Lycée Bellevue – Toulouse **17 avril 2026**
MPSI – Mathématiques

Devoir Surveillé n°7

Durée : 3 heures – Calculatrices non autorisées.

- *On rappelle qu'une grande attention est portée à la présentation, l'orthographe, la qualité de la rédaction.*
- *En général les symboles mathématiques ne doivent pas figurer dans une phrase.*
- *Les objets introduits doivent être présentés correctement.*
- *Les références au cours doivent être citées, de même que les questions précédentes si elles sont utilisées.*
- *Il est inutile de recopier l'énoncé.*
- *Les copies doivent être numérotées, leur nombre total indiqué.*
- *Les annotations au crayon ne sont pas prises en compte.*
- *Le barème est indicatif.*
- *Si un élève est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Problème d'analyse : L'intégrale de Dirichlet. *(22 points)*

Le but de ce problème est de démontrer l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

Dans la première partie on définit cette intégrale généralisée, dans la seconde partie on calcule sa valeur.

On note $f : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$

Partie A. *(10 points)*

1. (a) Justifier que f admet un prolongement par continuité à $\mathbb{R}$.
   On note dorénavant f ce prolongement.
   (b) Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie.

Pour tout $x \geqslant 2\pi$ on pose :

$$F(x) = \int_{2\pi}^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad G(x) = \int_{2\pi}^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

2. Démontrer que pour tout $x \geqslant 2\pi$:

$$F(x) = \frac{1-\cos x}{x} + G(x)$$

3. (a) Justifier que G est monotone sur $[2\pi, +\infty[$.
   (b) Démontrer que pour tout $x \geqslant 2\pi$:

$$G(x) \leqslant \int_{2\pi}^{x} \frac{2\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \frac{1}{\pi}$$

4. (a) Démontrer que F admet une limite finie en $+\infty$.
   (b) Justifier l'existence de $\lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.
   Cette limite est notée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Partie B. *(12 points)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note :

$$g_n : t \mapsto \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} \qquad \text{et} \qquad h_n : t \mapsto \frac{\sin((2n+1)t)}{t}.$$

On admet que les fonctions g_n et h_n sont prolongeables par continuité en 0 et qu'ainsi prolongées elles sont continues sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

1. (a) Énoncer la formule de transformation de somme en produit pour $\sin p - \sin q$ et la démontrer.
   (b) Démontrer que la suite d'intégrales $\left(\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} g_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et donner sa valeur.
2. On pose $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin t}$
   Démontrer que φ est prolongeable par continuité en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, déterminer $\varphi(0)$ et $\varphi'(0)$.
3. Justifier l'existence de $M = \operatorname{Sup}_{\left[0, \frac{\pi}{2}\right]} |\varphi'|$ et démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t) \sin((2n+1)t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{\pi M}{2(2n+1)}$$

4. Démontrer que la suite d'intégrales $\left(\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} h_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
5. Déterminer une relation simple entre $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}+n\pi} f$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} h_n$.
   En déduire : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

Problème d'algèbre. *(24 points)*

Si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E et k un entier naturel strictement positif alors f^k désigne le composé k fois $f \circ \cdots \circ f$, et f^0 est l'identité de E.

Ce problème étudie les endomorphismes réels tels que $f^3 = \mathrm{Id}_E$. La première partie montre un exemple, la seconde traite le cas général.

On notera bien que le corps de base est $\mathbb{R}$ dans tout le problème.

Partie A. *(9 points)*

On note $E = \mathbb{R}^3$ et on considère l'application :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (-2x + y + 2z, z, -3x + 2y + 2z). \end{array}$$

1. Justifier que f est un endomorphisme de E.
2. Soit e_1 le premier vecteur de la base canonique de E. Calculer $f(e_1)$ et $f^2(e_1)$ puis démontrer que la famille $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est une base de E.
3. Calculer $f^3(e_1)$, puis démontrer que $f^3 = \mathrm{Id}_E$.
4. Donner une base de $F = \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et de $G = \mathrm{im}(f - \mathrm{Id}_E)$.
5. Démontrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Partie B. *(15 points)*

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie, et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = \mathrm{Id}_E$.

On pose $p = \frac{1}{3}(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$

1. Démontrer que p est un projecteur.

Soit $F = \mathrm{im}\, p$ et $G = \ker p$.

2. Démontrer que $F = \ker(f - \mathrm{Id}_E)$.
3. Démontrer que $\mathrm{im}(f - \mathrm{Id}_E) \subseteq G$ et en déduire que $G = \mathrm{im}(f - \mathrm{Id}_E)$.
4. Démontrer que F et G sont stables par f. Quelle est la restriction de f à F ?

Le but de la suite est de démontrer que G est de dimension paire.

On note $g : G \to G$ la restriction de f à G, et n la dimension de G.

5. Justifier que $g^2 = -g - \mathrm{Id}_G$
6. Soit u un vecteur non-nul de G. Démontrer que la famille $(u, g(u))$ est libre.
7. Soit H un sous-espace vectoriel de G stable par g.

   On suppose qu'il existe un vecteur u dans $G \setminus H$, et on note $K = \mathrm{Vect}\,(u, g(u))$.

   D'après la question précédente la famille $(u, g(u))$ est une base de K.

   (a) Soit v un vecteur de K, de coordonnées (α, β) dans la base $(u, g(u))$. Donner les coordonnées de $g(v)$ puis du vecteur $w = (\alpha - \beta)v - \beta g(v)$ dans la base $(u, g(u))$.

   (b) En déduire que H et K sont en somme directe : $H \cap K = \{0_E\}$.
8. Soit M l'ensemble des entiers naturels k tels qu'il existe une famille libre $(u_1, g(u_1), u_2, g(u_2), \ldots, u_k, g(u_k))$ d'éléments de G.

   (a) Démontrer que M admet un maximum, que l'on note m.

   (b) Démontrer que $n = 2m$, et donc que n est pair.