

## Corrigé du Devoir Surveillé n°7

**Problème d'analyse : L'intégrale de Dirichlet.**

(22 points)

**Partie A.**

(10 points)

1. (a) (1 point) La fonction  $f \mapsto \frac{\sin t}{t}$  est définie sur  $\mathbb{R}^*$ , et par quotient elle est continue. L'équivalence usuelle  $\sin t \underset{(0)}{\sim} t$  montre que sa limite en 0 est 1, donc elle est prolongeable par continuité en 0 en posant  $f(0) = 1$ .

(b) (1 point) On a remplacé  $f$  par son prolongement par continuité, c'est-à-dire qu'on a ajouté la valeur  $f(0) = 1$ .

La fonction  $f$  est alors continue sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  elle est donc continue sur le segment  $[0, x]$  ou  $[x, 0]$ , et donc l'intégrale  $\int_0^x f(t) dt$  est définie.

2. (1 point) Pour tout  $t \in [2\pi, x]$  posons  $u(t) = 1 - \cos t$  et  $v(t) = \frac{1}{t}$ .

Ces deux fonctions sont définies et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'intervalle  $[2\pi, x]$ , de dérivées  $u'(t) = \sin t$  et  $v'(t) = -\frac{1}{t^2}$ .

Par intégration par parties :

$$F(x) = \int_{2\pi}^x \frac{\sin t}{t} dt = \left[ \frac{1 - \cos t}{t} \right]_{2\pi}^x + \int_{2\pi}^x \frac{1 - \cos t}{t^2} dt = \frac{1 - \cos x}{x} + G(x)$$

L'égalité demandée est démontrée.

3. (a) (2 points) La fonction  $g : x \mapsto \frac{1 - \cos x}{x^2}$  est définie et continue sur l'intervalle  $[2\pi, +\infty[$ . D'après le théorème fondamental la fonction  $G$  est une primitive de  $g$  sur  $[2\pi, +\infty[$ .

En particulier  $G$  est dérivable, de dérivée  $g$ .

Pour tout  $x \in [2\pi, +\infty[$ , comme  $\cos x \leq 1$  alors  $\frac{1 - \cos x}{x^2} \geq 0$ , donc  $g'(x) \geq 0$ .

Ainsi  $G$  est croissante sur  $[2\pi, +\infty[$ .

(b) (2 points) Soit  $x \in [2\pi, +\infty[$ .

Pour tout  $t \in [2\pi, x]$  comme  $\cos t \geq -1$  alors :  $1 - \cos t \leq 2$

De plus  $t^2$  est strictement positif, ce qui montre que :

$$\forall t \in [2\pi, x] \quad \frac{1 - \cos t}{t^2} \leq \frac{2}{t^2}$$

Par croissance de l'intégrale, comme  $2\pi \leq x$  :

$$\int_{2\pi}^x \frac{1 - \cos t}{t^2} dt \leq \int_{2\pi}^x \frac{2}{t^2} dt$$

On calcule :

$$\int_{2\pi}^x \frac{2}{t^2} dt = \left[ -\frac{2}{t} \right]_{2\pi}^x = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{x}$$

Comme  $x$  étant positif on en déduit :

$$\forall x \in [2\pi, +\infty[ \quad G(x) \leq \int_{2\pi}^x \frac{2}{t^2} dt \leq \frac{1}{\pi}$$

4. (a) (2 points) La fonction  $G$  est croissante sur l'intervalle  $[2\pi, +\infty]$  et majorée par  $\frac{1}{\pi}$ . Par théorème de la limite monotone  $G$  admet une limite finie en  $+\infty$ .

De plus, comme :

$$\forall x \in [2\pi, +\infty] \quad 0 \leq \frac{1 - \cos x}{x} \leq \frac{2}{x}$$

alors par théorème d'encadrement la fonction  $x \mapsto \frac{1 - \cos x}{x}$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

On a démontré que :  $\forall x \in [2\pi, x] \quad F(x) = \frac{1 - \cos x}{x} + G(x)$

Les deux fonctions de droite admettant une limite finie en  $+\infty$ , par somme  $F$  admet une limite finie en  $+\infty$ .

- (b) (1 point) D'après la relation de Chasles :

$$\forall x \in [2\pi, +\infty[ \quad \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt + F(x)$$

Comme  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt$  est un réel et  $F$  admet une limite finie en  $+\infty$  alors par somme la fonction  $x \mapsto \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$  admet une limite finie en  $+\infty$ .

## Partie B.

(12 points)

1. (a) (1 point) Pour tous réels  $p$  et  $q$  :

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

Pour démontrer ceci on utilise la factorisation par l'angle moyen :

$$\begin{aligned} \sin p - \sin q &= \operatorname{Im} (e^{ip} - e^{iq}) \\ &= \operatorname{Im} \left( e^{i\frac{p+q}{2}} \left( e^{i\frac{p-q}{2}} - e^{-i\frac{p-q}{2}} \right) \right) = \operatorname{Im} \left( e^{i\frac{p+q}{2}} 2i \sin \frac{p-q}{2} \right) \\ &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \end{aligned}$$

- (b) (2 points) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_n(t) dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_{n-1}(t) dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (g_n(t) - g_{n-1}(t)) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t) - \sin((2n-1)t)}{\sin t} dt \end{aligned}$$

En utilisant la formule de la question précédente :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_n(t) dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_{n-1}(t) dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos(2nt) \sin t}{\sin t} dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2nt) dt \\ &= \left[ \frac{\sin(2nt)}{n} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin(n\pi) - 0}{n} = 0 \end{aligned}$$

Ceci montre que  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g_{n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_n$ , donc la suite  $\left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante.

On calcule  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 = \frac{\pi}{2}$ , donc la suite est constante égale à  $\frac{\pi}{2}$ .

2. (2 points) La fonction  $\varphi : t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'intervalle  $]0, \frac{\pi}{2}[$ . Elle admet le développement limité suivant en 0 :

$$\varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t - \frac{t^3}{3!} + o_0(t^3)} = \frac{-\frac{t^3}{6} + o_0(t^3)}{t^2 - \frac{t^4}{6} + o_0(t^4)} = \frac{-\frac{t}{6} + o_0(t)}{1 - \frac{t^2}{6} + o_0(t^2)} = -\frac{t}{6} + o_0(t)$$

Ceci montre que la fonction  $\varphi$  est prolongeable par continuité en 0, en posant  $\varphi(0) = 0$ . Ceci montre aussi que  $\varphi$  est dérivable en 0, de dérivée  $\varphi'(0) = -\frac{1}{6}$ , mais ne justifie pas la continuité de  $\varphi'$ .

Pour ceci on utilise le théorème de limite de la dérivée. La dérivée de  $\varphi$  sur l'intervalle  $]0, \frac{\pi}{2}[$  est :

$$\forall t \in ]0, \frac{\pi}{2}[ \quad \varphi'(t) = \frac{\cos t}{\sin^2 t} - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 \cos t - \sin^2 t}{t^2 \sin^2 t}$$

On calcule :

$$\begin{aligned} \varphi'(t) \underset{(0)}{\sim} \frac{t^2 \cos t - \sin^2 t}{t^4} &= \frac{t^2 \left(1 - \frac{t^2}{2} + o_0(t^2)\right) - \left(t - \frac{t^3}{6} + o_0(t^3)\right)^2}{t^4} \\ &= \frac{t^2 - \frac{t^4}{2} - t^2 + \frac{t^4}{3} + o_0(t^4)}{t^4} = -\frac{1}{6} + o_0(1) \end{aligned}$$

Ainsi  $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi'(t) = -\frac{1}{6}$ .

Or la fonction  $\varphi$  est continue sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , dérivable sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$ .

Par théorème de limite de la dérivée  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  en 0, de dérivée  $\varphi'(0) = -\frac{1}{6}$ .

Finalement  $\varphi$  prolongée par  $\varphi(0) = 0$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'intervalle  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

3. (3 points) Comme  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  alors  $\varphi'$  est continue.

Par théorème une fonction continue sur un segment est bornée, donc  $\varphi'$  est bornée sur le segment  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . De façon équivalente  $|\varphi'|$  est majorée, et donc elle admet une borne supérieure.

On note  $M = \text{Sup}_{[0, \frac{\pi}{2}]} |\varphi'|$ .

Soit  $v(t) = -\frac{\cos((2n+1)t)}{2n+1}$ . Les fonctions  $\varphi$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'intervalle  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , de dérivées  $\varphi'$  et  $v' : t \mapsto \sin((2n+1)t)$ .

Ceci permet d'appliquer le théorème d'intégration par parties :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t) \sin((2n+1)t) dt = \left[ \varphi(t) \frac{\cos((2n+1)t)}{(2n+1)} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi'(t) \frac{\cos((2n+1)t)}{2n+1} dt$$

Comme  $\varphi(t) = 0$  alors :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t) \sin((2n+1)t) dt = \frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi'(t) \cos((2n+1)t) dt \quad (1)$$

Par inégalité triangulaire :

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi'(t) \cos((2n+1)t) dt \right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi'(t) \cos((2n+1)t)| dt \quad (2)$$

Comme  $M$  est un majorant de  $|\varphi'(t)|$  alors :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad |\varphi'(t) \cos((2n+1)t)| = |\varphi'(t)| |\cos((2n+1)t)| \leq M \times 1$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi'(t) \cos((2n+1)t)| dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} M dt = \frac{\pi M}{2} \quad (3)$$

Les égalités et inégalités (1), (2) et (3) donnent par transitivité :

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t) \sin((2n+1)t) dt \right| \leq \frac{\pi M}{2(2n+1)}$$

C'est le résultat attendu.

4. (2 points) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Par définition de  $\varphi$  et linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t) \sin((2n+1)t) dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\sin((2n+1)t)}{t} - \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} \right) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} h_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_n \end{aligned}$$

Comme la suite des intégrales  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g_n$  est constante égale à  $\frac{\pi}{2}$  alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} h_n = \frac{\pi}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t) \sin((2n+1)t) dt$$

L'inégalité de la question précédente montre par théorème d'encadrement que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t) \sin((2n+1)t) dt \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

On en déduit :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} h_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

La suite  $\left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} h_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge donc vers  $\frac{\pi}{2}$ .

5. (2 points) On applique le changement de variable  $u = (2n + 1)t$  à l'intégrale  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} h_n$ .

La fonction  $u : t \mapsto (2n + 1)t$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , de dérivée  $\frac{du}{dt} = 2n + 1$ .

Ainsi  $dt = \frac{du}{2n+1}$  puis par changement de variable :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} h_n(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{\frac{u}{2n+1}} \frac{du}{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2} + n\pi} \frac{\sin u}{u} du$$

On a démontré que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2} + n\pi} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h_n$$

Par composition de limites, comme  $\frac{\pi}{2} + n\pi$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2} + n\pi} \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

Finalement, comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} h_n = \frac{\pi}{2}$  alors  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ .

### Problème d'algèbre.

(24 points)

#### Partie A.

(9 points)

1. (1 point) Les trois composantes de  $f$  sont de la forme  $(x, y, z) \mapsto ax + by + cz$  avec  $a, b, c$  réels, donc ce sont des formes linéaires, et ainsi  $f$  est une application linéaire.

De plus l'image par  $f$  de tout vecteur de  $E$  est un vecteur de  $E$  donc  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .

2. (2 points) On rappelle que  $e_1 = (1, 0, 0)$ .

On calcule alors  $f(e_1) = (-2, 0, -3)$  puis  $f^2(e_1) = f(-2, 0, -3) = (-2, -3, 0)$ .

Soit  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 f(e_1) + \lambda_3 f^2(e_1) = 0_E$ . Alors :

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ \quad \quad \quad - 3\lambda_3 = 0 \\ \quad \quad - 3\lambda_2 \quad \quad = 0 \end{cases}$$

Ceci implique  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ .

En conséquence la famille  $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$  est libre.

Or c'est une famille de trois vecteurs de  $E$  qui est de dimension 3, donc c'est une famille libre maximale, et par théorème c'est donc une base de  $E$ .

3. (2 points) On calcule  $f^3(e_1) = f(-2, -3, 0) = (1, 0, 0) = e_1$ .

On en déduit :  $f^3(f(e_1)) = f(f^3(e_1)) = f(e_1)$

$$f^3(f^2(e_1)) = f^2(f^3(e_1)) = f^2(e_1)$$

Ainsi pour tout élément  $u$  de la base  $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$  de  $E$  on a  $f^3(u) = u$ , i.e.,  $f^3(u) = \text{Id}_E(u)$ .

Les applications linéaires  $f^3$  et  $\text{Id}_E$  coïncident sur une base de  $E$ . Une application linéaire est uniquement déterminée par l'image d'une base, donc  $f^3 = \text{Id}_E$ .

4. (2 points) Soit  $u = (x, y, z)$  un vecteur de  $E$ . On calcule :

$$(f - \text{Id}_E)(u) = f(u) - u = (-3x + y + 2z, -y + z, -3x + 2y + z)$$

On en déduit, toujours pour tout  $u = (x, y, z) \in E$  :

$$u \in \ker(f - \text{Id}_E) \iff \begin{cases} -3x + y + 2z = 0 \\ -y + z = 0 \\ -3x + 2y + z = 0 \end{cases} \iff x = y = z$$

Ainsi  $\ker(f - \text{Id}_E) = \{(z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 1, 1))$ .

Le vecteur  $(1, 1, 1)$  est non-nul donc il forme une famille libre, celle-ci est génératrice de  $\ker(f - \text{Id}_E)$  donc c'est une base de  $\ker(f - \text{Id}_E)$ .

Pour l'image de  $(f - \text{Id}_E)$  :

$$\begin{aligned} \text{im}(f - \text{Id}_E) &= \{(-3x + y + 2z, -y + z, -3x + 2y + z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \text{Vect}((-3, 0, -3), (1, -1, 2), (2, 1, 1)) \\ &= \text{Vect}((1, 0, 1), (1, -1, 2), (2, 1, 1)) \\ &= \text{Vect}((1, 0, 1), (0, -1, 1), (1, 1, 0)) \end{aligned}$$

On remarque que le second vecteur est différence des deux autres, donc :

$$\text{im}(f - \text{Id}_E) = \text{Vect}((1, 0, 1), (1, 1, 0))$$

Soit  $v_1 = (1, 0, 1)$  et  $v_2 = (1, 1, 0)$ . La famille  $(v_1, v_2)$  est génératrice de  $\text{im}(f - \text{Id}_E)$ , elle est libre car  $v_1$  et  $v_2$  ne sont pas colinéaires donc c'est une base de  $\text{im}(f - \text{Id}_E)$ .

5. (2 points) Les bases de  $F$  et  $G$  obtenues dans la question précédente montrent que  $\dim F = 1$  et  $\dim G = 2$ . Ceci donne  $\dim F + \dim G = \dim E$  car  $E$  est de dimension 3.

Soit  $v$  un élément de  $F \cap G$ .

Alors  $v \in G = \text{im}(f - \text{Id}_E)$  donc il existe  $u \in E$  tel que  $v = (f - \text{Id}_E)(u) = f(u) - u$ .

De plus  $v \in F = \ker(f - \text{Id}_E)$  donc  $(f - \text{Id}_E)(v) = 0$ , puis  $f(v) = v$ .

On utilise la linéarité de  $f$  :

$$\begin{aligned} v = f(u) - u \quad \text{et} \quad f(v) = v &\implies f^2(u) - f(u) = f(u) - u \\ &\implies f^2(u) = 2f(u) - u \\ &\implies f^3(u) = 2f^2(u) - f(u) = 3f(u) - 2u \\ &\implies u = 3f(u) - 2u \quad \text{car} \quad f^3 = \text{Id}_E \\ &\implies f(u) = u \quad \text{et donc} \quad v = 0_E \end{aligned}$$

On a donc démontré que  $F \cap G \subseteq \{0_E\}$ . L'inclusion réciproque est évidente car  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ , et donc  $F \cap G = \{0_E\}$ .

Comme  $F \cap G = \{0_E\}$  et  $\dim F + \dim G = \dim E$  alors par théorème  $E = F \oplus G$ , *i.e.*,  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$ .

**Partie B.**

(15 points)

1. (1 point) On utilise la bilinéarité de la composition des endomorphismes :

$$p \circ p = \frac{1}{9}(f^2 + f + \text{Id}_E) \circ (f^2 + f + \text{Id}_E) = \frac{1}{9}(f^4 + 2f^3 + 3f^2 + 2f + \text{Id}_E)$$

Comme  $f^3 = \text{Id}_E$  alors :

$$p \circ p = \frac{1}{9}(f + 2\text{Id}_E + 3f^2 + 2f + \text{Id}_E) = \frac{1}{3}(f^2 + f + \text{Id}_E) = p$$

Comme  $p \circ p = p$  alors par théorème  $p$  est un projecteur.

2. (2 points) Soit  $F = \text{im } p$ . On démontre que  $F = \ker(f - \text{Id}_E)$  par double inclusion.

Soit  $u \in \text{im } p$ . Alors il existe  $v \in E$  tel que  $u = p(v) = \frac{1}{3}(f^2(v) + f(v) + v)$ . Alors :

$$(f - \text{Id}_E)(u) = f(u) - u = \frac{1}{3}(f^3(u) + f^2(u) + f(u)) - \frac{1}{3}(f^2(u) + f(u) + u)$$

Comme  $f^3 = \text{Id}_E$  alors  $(f - \text{Id}_E)(u) = 0_E$ , et donc  $u \in \ker(f - \text{Id}_E)$ .

Ceci démontre que  $\text{im } p \subseteq \ker(f - \text{Id}_E)$ .

Soit maintenant  $u \in \ker(f - \text{Id}_E)$ . Alors  $(f - \text{Id}_E)(u) = 0_E$  donc  $f(u) = u$ .

Alors  $p(u) = \frac{1}{3}(f^2(u) + f(u) + u) = \frac{1}{3}(u + u + u) = u$ , ce qui montre que  $u \in \text{im } p$ .

Ainsi  $\ker(f - \text{Id}_E) \subseteq \text{im } p$ .

On a démontré par double inclusion que  $\text{im } p = \ker(f - \text{Id}_E)$ .

3. (3 points) Soit  $v \in \text{im}(f - \text{Id}_E)$ . Alors il existe  $u \in E$  tel que  $v = (f - \text{Id}_E)(u)$ , ce qui donne  $v = f(u) - u$  puis :

$$\begin{aligned} p(v) &= \frac{1}{3}(f^2(v) + f(v) + v) = \frac{1}{3}(f^3(u) - f^2(u) + f^2(u) - f(u) + f(u) - u) \\ &= \frac{1}{3}(f^3(u) - u) = 0_E \quad \text{car} \quad f^3 = \text{Id}_E \end{aligned}$$

Comme  $p(v) = 0_E$  alors  $v \in \ker p$ .

On a démontré que  $\text{im}(f - \text{Id}_E) \subseteq \ker p$ .

Comme  $(f - \text{Id}_E)$  et  $p$  sont deux endomorphismes de  $E$ , lequel est de dimension finie, alors d'après le théorème du rang :

$$\dim E = \dim \ker(f - \text{Id}_E) + \dim \text{im}(f - \text{Id}_E) = \dim \ker p + \dim \text{im } p$$

On a démontré dans la question précédente que  $\text{im } p = \ker(f - \text{Id}_E)$ , donc :

$$\dim \text{im}(f - \text{Id}_E) = \dim \ker p$$

Or on sait que  $\text{im}(f - \text{Id}_E) \subseteq \ker p$ , donc par théorème  $\text{im}(f - \text{Id}_E) = \ker p$ .

4. (2 points) Soit  $u \in F$ . Alors  $u \in \ker(f - \text{Id}_E)$  donc  $(f - \text{Id}_E)(u) = 0_E$  puis  $f(u) = u$ . Ceci implique que  $f(u) \in F$ . De plus la restriction  $f : F \rightarrow F$  est l'identité de  $F$ , car  $f(u) = u$  pour tout  $u \in F$ .

Soit  $u \in G$ . Alors  $u \in \ker p$  donc  $p(u) = 0$  puis :

$$\begin{aligned} p(f(u)) &= \frac{1}{3}(f^2 + f + \text{Id}_E)(f(u)) = \frac{1}{3}(f^3(u) + f^2(u) + f(u)) \\ &= \frac{1}{3}(u + f^2(u) + f(u)) = p(u) = 0_E \end{aligned}$$

Ceci montre que  $f(u) \in \ker p = G$ .

Ainsi  $G$  est stable par  $f$  : si  $u \in G$  alors  $f(u) \in G$ .

On aurait aussi pu utiliser la question précédente :

Si  $u \in G$  alors  $u \in \text{im}(f - \text{Id}_E)$ , donc il existe  $v \in E$  tel que  $u = (f - \text{Id}_E)(v) = f(v) - v$ .

On a alors  $f(u) = f^2(v) - f(v)$ , ce qui peut écrire  $f(u) = (f - \text{Id}_E)(f(v))$ , et donc  $f(u) \in \text{im}(f - \text{Id}_E) = G$ .

5. (1 point) Comme  $G = \ker p$  et  $p = \frac{1}{3}(f^2 + f + \text{Id}_E)$  alors pour tout  $u \in G$  on a  $(f^2 + f + \text{Id}_E)(u) = 0$ , ce qui donne  $f^2(u) = -f(u) - u$ .

Pour tout  $u \in G$  par définition  $g(u) = f(u)$ , car  $g$  est la restriction de  $f$  à  $G$ , donc  $g^2(u) = -g(u) - u$ . Ceci montre bien que  $g^2 = -g - \text{Id}_G$ .

6. (2 points) Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux scalaires tels que  $\alpha u + \beta g(u) = 0_G$ .

Si  $\beta$  est non-nul alors  $g(u) = \lambda u$  avec  $\lambda = -\frac{\alpha}{\beta}$ .

Alors  $g^2(u) = \lambda g(u) = \lambda^2 u$ . Comme  $g^2 = -g - \text{Id}_G$  alors  $(\lambda^2 + \lambda + 1)u = 0_G$ .

Comme  $u$  est non-nul alors  $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ . Le discriminant de cette équation du second degré est strictement négatif, ce qui contredit le fait que  $\lambda$  est réel.

Cette contradiction montre que  $\beta = 0$ , donc  $\alpha u = 0_G$ , et comme  $u \neq 0_G$  alors  $\alpha = 0$ .

On a démontré que pour tous réels  $\alpha$  et  $\beta$ , si  $\alpha u + \beta g(u) = 0_G$  alors  $\alpha = \beta = 0$ .

La famille  $(u, g(u))$  est donc libre.

7. Par définition de  $K$  la famille  $(u, g(u))$  est génératrice de  $K$ . Comme  $u \notin H$  alors  $u$  est non-nul, donc la question précédente montre que la famille  $(u, g(u))$  est libre.

Ainsi la famille  $(u, g(u))$  est une base de  $K$ .

- (a) (1 point) Les coordonnées de  $v$  dans la base  $(u, g(u))$  sont  $(\alpha, \beta)$  donc  $v = \alpha u + \beta g(u)$ .

Par linéarité de  $g$  :  $g(v) = \alpha g(u) + \beta g^2(u)$ .

Comme  $g^2 = -g - \text{Id}_G$  alors  $g(v) = -\beta u + (\alpha - \beta)g(u)$ , et donc les coordonnées de  $g(v)$  dans la base  $(u, g(u))$  sont  $(-\beta, \alpha - \beta)$ .

On calcule  $w = (\alpha - \beta)v - \beta g(v) = (\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)u$ , donc les coordonnées de  $w$  dans la base  $(u, g(u))$  sont  $(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2, 0)$ .

(b) (1 point) Soit  $v$  un vecteur de  $H \cap K$ .

Alors  $v \in K$  donc il existe  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $g(v) = \alpha u + \beta g(u)$ .

De plus  $v \in H$ , et comme  $H$  est stable par  $g$  alors  $g(v) \in H$ . Comme  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $G$  alors il est stable par combinaisons linéaires et donc  $(\alpha - \beta)v - \beta g(v) \in H$ .

Ceci donne  $(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)u \in H$ .

Si  $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 \neq 0$  alors  $u \in H$ , ce qui est supposé faux, donc  $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = 0$ .

Comme  $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \frac{1}{2}\beta)^2 + \frac{3}{4}\beta^2$ , alors ceci implique  $\alpha = \beta = 0$ , donc  $v = 0$ .

Ceci montre que  $H \cap K \subseteq \{0_E\}$ .

L'inclusion réciproque est immédiate car  $H$  et  $K$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ , donc  $H \cap K = \{0_E\}$ .

Finalement  $H$  et  $K$  sont en somme directe.

8. (a) (1 point) Par définition  $M$  est une partie de  $\mathbb{N}$ .

La famille vide est libre, donc  $M$  contient au moins l'entier 0, et ainsi elle n'est pas vide.

Comme  $G$  est de dimension  $n$  alors toute famille libre contient au maximum  $n$  élément. Si une famille  $(u_1, g(u_1), u_2, g(u_2), \dots, u_k, g(u_k))$  est libre, comme elle contient  $2k$  éléments alors  $2k \leq n$ , et donc  $k \leq \frac{n}{2}$ .

Ainsi  $M$  est une partie non-vide majorée de  $\mathbb{N}$  donc elle admet un plus grand élément  $m$ , et de plus  $m \leq \frac{n}{2}$ .

(b) (1 point) On raisonne par l'absurde en supposant que  $m < \frac{n}{2}$ , i.e.,  $2m < n$ .

Comme  $m$  appartient à  $M$  alors il existe une famille libre  $(u_1, g(u_1), u_2, g(u_2), \dots, u_m, g(u_m))$  d'éléments de  $G$ .

Posons  $H = \text{Vect}(u_1, g(u_1), u_2, g(u_2), \dots, u_m, g(u_m))$ .

Pour tout  $u \in H$  il existe des scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  et  $\mu_1, \dots, \mu_k$  tels que :

$$u = \sum_{k=1}^m (\lambda_k u_k + \mu_k g(u_k))$$

Par linéarité :

$$g(u) = \sum_{k=1}^m (\lambda_k g(u_k) + \mu_k g^2(u_k))$$

Comme  $g^2 = -g - \text{Id}_G$  alors :

$$g(u) = \sum_{k=1}^m (\lambda_k g(u_k) - \mu_k g(u_k) - \mu_k u_k)$$

Ainsi  $g(u) \in H$ .

Ceci est valable pour tout  $u \in H$  donc  $H$  est stable par  $g$ .

La famille  $(u_1, g(u_1), u_2, g(u_2), \dots, u_m, g(u_m))$  est libre et génératrice de  $H$ , donc c'est une base de  $H$  et ainsi  $H$  est de dimension  $2m$ .

Or  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $G$ , et  $G$  est de dimension  $n$ . On a supposé que  $2m < n$ , donc on ne peut avoir  $H = G$ .

Il existe donc un vecteur  $u \in G \setminus H$ .

On pose  $K = \text{Vect}(u, g(u))$ . On peut appliquer le résultat de la question 7 car  $H$  est stable par  $g$  et  $u \in G \setminus H$ . Elle montre que la famille  $(u, g(u))$  est une base de  $K$  et que  $H$  et  $K$  sont en somme directe.

La famille  $(u_1, g(u_1), u_2, g(u_2), \dots, u_m, g(u_m))$  est une base de  $H$ , la famille  $(u, g(u))$  est une base de  $K$ , donc par théorème la famille

$$(u_1, g(u_1), u_2, g(u_2), \dots, u_m, g(u_m), u, g(u))$$

est une base de  $H + K$ .

Cette famille est libre, donc en posant  $u_{m+1} = u$  on obtient une famille libre

$$(u_1, g(u_1), u_2, g(u_2), \dots, u_m, g(u_m), u_{m+1}, g(u_{m+1}))$$

d'éléments de  $G$ . Ainsi  $m + 1 \in M$ .

Ceci contredit la maximalité de  $m$  dans  $M$ .

Cette contradiction montre que  $2m = n$ , donc  $n$  est pair.