Corrigé du Devoir Surveillé n°7

Problème d'analyse : L'intégrale de Gauss.

(21 points)

Partie A : Définition.

(6 points)

1. (2 points) On définit la fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto e^{-x^2}$.

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et continue.

En conséquence l'intégrale $\int_0^x \varphi(t) dt$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc la fonction f est bien définie.

D'après le théorème fondamental de l'analyse la fonction f est une primitive de φ .

Elle est donc dérivable de dérivée φ .

Comme $f' = \varphi$ et φ est continue alors f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Comme φ est strictement positive alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. (2 points) Soit $x \geq 1$. D'après la relation de Chasles :

$$f(x) = \int_0^1 e^{-t^2} dt + \int_1^x e^{-t^2} dt.$$

Comme $1 \leq x$ alors :

$$\forall t \in [1, x] \quad 1 \leq t \quad \text{donc} \quad -t^2 \leq -t \quad \text{puis} \quad e^{-t^2} \leq e^{-t}.$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_1^x e^{-t^2} dt \leq \int_1^x e^{-t} dt.$$

On en déduit :

$$\forall x \geq 1 \quad f(x) \leq f(1) + \int_1^x e^{-t} dt.$$

3. (2 points) On calcule, pour tout $x \geq 1$:

$$\int_1^x e^{-t} dt = \left[-e^{-t} \right]_1^x = e^{-1} - e^{-x}.$$

Comme $e^{-x} \geq 0$ alors :

$$\int_1^x e^{-t} dt \leq e^{-1}.$$

Ceci donne :

$$\forall x \geq 1 \quad f(x) \leq f(1) + e^{-1}.$$

La fonction f est donc majorée sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par le réel $f(1) + e^{-1}$.

Elle est croissante et majorée sur $[1, +\infty[$ donc par théorème de la limite monotone elle admet une limite finie en $+\infty$.

Partie B : Deux fonctions définies par des intégrales.

(8 points)

1. (1 point) Soit x un réel.La fonction $t \mapsto \varphi(t)$ est définie et continue sur $[0, 1]$.Par produit et composition la fonction $t \mapsto e^{x\varphi(t)}$ est définie sur $[0, 1]$ et continue.Comme φ ne s'annule pas sur $[0, 1]$ la fonction $t \mapsto \frac{e^{x\varphi(t)}}{\varphi(t)}$ est définie sur $[0, 1]$, et par quotient elle est continue.Les intégrales $\int_0^1 e^{x\varphi(t)} dt$ et $\int_0^1 \frac{e^{x\varphi(t)}}{\varphi(t)} dt$ sont donc définies.Ceci étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, les fonctions g et h sont définies sur $\mathbb{R}$.2. (1 point) Soit I un intervalle, n un entier naturel, f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I . Soit a un point de I et M un majorant de $|f^{(n+1)}|$. Alors :

$$\forall x \in I \quad \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

3. (1 point) Posons $n = 1$, $a = 0$, et soit f la fonction exponentielle.Soit x un réel. On note $I = [0, x]$ si $x \geq 0$ et $I = [x, 0]$ si $x < 0$.La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I , de dérivée seconde $f'' = \exp$.Cette dérivée est majorée par e^x si $x \geq 0$ et par 1 si $x < 0$, donc par e^{-x} dans ce cas.Elle est donc majorée par $e^{|x|}$ dans tous les cas.On pose donc $M = e^{|x|}$. Par application de l'inégalité de Taylor-Lagrange au point x :

$$|e^x - 1 - x| \leq M \frac{|x|^2}{2} = e^{|x|} \frac{x^2}{2}.$$

Il s'agit du résultat attendu.

4. (2 points) Soit $(x, u) \in \mathbb{R}^2$ avec $u \neq 0$. Par définition de g et h :

$$\frac{g(x+u) - g(x)}{u} - h(x) = \frac{1}{u} \left(\int_0^1 \frac{e^{(x+u)\varphi(t)}}{\varphi(t)} dt - \int_0^1 \frac{e^{x\varphi(t)}}{\varphi(t)} dt \right) - \int_0^1 e^{x\varphi(t)} dt.$$

Par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \frac{g(x+u) - g(x)}{u} - h(x) &= \int_0^1 \left(\frac{e^{x\varphi(t)} e^{u\varphi(t)} - e^{x\varphi(t)}}{u\varphi(t)} - e^{x\varphi(t)} \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{e^{x\varphi(t)}}{u\varphi(t)} (e^{u\varphi(t)} - 1 - u\varphi(t)) dt. \end{aligned}$$

Par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \left| \frac{g(x+u) - g(x)}{u} - h(x) \right| &\leq \int_0^1 \left| \frac{e^{x\varphi(t)}}{u\varphi(t)} (e^{u\varphi(t)} - 1 - u\varphi(t)) \right| dt \\ &= \int_0^1 \frac{e^{x\varphi(t)}}{|u\varphi(t)|} |e^{u\varphi(t)} - 1 - u\varphi(t)| dt. \end{aligned}$$

En utilisant la question précédente :

$$\forall t \in [0, 1] \quad \frac{e^{x\varphi(t)}}{|u\varphi(t)|} \left| e^{u\varphi(t)} - 1 - u\varphi(t) \right| \leq \frac{e^{x\varphi(t)}}{|u\varphi(t)|} \times \frac{(u\varphi(t))^2}{2} e^{|u\varphi(t)|}.$$

Sachant que $e^{x\varphi(t)} \leq e^{|x\varphi(t)|}$ et $\frac{(u\varphi(t))^2}{|u\varphi(t)|} = |u\varphi(t)|$:

$$\forall t \in [0, 1] \quad \frac{e^{x\varphi(t)}}{|u\varphi(t)|} \left| e^{u\varphi(t)} - 1 - u\varphi(t) \right| \leq \frac{|u\varphi(t)|}{2} e^{(|x|+|u|)|\varphi(t)}.$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{e^{x\varphi(t)}}{|u\varphi(t)|} \left| e^{u\varphi(t)} - 1 - u\varphi(t) \right| dt \leq \int_0^1 \frac{|u\varphi(t)|}{2} e^{(|x|+|u|)|\varphi(t)} dt.$$

Ceci donne, par linéarité de l'intégrale :

$$\left| \frac{g(x+u) - g(x)}{u} - h(x) \right| \leq \frac{|u|}{2} \int_0^1 |\varphi(t)| e^{(|x|+|u|)|\varphi(t)} dt. \quad (1)$$

5. (a) (0,5 point) La fonction φ est continue sur le segment $[0, 1]$ donc par théorème des valeurs extrêmes elle est bornée sur ce segment, et donc la fonction $|\varphi|$ admet un maximum sur $[0, 1]$, que l'on note M .

(b) (1,5 points) Par définition de M :

$$\forall t \in [0, 1] \quad |\varphi(t)| \leq M.$$

Comme $(|x| + |u|)$ est positif et la fonction exponentielle est croissante :

$$\forall t \in [0, 1] \quad e^{(|x|+|u|)|\varphi(t)} \leq e^{(|x|+|u|)M}.$$

Par produit de termes positifs :

$$\forall t \in [0, 1] \quad |\varphi(t)| e^{(|x|+|u|)|\varphi(t)} \leq M e^{(|x|+|u|)M}.$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 |\varphi(t)| e^{(|x|+|u|)|\varphi(t)} dt \leq \int_0^1 M e^{(|x|+|u|)M} dt.$$

La fonction $t \mapsto M e^{(|x|+|u|)M}$ est constante donc :

$$\int_0^1 M e^{(|x|+|u|)M} dt = M e^{(|x|+|u|)M}.$$

Par transitivité, en utilisant l'inégalité (1) :

$$\left| \frac{g(x+u) - g(x)}{u} - h(x) \right| \leq \frac{|u|}{2} M e^{(|x|+|u|)M}. \quad (2)$$

6. (1 point) Par composition la fonction $u \mapsto \frac{|u|}{2} M e^{(|x|+|u|)M}$ est continue, donc sa limite lorsque u tend vers 0 est sa valeur en $u = 0$:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{|u|}{2} M e^{(|x|+|u|)M} = 0$$

Par théorème d'encadrement, l'inégalité (2) donne :

$$\lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{g(x+u) - g(x)}{u} - h(x) \right) = 0.$$

De façon équivalente :

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{g(x+u) - g(x)}{u} = h(x).$$

La fonction g est donc dérivable en x , de dérivée $g'(x) = h(x)$.

Comme ceci est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $g' = h$.

Partie C : Calcul.

(7 points)

La fonction $\varphi : t \mapsto -(1+t^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas, donc on peut appliquer le résultat de la partie précédente : g est dérivable et $g' = h$.

1. (1 point) Les fonctions $x \mapsto x^2$ et g sont dérivables, donc par composition la fonction G est dérivable, et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad G'(x) = 2xg'(x^2) = 2xh(x^2).$$

Par définition de h et de φ :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad G'(x) = 2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt.$$

On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad G'(x) = 2x \int_0^1 e^{-x^2} e^{-x^2 t^2} dt = 2x e^{-x^2} \int_0^1 e^{-(tx)^2} dt.$$

Il s'agit du résultat attendu.

2. (1 point) On fixe un réel x et on applique le changement de variable $u = tx$ à l'intégrale. La fonction $t \mapsto tx$ est de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivée $\frac{du}{dt} = x$, donc $x dt = du$, puis :

$$2x e^{-x^2} \int_0^1 e^{-(tx)^2} dt = 2e^{-x^2} \int_0^1 e^{-(tx)^2} x dt = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du.$$

On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \int_0^x e^{-u^2} du$ et $f'(x) = e^{-x^2}$.

On en déduit bien :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad G'(x) = 2f'(x)f(x).$$

3. (2 points) La fonction $x \mapsto 2f'(x)f(x)$ est la dérivée de la fonction $x \mapsto f(x)^2$, et la fonction G' est celle de G . Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle alors il existe une constante réelle K telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x)^2 = G(x) + K.$$

En particulier pour $x = 0$ on obtient $f(0)^2 = G(0) + K$.

Or $f(0)^2 = \left(\int_0^0 e^{-t^2} dt\right)^2 = 0$, et :

$$G(0) = g(0) = \int_0^1 \frac{1}{\varphi(t)} dt = -\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = -\left[\arctan t\right]_0^1 = -\frac{\pi}{4}.$$

Ceci montre que $K = \frac{\pi}{4}$.

4. (1,5 points) Soit $x \in \mathbb{R}$. Par inégalité triangulaire :

$$|G(x)| = |g(x^2)| \leq \int_0^1 \left| \frac{e^{x^2\varphi(t)}}{\varphi(t)} \right| dt = \int_0^1 \frac{e^{x^2\varphi(t)}}{|\varphi(t)|} dt. \quad (3)$$

La fonction φ est la fonction $t \mapsto -(1+t^2)$, ce qui montre que :

$$\forall t \in [0, 1] \quad \varphi(t) \leq -1 \quad \text{et} \quad |\varphi(t)| \geq 1.$$

On en déduit :

$$\forall t \in [0, 1] \quad x^2\varphi(t) \leq -x^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{|\varphi(t)|} \leq 1.$$

Par application de la fonction exponentielle, qui est croissante, puis produit de termes positifs :

$$\forall t \in [0, 1] \quad \frac{e^{x^2\varphi(t)}}{|\varphi(t)|} \leq e^{-x^2}.$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{e^{x^2\varphi(t)}}{|\varphi(t)|} dt \leq \int_0^1 e^{-x^2} dt = e^{-x^2}.$$

Ceci est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc par transitivité l'inégalité (3) donne :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |G(x)| \leq e^{-x^2}. \quad (4)$$

5. (1,5 points) On sait que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = 0$.

Par théorème d'encadrement, l'inégalité (4) montre que : $G(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

On rappelle que l'on note $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Comme f est croissante et $f(0) = 0$ alors I est positive.

On a démontré que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x)^2 = G(x) + \frac{\pi}{4}$.

Par unicité de la limite on en déduit $I^2 = \frac{\pi}{4}$, donc $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Problème d'algèbre : Noyaux emboîtés. (21 points)**Partie A : Suites d'entiers.** (4 points)

1. (2 points) Par théorème, comme la suite (u_n) est croissante et majorée alors elle est convergente.

Soit ℓ sa limite. Par définition, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier N tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

En particulier pour $\varepsilon = \frac{1}{4}$, comme $\varepsilon > 0$ alors il existe un entier p tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq p \implies \ell - \frac{1}{4} \leq u_n \leq \ell + \frac{1}{4}.$$

L'intervalle $[\ell - \frac{1}{4}, \ell + \frac{1}{4}]$ est de largeur $\frac{1}{2}$, donc il contient au plus un seul entier.

Or il contient u_p , qui est un entier. Donc il ne contient pas d'autre entier.

Pour tout $n \geq p$, comme u_n est entier et appartient à cet intervalle alors $u_n = u_p$.

Ceci montre que la suite (u_n) est stationnaire en u_p .

2. (a) (1 point) Soit $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Alors :

$$v_{k+1} - v_k = u_{k+1} - (k+1) - u_n + k = (u_{k+1} - u_k) - 1.$$

Comme la suite $(u_k)_{0 \leq k \leq n}$ est strictement croissante alors $u_{k+1} - u_k > 0$.

Comme u_{k+1} et u_k sont entiers alors $u_{k+1} - u_k$ est entier, et donc $u_{k+1} - u_k \geq 1$.

Ceci donne $v_{k+1} - v_k \geq 0$, ceci pour tout $k = 0, \dots, n-1$, donc la suite $(v_k)_{0 \leq k \leq n}$ est croissante.

(b) (1 point) Si $u_0 = 0$ alors $v_0 = 0$.

La suite $(v_k)_{0 \leq k \leq n}$ est croissante donc pour tout $k = 0, \dots, n$: $v_k \geq v_0$.

Ceci donne $v_k \geq 0$ donc $u_k \geq k$.

Partie B : cas général. (17 points)

1. (1 point) Soit u un élément de $\ker f^k$. Alors $f^k(u) = 0_E$, puis :

$$f^{k+1}(u) = f(f^k(u)) = f(0_E) = 0_E$$

En effet f est linéaire donc $f(0_E) = 0_E$.

Ceci montre que u appartient au noyau de f^{k+1} .

L'inclusion $\ker f^k \subseteq \ker f^{k+1}$ est donc démontrée.

2. (2 points) L'inclusion de la question précédente donne :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \dim \ker f^k \leq \dim \ker f^{k+1} \quad \text{donc} \quad a_k \leq a_{k+1}.$$

La suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est donc croissante.

De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, comme f^k est un endomorphisme de E alors $\ker f^k$ est un sous-espace vectoriel de E , et donc :

$$\dim \ker f^k \leq \dim E.$$

Ceci donne $a_k \leq n$, donc la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est majorée par n .

La suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée donc par théorème elle converge.

Comme elle est composée d'entiers alors d'après la première question de la partie A ci-dessus elle est stationnaire.

3. (1 point) Soit N l'ensemble des entiers naturels k tels que $a_k = a_{k+1}$.
Alors N est une partie de $\mathbb{N}$. Elle est non-vidée car la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est stationnaire, *i.e.*, constante à partir d'un certain rang.
Toute partie non-vidée de $\mathbb{N}$ admet un élément minimal, donc N admet un élément minimal, que l'on note p .
4. (2 points) Nous savons que la suite $(a_k)_{0 \leq k \leq p}$ est croissante.
Par minimalité de p : $\forall k < p \quad a_k < a_{k+1}$.
Ceci montre que la suite $(a_k)_{0 \leq k \leq p}$ est strictement croissante.
Comme $f^0 = \text{Id}_E$ alors $\ker f^0 = \{0_E\}$, donc $a_0 = \dim \ker f^0 = 0$.
D'après la question 2(b) de la partie A : $\forall k = 0, \dots, p \quad a_k \geq k$.
En particulier $a_p \geq p$. Comme $a_p \leq n$ alors $p \leq n$.
5. (a) (1 point) Soit $u \in \ker f^{k+1}$. Alors $f^{k+1}(u) = 0_E$ donc :

$$f^{p+1}(f^{k-p}(u)) = (f^{p+1} \circ f^{k-p})(u) = f^{k+1}(u) = 0_E.$$

Ceci donne $f^{k-p}(u) \in \ker f^{p+1}$.

- (b) (1 point) Nous savons déjà que $\ker f^k \subseteq \ker f^{k+1}$.
Pour démontrer l'inclusion inverse considérons un élément u de $\ker f^{k+1}$.
D'après la question précédente $f^{k-p}(u) \in \ker f^{p+1}$.
Par définition de p on a $a_p = a_{p+1}$. On sait que $\ker f^p \subseteq \ker f^{p+1}$, donc par égalité des dimensions $\ker f^p = \ker f^{p+1}$.
Ainsi $f^{k-p}(u) \in \ker f^p$, ce qui donne $f^p(f^{k-p}(u)) = 0_E$, puis $f^k(u) = 0_E$, et enfin $u \in \ker f^k$.
On a démontré que $\ker f^{k+1} \subseteq \ker f^k$.
Par double inclusion : $\ker f^{k+1} = \ker f^k$.
6. (a) (1 point) Soit $u \in \text{im } f^{k+1}$. Alors il existe $v \in E$ tel que $u = f^{k+1}(v)$. Ceci s'écrit $v = f^k(f(v))$ et donc $u \in \text{im } f^k$.
On a démontré que $\text{im } f^{k+1} \subseteq \text{im } f^k$.
- (b) (1 point) On peut appliquer le théorème du rang aux endomorphismes f^p et f^{p+1} car E est de dimension finie. Il donne :

$$\begin{aligned} \dim E &= \dim \ker f^p + \dim \text{im } f^p \\ \text{et} \quad \dim E &= \dim \ker f^{p+1} + \dim \text{im } f^{p+1}. \end{aligned}$$

On sait que $\dim \ker f^p = \dim \ker f^{p+1}$, donc les deux égalités ci-dessus impliquent $\dim \text{im } f^p = \dim \text{im } f^{p+1}$.

D'après la question précédente $\text{im } f^{p+1} \subseteq \text{im } f^p$, donc par égalité des dimensions $\text{im } f^{p+1} = \text{im } f^p$.

7. (2 points) On démontre d'abord que $\text{im } f^p \cap \ker f^p = \{0_E\}$.

L'image et le noyau d'un endomorphisme de E sont des sous-espaces vectoriels de E , donc $\text{im } f^p$ et $\ker f^p$ sont des sous-espaces vectoriels de E , et ainsi ils contiennent son vecteur nul. On a donc $\{0_E\} \subseteq \text{im } f^p \cap \ker f^p$.

Réciproquement, considérons un élément u de $\text{im } f^p \cap \ker f^p$. Comme $u \in \text{im } f^p$ alors il existe $v \in E$ tel que $u = f^p(v)$. Comme $u \in \ker f^p$ alors $f^p(u) = 0_E$. On aboutit donc à $f^{2p}(v) = 0_E$, i.e., $v \in \ker f^{2p}$.

Comme $2p \geq p$ alors $\ker f^p = \ker f^{2p}$. En effet la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est stationnaire à partir du rang p donc $a_p = a_{2p}$, et l'inclusion $\ker f^p \subseteq \ker f^{2p}$ montre que $\ker f^p = \ker f^{2p}$.

On en déduit $v \in \ker f^p$, puis $f^p(v) = 0_E$ et enfin $u = 0_E$.

On a démontré que $\text{im } f^p \cap \ker f^p \subseteq \{0_E\}$.

Par double inclusion on obtient $\text{im } f^p \cap \ker f^p = \{0_E\}$.

D'après le théorème du rang :

$$\dim E = \dim \text{im } f^p + \dim \ker f^p.$$

Par caractérisation de la somme directe en dimension finie :

$$E = \text{im } f^p \oplus \ker f^p.$$

8. (a) (2 points) Soit $u \in \text{im } f^p$. Alors il existe $v \in E$ tel que $u = f^p(v)$, donc $f(u) = f^p(f(v))$, puis $f(u) \in \text{im } f^p$. Ainsi $\text{im } f^p$ est stable par f .

Soit $u \in \ker f^p$. Alors $f^p(u) = 0$, donc $f(f^p(u)) = 0_E$, ce qui s'écrit aussi $f^p(f(u)) = 0_E$, donc $f(u) \in \ker f^p$. Ainsi $\ker f^p$ est stable par f .

(b) (2 points) L'application f_1 est un endomorphisme de $\text{im } f^p$.

Démontrons qu'elle est injective.

Soit $u \in \ker f_1$. Alors $u \in \text{im } f^p$ et $f(u) = 0_E$. Ainsi $u \in \ker f$ et donc $u \in \ker f^p$, car $\ker f \subseteq \ker f^p$. Donc $u \in \text{im } f^p \cap \ker f^p$, et comme $\text{im } f^p$ et $\ker f^p$ sont en somme directe alors $u = 0_E$.

Ceci montre que $\ker f_1 = \{0_E\}$, donc f_1 est injective.

Comme $\text{im } f^p$ est un sous-espace vectoriel de E qui est de dimension finie alors $\text{im } f^p$ est de dimension finie. L'application f_1 est un endomorphisme de $\text{im } f^p$ qui est de dimension finie, par corollaire du théorème du rang comme elle est injective alors elle est bijective.

Finalement f_1 est un automorphisme de $\text{im } f^p$.

Si $u \in \ker f^p$ alors $f^p(u) = 0$ et donc $f_2^p(u) = 0_E$.

Ceci est valable pour tout $u \in \ker f^p$, donc f_2^p est l'endomorphisme nul de $\ker f^p$.

9. (1 point) Soit $r = \dim \operatorname{im} f^p$ et $m = \dim \ker f^p$.

Alors $r + m = n$, car $E = \operatorname{im} f^p \oplus \ker f^p$ ou par théorème du rang.

Notons $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\operatorname{im} f^p$ et $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base de $\ker f^p$.

Comme $E = \operatorname{im} f^p \oplus \ker f^p$ alors d'après le théorème de la base adaptée la famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E .

On sait que $\operatorname{im} f^p$ est stable par f et $\operatorname{im} f^p = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_r)$.

Soit $i \in \{1, \dots, r\}$. Comme $e_i \in \operatorname{im} f^p$ alors $f(e_i) \in \operatorname{im} f^p$, donc $f(e_i)$ s'exprime en fonction de $e_1, \dots, e_r$.

Ceci montre que dans chaque colonne 1 à r de la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, les lignes $r + 1$ à n sont nulles.

On sait que $\ker f^p$ est stable par f et $\ker f^p = \operatorname{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$.

Soit $i \in \{r + 1, \dots, n\}$. Comme $e_i \in \ker f^p$ alors $f(e_i) \in \ker f^p$, donc $f(e_i)$ s'exprime en fonction de $e_{r+1}, \dots, e_n$.

Ceci montre que dans chaque colonne $r + 1$ à n de la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, les lignes 1 à r sont nulles.

Nous avons justifié que A , la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, est une matrice par blocs de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} B & 0_{r,m} \\ 0_{m,r} & N \end{pmatrix}$$

où B est une matrice carrée de taille (r, r) , N est une matrice carrée de taille (m, m) , et $0_{r,m}$, $0_{m,r}$ sont les matrices nulles de tailles respectives (r, m) et (m, r) .

Pour la matrice de f^p dans la base $\mathcal{B}$ on procède de même :

Soit $i \in \{1, \dots, r\}$. Comme $e_i \in \operatorname{im} f^p$ alors $f^p(e_i) \in \operatorname{im} f^p$, donc $f^p(e_i)$ s'exprime en fonction de $e_1, \dots, e_r$.

Ceci montre que dans chaque colonne 1 à r de la matrice de f^p dans la base $\mathcal{B}$, les lignes $r + 1$ à n sont nulles.

On sait que f^p est nulle sur $\ker f^p$.

Soit $i \in \{r + 1, \dots, n\}$. Comme $e_i \in \ker f^p$ alors $f^p(e_i) = 0_E$.

Ceci montre que les colonnes $r + 1$ à n de la matrice de f^p dans la base $\mathcal{B}$ sont nulles.

Nous avons justifié que la matrice de f^p dans la base $\mathcal{B}$ est une matrice par blocs de la forme :

$$\begin{pmatrix} C & 0_{r,m} \\ 0_{m,r} & 0_m \end{pmatrix}$$

où C est une matrice carrée de taille (r, r) et 0_m est la matrice nulle de taille (m, m) .

On peut ajouter que cette matrice est A^p . En effet, comme $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ alors :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad A^k = (M_{\mathcal{B}}(f))^k = M_{\mathcal{B}}(f^k).$$

Comme A est une matrice diagonale par bloc alors $A^p = \begin{pmatrix} B^p & 0 \\ 0 & N^p \end{pmatrix}$.

Par unicité on en déduit $C = B^p$ et $N^p = 0$.