'énoncé.*
- *Les copies doivent être numérotées, leur nombre total indiqué.*
- *Les annotations au crayon ne sont pas prises en compte.*
- *Le barème est indicatif.*
- *Si un élève est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Problème 1. Endomorphismes cycliques. *(25 points)*

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. On note id l'identité de E.

Pour tout endomorphisme f de E on note $f^0 = \mathrm{id}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\quad f^{k+1} = f \circ f^k$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dit que f est *cyclique d'ordre* p s'il existe un vecteur u de E vérifiant les trois conditions :

(i) $f^p(u) = u$

(ii) La famille $(u, f(u), \ldots, f^{p-1}(u))$ est constituée d'éléments distincts.

(iii) La famille $(u, f(u), \ldots, f^{p-1}(u))$ est génératrice de E.

La famille $(u, f(u), \ldots, f^{p-1}(u))$ est alors appelé *cycle de* f.

Partie A. Exemples. *(9 points)*

Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1. Dans cette question $E = \mathbb{R}^2$. Soit $f : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & (-y, x). \end{array}$

   (a) Justifier que f est un endomorphisme de E.

   (b) En considérant le vecteur $e_1 = (1, 0)$ de E vérifier que f est cyclique et préciser son ordre.

2. Dans cette question E est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) engendré par les fonctions cos et sin : $E = \mathrm{Vect}\,(\cos, \sin)$.

   On suppose que $p \geqslant 3$ et pour tout élément $f \in E$ on note $t_p(f)$ la fonction $x \mapsto f\Big(x + \frac{2\pi}{p}\Big)$.

   (a) Donner, avec démonstration, la dimension de E.

   (b) Démontrer que t_p est un endomorphisme de E.

   (c) Soit $f = \cos$. Exprimer $t_p^k(f)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et démontrer que si j et k sont deux entiers tels que $0 \leqslant j < k < p$ alors $t_p^j(f) \neq t_p^k(f)$.

   (d) Démontrer que t_p est cyclique d'ordre p.

Partie B. Cas général. *(16 points)*

Dans cette partie E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie n, et f est un endomorphisme cyclique d'ordre p de E.

On note $(u, f(u), \ldots, f^{p-1}(u))$ un cycle de f.

1. Justifier que $p \geqslant n$.
2. Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\quad f^p(f^k(u)) = f^k(u)$.

   En déduire que $f^p = \mathrm{id}$, et que f est un automorphisme de E.
3. Soit $\quad F = \ker(f - \mathrm{id}), \quad G = \ker\,(\mathrm{id} + f + \cdots + f^{p-1}), \quad H = \mathrm{im}(f - \mathrm{id})$.

   (a) Justifier que F, G, H sont des sous-espaces vectoriels de E.

   Démontrer successivement que :

   (b) F et G sont en somme directe,

   (c) $H \subseteq G$,

   (d) $\dim(F + H) = n$,

   (e) F et G sont supplémentaires.
4. On note m le plus grand entier k tel que la famille $\Big(u, f(u), \ldots, f^{k-1}(u)\Big)$ est libre.

   (a) Justifier l'existence de m.

   (b) Démontrer que $f^m(u)$ est combinaison linéaire des vecteurs $u, f(u), \ldots, f^{m-1}(u)$.

   (c) Démontrer par récurrence que pour tout entier k positif $f^k(u)$ est combinaison linéaire des vecteurs $u, f(u), \ldots, f^{m-1}(u)$.

   (d) En déduire que $m = n$ et que la famille $(u, f(u), \ldots, f^{n-1}(u))$ est une base de E.
5. Soit g un endomorphisme de E commutant avec f, *i.e.,* tel que $f \circ g = g \circ f$.

   (a) Justifier qu'il existe une et une seule famille $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1})$ de scalaires telle que $g(u) = \alpha_0 u + \alpha_1 f(u) + \cdots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(u)$.

   Soit h l'endomorphisme de E défini par : $\quad h = \alpha_0 \mathrm{id} + \alpha_1 f + \cdots + \alpha_{n-1} f^{n-1}$.

   (b) Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\quad h(f^k(u)) = g(f^k(u))$.

   En déduire que $g = h$.

   (c) Quel est l'ensemble des endomorphismes de E commutant avec f ?

Problème 2. Développement asymptotique de la série harmonique. *(19 points)*

Partie A. *(10 points)*

On définit la fonction $f : \begin{array}{rcl}]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1} \end{array}$.

1. Démontrer que f est prolongeable par continuité sur $[0,1]$.

On note toujours f la fonction prolongée obtenue.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

2. Démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
3. Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1]$.
4. On définit la fonction $h : t \mapsto tf'(t)$.
   (a) Démontrer que la fonction h est prolongeable en une fonction continue sur $[0,1]$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,1]$. Démontrer que :

$$\int_x^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2(n+1)} - \frac{x^{n+1}f(x)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_x^1 t^n h(t)\,\mathrm{d}t.$$

   (c) Justifier que $\displaystyle\int_0^x t^n f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $\displaystyle\int_0^x t^n h(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
   (d) En déduire un équivalent simple de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie B. *(7 points)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $g_n : \begin{array}{rcl}]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{t^n-1}{\ln t} \end{array}$.

1. Justifier que la fonction g_n est prolongeable par continuité à $[0,1]$.
   On note toujours g_n la fonction ainsi prolongée.

Pour tout $x \in]0,1[$ on pose $J_n(x) = \displaystyle\int_x^{x^{n+1}} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

2. Justifier que la fonction J_n est bien définie sur $]0,1[$ et de classe $\mathscr{C}^1$. Donner sa dérivée.
3. En remarquant que $\frac{1}{\ln t} = f(t) + \frac{1}{t-1}$, déterminer les limites de J_n en 0 et en 1.
4. En déduire que J_n est prolongeable à $[0,1]$ en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, puis démontrer que $\displaystyle\int_0^1 g_n(t)\,\mathrm{d}t = \ln(n+1)$.

Partie C. *(2 points)*

Soit $\gamma = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $H_n = \ln(n+1) - \displaystyle\int_0^1 (t^n - 1)f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. En déduire un réel a tel que : $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.