Corrigé du Devoir Surveillé n°7

Problème 1. Endomorphismes cycliques. *(25 points)*

Partie A. Exemples. *(9 points)*

1. (a) *(1 point)* Les composantes de la fonction f sont $(x, y) \mapsto -y$ et $(x, y) \mapsto x$, ce sont des formes linéaires car elles sont de la forme $(x, y) \mapsto ax + by$ où a et b sont deux scalaires. Donc f est une application linéaire.

   Comme f est une application linéaire de E dans lui-même alors f est un endomorphisme de E.

   (b) *(1 point)* Soit $e_1 = (1, 0)$. Les valeurs successives de $f^k(e_1)$ sont :

$$e_1 = (1,0) \qquad f(e_1) = (0,1) = e_2 \qquad f^2(e_1) = (-1,0) \qquad f^3(e_1) = (0,-1)$$
$$\text{et} \qquad f^4(e_1) = (1,0) = e_1$$

   On remarque que $f^4(e_1) = e_1$.

   De plus les quatre vecteurs $f^k(e_1)$ pour $k = 0, \ldots, 3$ sont distincts.

   La famille $(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1))$ contient les vecteurs e_1 et e_2 qui engendrent E, donc cette famille est génératrice de E.

   Les conditions *(i)*, *(ii)*, *(iii)* étant réalisées, la famille $(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1))$ est un cycle de f, et ainsi f est cyclique d'ordre 4.

2. (a) *(2 points)* Comme $E = \mathrm{Vect}\,(\cos, \sin)$ alors la famille $(\cos, \sin)$ est génératrice de E. Démontrons que cette famille est libre.

   Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha \cos + \beta \sin = 0$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \alpha \cos x + \beta \sin x = 0.$$

   En particulier pour $x = 0$ ceci donne $\alpha = 0$ et pour $x = \frac{\pi}{2}$ ceci donne $\beta = 0$.

   On a démontré que :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \qquad \alpha \cos + \beta \sin = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta = 0.$$

   Ceci signifie que la famille $(\cos, \sin)$ est libre.

   Cette famille est libre et génératrice de E donc c'est une base de E.

   Comme elle contient deux vecteurs alors E est de dimension 2.

(b) *(2 points) A priori* l'image d'une fonction f de E par t_p est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On commence donc par démontrer que t_p est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, puis on démontrera que son image est incluse dans E.

Soit $(f,g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors $t_p(\lambda f + g)$ est la fonction qui à x associe $(\lambda f + g)\Big(x + \frac{2\pi}{p}\Big)$.

Par définition de la somme de deux fonctions et de la multiplication d'une fonction par un scalaire :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (\lambda f + g)\Big(x + \tfrac{2\pi}{p}\Big) = \lambda f\Big(x + \tfrac{2\pi}{p}\Big) + g\Big(x + \tfrac{2\pi}{p}\Big).$$

Ceci donne :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (t_p(\lambda f + g))(x) = \lambda(t_p(f))(x) + (t_p(g))(x).$$

Ainsi :

$$\forall (f,g) \in E \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad t_p(\lambda f + g) = \lambda t_p(f) + t_p(g).$$

L'application t_p est donc linéaire.

Montrons que $t_p(\cos)$ et $t_p(\sin)$ appartiennent à E.

L'application $t_p(\cos)$ est l'application qui à $x \in \mathbb{R}$ associe $\cos\Big(x + \frac{2\pi}{p}\Big)$, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad t_p(\cos)(x) = \cos x \cos \tfrac{2\pi}{p} - \sin x \sin \tfrac{2\pi}{p}$$

Ceci donne :

$$t_p(\cos) = \alpha \cos + \beta \sin \qquad \text{avec} \quad \alpha = \cos \tfrac{2\pi}{p} \quad \text{et} \quad \beta = -\sin \tfrac{2\pi}{p}.$$

Ainsi : $t_p(\cos) \in \mathrm{Vect}\,(\cos, \sin) = E$.

De même :

$$t_p(\sin) = \gamma \cos + \delta \sin \qquad \text{avec} \quad \alpha = \sin \tfrac{2\pi}{p} \quad \text{et} \quad \beta = \cos \tfrac{2\pi}{p}.$$

Ainsi : $t_p(\sin) \in \mathrm{Vect}\,(\cos, \sin) = E$.

Comme $t_p(\cos) \in E$, $t_p(\sin) \in E$ et E est stable par combinaisons linéaires alors :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \qquad \alpha t_p(\cos) + \beta t_p(\sin) \in E.$$

Par linéarité de t_p :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \qquad t_p(\alpha \cos + \beta \sin) \in E.$$

Comme $E = \mathrm{Vect}\,(\cos, \sin)$ alors :

$$\forall f \in E \qquad t_p(f) \in E.$$

Ceci montre que t_p est une application linéaire de E dans E, donc t_p est un endomorphisme de E.

(c) *(1 point)* Soit $f = \cos$. Par récurrence immédiate l'application $t_p^k(f)$ est :

$$t_p^k(f) : x \mapsto \cos\left(x + k\tfrac{2\pi}{p}\right).$$

Soit j et k deux entiers tels que $0 \leqslant j < k \leqslant p-1$. Supposons que $t_p^j = t_p^k$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \cos\left(x + j\tfrac{2\pi}{p}\right) = \cos\left(x + k\tfrac{2\pi}{p}\right).$$

En particulier pour $x = -j\frac{2\pi}{p}$ on obtient :

$$\cos\left((k-j)\tfrac{2\pi}{p}\right) = 1.$$

Ceci montre que $\frac{2(k-j)\pi}{p}$ est un multiple de 2π, donc p divise $(k-j)$.
Or $0 \leqslant j < k < p$, donc $0 < k-j < p$: il est impossible que $k-j$ soit un multiple de p.
Cette contradiction montre que $t_p^j \neq t_p^k$.

(d) *(2 points)* On démontre que pour $f = \cos$, la famille $\left(f, t_p(f), \ldots, t_p^{p-1}(f)\right)$ est un cycle de f.
L'application $t_p^p(f)$ est l'application $x \mapsto \cos\left(x + p\frac{2\pi}{p}\right)$, comme la fonction cos est 2π-périodique alors $t_p^p(f) = f$, la condition *(i)* est vérifiée.
D'après la question précédente les t_p^k pour k allant de 0 à $p-1$ sont tous distincts, donc la condition *(ii)* est vérifiée.
Comme $f = \cos$ alors :

$$t_p(f) = \cos\tfrac{2\pi}{p}\cos - \sin\tfrac{2\pi}{p}\sin = \cos\tfrac{2\pi}{p} f - \sin\tfrac{2\pi}{p}\sin.$$

Comme $p > 2$ alors $0 < \frac{2\pi}{p} < \pi$, donc $\sin\frac{2\pi}{p} \neq 0$. Ceci montre que :

$$\sin = \frac{\cos\frac{2\pi}{p}}{\sin\frac{2\pi}{p}} f - \frac{1}{\sin\frac{2\pi}{p}} t_p(f).$$

Ainsi sin est combinaison linéaire de f et de $t_p(f)$.
Comme $f = \cos$ alors cos est aussi combinaison linéaire de f et de $t_p(f)$.
On en déduit $\mathrm{Vect}\,(\cos, \sin) \subseteq \mathrm{Vect}\,(f, t_p(f))$, et donc $E \subseteq \mathrm{Vect}\,(f, t_p(f))$.
Comme f et $t_p(f)$ appartiennent à E alors $\mathrm{Vect}\,(f, t_p(f)) \subseteq E$, et par double inclusion $E = \mathrm{Vect}\,(f, t_p(f))$.
Ceci montre que la famille $(f, t_p(f))$ est génératrice de E.
La famille $\left(f, t_p(f), \ldots, t_p^{p-1}(f)\right)$ contient la famille $(f, t_p(f))$ donc elle est aussi génératrice de E, et ainsi la condition *(iii)* est vérifiée.
La famille $\left(f, t_p(f), \ldots, t_p^{p-1}(f)\right)$ est un cycle de f donc f est cyclique d'ordre p.

Partie B. Cas général. *(16 points)*

1. *(1 point)* La famille $(u, f(u), \dots, f^{p-1}(u))$ est un cycle de f donc elle est génératrice de E. Elle est donc de cardinal supérieur ou égal à sa dimension, ce qui donne $p \geqslant n$.
2. *(2 points)* Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors : $f^p(f^k(u)) = f^{p+k}(u) = f^k(f^p(u))$.

   Comme f est cyclique d'ordre p alors $f^p(u) = u$, et donc $f^p(f^k(u)) = f^k(u)$.

   Démontrons que $f^p = \mathrm{id}$, c'est-à-dire que pour tout $v \in E$: $\quad f^p(v) = v$.

   Soit $v \in E$. La famille $(u, f(u), \dots, f^{p-1}(u))$ est génératrice de E donc il existe des scalaires $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}$ tels que

$$v = \lambda_0 u + \lambda_1 f(u) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(u) = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^k(u).$$

   Comme f est linéaire alors par composition f^p est linéaire, et :

$$f^p(v) = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^p(f^k(u)).$$

   D'après ce qui précède :

$$f^p(v) = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^k(u) = v.$$

   Ainsi pour tout $v \in E$: $\quad f^p(v) = v$. $\quad$ Ceci montre que $f^p = \mathrm{id}$.

   On en déduit $f \circ f^{p-1} = f^{p-1} \circ f = \mathrm{id}$, donc f est bijective d'inverse f^{p-1}.

   Enfin f est un endomorphisme bijectif de E donc f est un automorphisme de E.
3. (a) *(1 point)* Comme f est linéaire alors par composition et combinaisons linéaires $f - \mathrm{id}$ et $\mathrm{id} + f + \cdots + f^{p-1}$ sont linéaires, et ce sont des endomorphismes de E.

   Leur noyaux et leurs images sont donc des sous-espaces vectoriels de E, ce qui montre que F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de E.

   (b) *(1 point)* Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E alors ils contiennent son élément nul : $\quad \{0_E\} \subseteq F \cap G$.

   Soit $v \in F \cap G$. Alors $v \in F$ et $v \in G$.

   Comme $v \in F$ alors $f(v) - v = 0_E$, donc $f(v) = v$ puis $f^k(v) = v$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

   Comme $v \in G$ alors $v + f(v) + \cdots + f^{p-1}(v) = 0_E$, donc $pv = 0_E$. Comme $p \neq 0$ alors $v = 0_E$.

   Ceci montre que $F \cap G \subseteq \{0_E\}$, puis par double inclusion $F \cap G = \{0_E\}$.

   (c) *(1 point)* Soit $v \in H = \mathrm{im}(f - \mathrm{id})$. Alors il existe $w \in E$ tel que $v = f(w) - w$. On en déduit, par linéarité de f :

$$\begin{aligned}(\mathrm{id} + f + \cdots f^{p-1})(v) &= \sum_{k=0}^{p-1} f^k(w - f(w)) = \sum_{k=0}^{p-1} \Big(f^k(v) - f^{k+1}(v)\Big) \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} f^k(v) - \sum_{k=1}^{p} f^k(v) = v - f^p(v).\end{aligned}$$

   Comme $f^p = \mathrm{id}$ alors $(\mathrm{id} + f + \cdots f^{p-1})(v) = 0_E$, donc $v \in G$.

   Ainsi $H \subseteq G$.

(d) *(2 points)* D'après la formule de Grassmann :

$$\dim(F+H) = \dim F + \dim H - \dim(F \cap H).$$

D'après le théorème du rang, comme E est de dimension finie :

$$\dim \ker(f - \mathrm{id}) + \dim \mathrm{im}(f - \mathrm{id}) = \dim E.$$

Ceci donne : $\dim F + \dim H = n$.

De plus, comme $H \subseteq G$ alors $F \cap H \subseteq F \cap G$, et comme $F \cap G = \{0_E\}$ alors $F \cap H = \{0_E\}$.

On en déduit donc : $\dim(F+H) = n$.

(e) *(1 point)* Comme $F + H \subseteq E$ et $\dim(F+H) = n = \dim E$ alors par théorème $F + H = E$.

Comme $H \subseteq G$ alors $F + H \subseteq F + G$ et donc $E \subseteq F + G \subseteq E$, ce qui donne $E = F + G$.

Ainsi $F + G = E$ et $F \cap G = \{0_E\}$ donc $E = F \oplus G$, c'est-à-dire F et G sont supplémentaires.

4. (a) *(1 point)* Soit K l'ensemble des entiers naturels k tels que la famille $\big(u, f(u), \ldots, f^{k-1}(u)\big)$ est libre.

Pour $k = 0$ il s'agit de la famille vide, laquelle est libre, donc $0 \in K$, et K est non-vide.

Comme E est de dimension finie n alors toute famille libre est de cardinal inférieur ou égal à n, ce qui montre que tous élément de K est inférieur ou égal à n, donc K est majorée par n.

La famille K est une famille d'entiers majorée et non-vide donc elle contient un plus grand élément, que l'on note m.

(b) *(1 point)* Par définition de m la famille $(u, f(u), \ldots, f^{m-1}(u))$ est libre et comme $m+1$ n'appartient pas à K alors la famille $(u, f(u), \ldots, f^{m}(u))$ n'est pas libre.

Elle est donc liée, et ainsi il existe des scalaires $\lambda_0, \ldots, \lambda_m$ non tous nuls tels que :

$$\lambda_0 u + \lambda_1 f(u) + \cdots + \lambda_m f^m(u) = 0_E.$$

Si $\lambda_m = 0$ alors

$$\lambda_0 u + \lambda_1 f(u) + \cdots + \lambda_{m-1} f^{m-1}(u) = 0_E.$$

Ceci impose $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{m-1} = 0$ car la famille $(u, f(u), \ldots, f^{m-1}(u))$ est libre.

Or les $\lambda_0, \ldots, \lambda_m$ sont supposés non tous nuls. Cette contradiction montre que λ_m n'est pas nul.

On peut donc écrire :

$$f^m(u) = -\frac{\lambda_0}{\lambda_m} u - \frac{\lambda_1}{\lambda_m} f(u) - \cdots - \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m} f^{m-1}(u).$$

Ainsi $f^m(u)$ est combinaison linéaire des vecteurs $u, f(u), \ldots, f^{m-1}(u)$.

(c) *(1 point)* Pour tout $k \in \mathbb{N}$ notons $\mathscr{P}_k$ la proposition : $f^k(u)$ est combinaison linéaire des vecteurs $u, f(u), \ldots, f^{m-1}(u)$.

Initialisation. La proposition $\mathscr{P}_k$ est évidente pour $k = 0, \ldots, m-1$, et nous venons de la démontrer pour $k = m$.

Hérédité. Soit k un entier tel que $k \geqslant m$. Supposons que la propriété $\mathscr{P}_k$ est vraie. Alors il existe $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{m-1}) \in \mathbb{K}^m$ tel que

$$f^k(u) = \lambda_0 u + \lambda_1 f(u) + \cdots + \lambda_{m-1} f^{m-1}(u).$$

On en déduit, par linéarité de f :

$$f^{k+1}(u) = f(f^k(u)) = \lambda_0 f(u) + \lambda_1 f^2(u) + \cdots + \lambda_{m-2} f^{m-1}(u) + \lambda_{m-1} f^m(u).$$

Le vecteur $\lambda_0 f(u) + \lambda_1 f^2(u) + \cdots + \lambda_{m-2} f^{m-1}(u)$ est combinaison linéaire des vecteurs $u, f(u), \ldots, f^{m-1}(u)$, et nous venons de démontrer que c'est aussi le cas de $f^m(u)$.

Par somme $f^{k+1}(u)$ est combinaison linéaire des vecteurs $u, f(u), \ldots, f^{m-1}(u)$.

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion. Par récurrence la propriété $\mathscr{P}_k$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(d) *(1 point)* La propriété que nous venons de démontrer est valable en particulier pour tout $k = 0, \ldots, p-1$, donc :

$$\forall k = 0, \ldots, p-1 \qquad f^k(u) \in \operatorname{Vect}\left(u, f(u), \ldots, f^{m-1}(u)\right).$$

Comme $\operatorname{Vect}(u, f(u), \ldots, f^{m-1}(u))$ est un sous-espace vectoriel de E alors il est stable par combinaisons linéaires, et ainsi :

$$\operatorname{Vect}\left(u, f(u), \ldots, f^{p-1}(u)\right) \subseteq \operatorname{Vect}\left(u, f(u), \ldots, f^{m-1}(u)\right).$$

Comme la famille $(u, f(u), \ldots, f^{p-1}(u))$ est un cycle de f alors elle est génératrice de E, donc :

$$E = \operatorname{Vect}\left(u, f(u), \ldots, f^{p-1}(u)\right).$$

On en déduit par double inclusion $E = \operatorname{Vect}(u, f(u), \ldots, f^{m-1}(u))$ et donc la famille $(u, f(u), \ldots, f^{n-1}(u))$ est génératrice de E.

Nous savons qu'elle est libre, donc elle est une base de E.

Comme E est de dimension n alors toutes ses bases sont de cardinal n, et ainsi $m = n$.

5. (a) *(1 point)* La famille $(u, f(u), \ldots, f^{n-1}(u))$ est une base de E d'après la question précédente, et $g(u)$ est un vecteur de E. Il existe donc une et une seule famille $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1})$ de scalaires telle que :

$$g(u) = \alpha_0 u + \alpha_1 f(u) + \cdots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(u).$$

Ces scalaires sont les coordonnées de $g(u)$ dans la base $(u, f(u), \ldots, f^{n-1}(u))$.

(b) *(1 point)* Par définition de g et h :

$$g(u) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(u) \qquad \text{et} \qquad h = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors :

$$h(f^k(u)) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(f^k(u)) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^{i+k}(u) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^k(f^i(u)).$$

Par linéarité de f^k :

$$h(f^k(u)) = f^k\left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(u)\right) = f^k(g(u)).$$

Comme f et g commutent alors $f^k \circ g = g \circ f^k$, et donc $h(f^k(u)) = g(f^k(u))$.
La famille $(u, f(u), \ldots, f^{n-1}(u))$ est une base de E, et :

$$\forall k = 0, \ldots, n-1 \qquad h(f^k(u)) = g(f^k(u)).$$

Une application linéaire est uniquement déterminée par l'image d'une base, g et h coïncident sur la base $(u, f(u), \ldots, f^{n-1}(u))$ de E, donc $h = g$.

(c) *(1 point)* Soit C l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f.
Nous venons de démontrer que si g est un élément de C alors g est combinaison linéaire de $\mathrm{id}, f, \ldots, f^{n-1}$. Ceci donne :

$$C \subseteq \mathrm{Vect}\left(\mathrm{id}, f, \ldots, f^{n-1}\right).$$

Réciproquement, si g est une combinaison linéaire de $\mathrm{id}, f, \ldots, f^{n-1}$ alors il existe $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$g = \lambda_0 \mathrm{id} + \lambda_1 f + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}.$$

Alors g commute avec f :

$$g \circ f = \lambda_0 f + \lambda_1 f^2 + \cdots + \lambda_n f^n = f \circ g.$$

Ceci montre que :

$$\mathrm{Vect}\left(\mathrm{id}, f, \ldots, f^{n-1}\right) \subseteq C$$

Par double inclusion on en déduit que C est l'ensemble des combinaisons linéaires de $\mathrm{id}, f, \ldots, f^{n-1}$.

Problème 2. Développement asymptotique de la série harmonique. *(19 points)*

Partie A. *(10 points)*

1. *(2 points)* Les fonctions $t \mapsto \ln t$ et $t \mapsto (t-1)$ sont définies, continues et non-nulles sur l'intervalle $]0,1[$, donc par quotient et combinaison linéaire la fonction f est définie et continue sur cet intervalle.

   Comme $\frac{1}{\ln t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ et $\frac{1}{t-1} \xrightarrow[t\to 0]{} -1$ alors $f(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 1$.

   Pour calculer la limite de f en 1 on utilise un développement limité. On pose $h = t-1$. Alors :
$$f(t) = \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1} = \frac{t-1-\ln t}{(t-1)\ln(t)} = \frac{h-\ln(1+h)}{h\ln(1+h)}$$
   Ceci donne :
$$f(1+h) \underset{h\to 0}{\sim} \frac{h-\ln(1+h)}{h^2} \underset{(0)}{=} \frac{h-\left(h-\frac{h^2}{2}+o(h^2)\right)}{h^2} \underset{(0)}{=} \frac{1}{2}+o(1).$$
   On en déduit : $f(t) \xrightarrow[t\to 1]{} \frac{1}{2}$.

   La fonction f admet des limites finies en 0 et en 1, donc elle est prolongeable par continuité sur $[0,1]$, en posant $f(0)=1$ et $f(1)=\frac{1}{2}$.

2. *(2 points)* La fonction f est continue sur le segment $[0,1]$ donc elle est bornée. Soit M un majorant de $|f|$:
$$\forall t \in [0,1] \qquad |f(t)| \leqslant M.$$
   On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\forall t \in [0,1] \qquad |t^n f(t)| = t^n |f(t)| \leqslant M t^n.$$
   Par croissance de l'intégrale :
$$\int_0^1 |t^n f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 M t^n\,\mathrm{d}t.$$
   Par inégalité triangulaire :
$$|I_n| \leqslant \int_0^1 |t^n f(t)|\,\mathrm{d}t.$$
   Par transitivité de la relation d'ordre :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |I_n| \leqslant M\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = M\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{M}{n+1}.$$
   Par théorème d'encadrement : $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

3. *(2 points)* Les fonctions $t \mapsto \ln t$ et $t \mapsto (t-1)$ sont non-nulles et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$ donc par quotient et combinaison linéaire la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$.

   Sa dérivée est :
$$\forall t \in]0,1[\qquad f'(t) = -\frac{1}{t\ln^2 t} + \frac{1}{(t-1)^2}.$$
   Dans le but d'utiliser le théorème de limite de la dérivée, on calcule la limite de cette dérivée lorsque t tend vers 1, ceci au moyen d'un développement limité.

Tout d'abord, en posant $h = t - 1$:

$$f'(1+h) = \frac{1}{h^2} - \frac{1}{(1+h)\ln^2(1+h)}.$$

On calcule :

$$\begin{aligned}\ln^2(1+h) &\underset{(0)}{=} \left(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3)\right)^2 \\ &\underset{(0)}{=} h^2 - h^3 + \left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{4}\right)h^4 + o(h^4) \underset{(0)}{=} h^2 - h^3 + \tfrac{11}{12}h^4 + o(h^4)\end{aligned}$$

Donc :

$$(1+h)\ln^2(1+h) \underset{(0)}{=} (1+h)\left(h^2 - h^3 + \tfrac{11}{12}h^4 + o(h^4)\right) \underset{(0)}{=} h^2 - \tfrac{h^4}{12} + o(h^4)$$

Ensuite :

$$\begin{aligned}f'(1+h) &\underset{(0)}{=} \frac{1}{h^2}\left(1 - \frac{1}{1 - \frac{h^2}{12} + o(h^2)}\right) \underset{(0)}{=} \frac{1}{h^2}\left(1 - \left(1 + \frac{h^2}{12} + o(h^2)\right)\right) \\ &\underset{(0)}{=} -\frac{1}{12} + o(1).\end{aligned}$$

Ainsi :

- La fonction f est continue sur $]0,1]$.
- La fonction f est dérivable sur $]0,1[$.
- $\lim\limits_{t\to 1} f'(t) = -\frac{1}{12}$.

D'après le théorème de limite de la dérivée, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ en 1 et sa dérivée en ce point est $f'(1) = -\frac{1}{12}$.

Finalement f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1]$.

4. (a) *(1 point)* D'après la question précédente h est définie sur $]0,1]$ et :

$$\forall t \in]0,1] \qquad h(t) = \begin{cases} \frac{t}{(t-1)^2} - \frac{1}{\ln^2 t} & \text{si } t < 1 \\ -\frac{1}{12} & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

Par quotient et combinaison linéaire cette fonction est continue sur $]0,1[$.

D'après la question précédente elle est continue en 1.

Comme $\frac{t}{(t-1)^2} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ et $\frac{1}{\ln^2 t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ alors : $h(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$.

La fonction h est continue sur $]0,1]$ et admet une limite finie en 0, donc elle est prolongeable par continuité à l'intervalle $[0,1]$, en posant $h(0) = 0$.

(b) *(1 point)* Soit $v(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1}$. Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[x,1]$. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur ce segment aussi, car elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1]$, et $[x,1] \subseteq]0,1]$.

On peut donc appliquer le théorème d'intégration par parties :

$$\int_x^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} f(t)\right]_x^1 - \int_x^1 \frac{t^{n+1}}{n+1} f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme $f(1) = \frac{1}{2}$ et $h(t) = tf'(t)$ alors :

$$\int_x^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2(n+1)} - \frac{x^{n+1}f(x)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_x^1 t^n h(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Il s'agit de la formule attendue.

(c) *(1 point)* La fonction f est continue sur l'intervalle $[0,1]$, donc par produit la fonction $t \mapsto t^n f(t)$ est continue sur cet intervalle.

D'après le théorème fondamental, la fonction

$$F : x \mapsto \int_0^x t^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

est une primitive de cette fonction. Donc elle est dérivable sur $[0,1]$, *a fortiori* elle est continue, ce qui montre que : $F(x) \xrightarrow[x\to 0]{} F(0)$.

On obtient bien : $\displaystyle\int_0^x t^n f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

Comme h est continue sur $[0,1]$ alors on obtient de même : $\displaystyle\int_0^x t^n h(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

(d) *(1 point)* On considère l'égalité (1) et on calcule sa limite lorsque x tend vers 0.

D'après la relation de Chasles :

$$\int_x^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x t^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'après la question précédente :

$$\int_x^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0]{} \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = I_n.$$

De même :

$$\int_x^1 t^n h(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0]{} \int_0^1 t^n h(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme la fonction $x \mapsto x^{n+1}f(x)$ est continue en 0 alors : $x^{n+1}f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

Par unicité de la limite l'égalité (1) donne :

$$I_n = \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^n h(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme h est continue alors de même que dans la question (2) on démontre que :

$$\int_0^1 t^n h(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On en déduit :

$$I_n \underset{(+\infty)}{=} \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1}o(1) \underset{(+\infty)}{=} \frac{1}{2(n+1)} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Comme $\frac{1}{n+1} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{n}$ ceci donne :

$$I_n \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

Partie B. *(7 points)*

1. *(1 point)* La fonction $g_n : t \mapsto \frac{t^n-1}{\ln t}$ est définie sur $]0,1[$, par quotient elle est continue.
   Elle tend vers 0 lorsque t tend vers 0 : $g_n(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$.
   Pour calculer sa limite en 1 on écrit :
$$g_n(1+h) = \frac{(1+h)^n - 1}{\ln(1+h)} \underset{(0)}{=} \frac{nh + o(h)}{h + o(h)} \underset{(0)}{=} \frac{n + o(1)}{1 + o(1)}.$$
   On en déduit : $g_n(t) \underset{t\to 1}{\longrightarrow} n$.
   La fonction g_n est continue sur $]0,1[$ et elle admet des limites finies en 0 et en 1 donc elle est prolongeable par continuité sur $[0,1]$, en posant $g_n(0) = 0$ et $g_n(1) = n$.
2. *(2 points)* Soit $x \in]0,1[$. Alors $0 < x^{n+1} < x < 1$, donc le segment $[x^n + 1, x]$ est inclus dans l'intervalle $]0,1[$.
   La fonction $h : t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est définie et continue sur l'intervalle $]0,1[$, donc sur le segment $[x^{n+1}, x]$. Ceci montre que l'intégrale $J_n(x)$ est définie.
   Ainsi la fonction J_n est bien définie sur l'intervalle $]0,1[$.
   Comme la fonction h est continue sur l'intervalle $]0,1[$ alors d'après le théorème fondamental elle admet une primitive. Soit H une telle primitive, c'est-à-dire une fonction dérivable sur $]0,1[$ telle que $H' = h$.
   D'après le théorème fondamental : $\forall x \in]0,1[\quad J_n(x) = H(x^{n+1}) - H(x)$.
   Comme les fonctions H et $x \mapsto x^{n+1}$ sont dérivables alors par composition et combinaison linéaire la fonction J_n est dérivable. Sa dérivée est :
$$\forall x \in]0,1[\qquad J_n'(x) = (n+1)x^n H'(x^{n+1}) - H'(x)$$
   Ceci donne :
$$J_n'(x) = (n+1)x^n \frac{1}{\ln(x^{n+1})} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x^n - 1}{\ln x} = g_n(x).$$
   Ainsi la fonction J_n est une primitive de la fonction g_n sur $]0,1[$.
   Comme la fonction g_n est continue alors la fonction J_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$.
3. *(2 points)* On peut effectivement écrire :
$$\forall x \in]0,1[\qquad J_n(x) = \int_x^{x^{n+1}} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = \int_x^{x^{n+1}} \left(f(t) + \frac{1}{t-1} \right) \mathrm{d}t$$
   Par linéarité de l'intégrale :
$$\forall x \in]0,1[\qquad J_n(x) = \int_x^{x^{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^{x^{n+1}} \frac{dt}{t-1}\,. \tag{2}$$
   On calcule les limites en 0 et en 1 de ces deux intégrales.
   Comme la fonction f est continue sur l'intervalle $[0,1]$ alors elle admet une primitive sur ce segment. Soit F une telle primitive. Alors :
$$\forall x \in [0,1] \qquad \int_x^{x^{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x^{n+1}) - F(x).$$

Comme F est une primitive sur $[0,1]$ alors elle est continue sur $[0,1]$, donc :

$$F(x) \xrightarrow[x\to 0]{} F(0) \qquad \text{et} \qquad F(x) \xrightarrow[x\to 1]{} F(1).$$

Comme $\quad x^{n+1} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \quad$ et $\quad x^{n+1} \xrightarrow[x\to 1]{} 1 \quad$ alors par composition :

$$F(x^{n+1}) \xrightarrow[x\to 0]{} F(0) \qquad \text{et} \qquad F(x^{n+1}) \xrightarrow[x\to 1]{} F(1).$$

Ceci donne, par soustraction de limites :

$$\int_x^{x^{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \int_x^{x^{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 1]{} 0.$$

On calcule ensuite :

$$\forall x \in \,]0,1[\qquad \int_x^{x^{n+1}} \frac{\mathrm{d}t}{t-1} = \Big[\ln|t-1|\Big]_x^{x^{n+1}} = \ln\left|\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right| = \ln\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right).$$

On en déduit :

$$\int_x^{x^{n+1}} \frac{\mathrm{d}t}{t-1} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \int_x^{x^{n+1}} \frac{\mathrm{d}t}{t-1} \xrightarrow[x\to 1]{} \ln(n+1).$$

Par somme de limites, l'égalité (2) donne :

$$\lim_{x\to 0} J_n(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 1} J_n(1) = \ln(n+1).$$

4. *(2 points)* La fonction J_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$.

Elle admet des limites finies en 0 et en 1 donc elle est prolongeable par continuité à l'intervalle $[0,1]$, en posant $J_n(0) = 0$ et $J_n(1) = \ln(n+1)$.

On note toujours J_n la fonction prolongée.

Sa dérivée sur l'intervalle $]0,1[$ est g_n. Nous avons démontré que cette fonction admet des limites finies en 0 et 1, respectivement 0 et n. Ainsi :

- La fonction J_n est continue sur $[0,1]$.
- La fonction J_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$.
- La fonction dérivée J_n' admet des limites finies en 0 et en 1.

D'après le théorème de limite de la dérivée la fonction J_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$.

De plus ses dérivées en 0 et en 1 sont $J_n'(0) = 0$ et $J_n'(1) = n$.

La fonction g_n est continue sur l'intervalle $[0,1]$ donc d'après le théorème fondamental la fonction

$$\begin{aligned} G_n : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_0^x g_n(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

est une primitive de g_n.

La fonction J_n est aussi une primitive de g_n sur $[0,1]$. Comme $[0,1]$ est un intervalle alors il existe une constante K telle que pour tout $x \in [0,1]$: $\quad G_n(x) = J_n(x) + K$.

Comme $\quad G_n(0) = 0 = J_n(0) \quad$ alors $K = 0$.

Ainsi $G_n(1) = J_n(1)$, ce qui donne bien : $\displaystyle\int_0^1 g_n(t)\,\mathrm{d}t = \ln(n+1)$.

Partie C. *(2 points)*

1. *(1 point)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $f(t) = \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1}$ alors :

$$\int_0^1 (t^n - 1) f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\frac{t^n - 1}{\ln t} - \frac{t^n - 1}{t - 1} \right) \mathrm{d}t.$$

Par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^1 (t^n - 1) f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^n - 1}{\ln t}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{t^n - 1}{t - 1}\,\mathrm{d}t.$$

Ceci donne :

$$\int_0^1 (t^n - 1) f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 g_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} t^k\,\mathrm{d}t.$$

Par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} t^k\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 t^k\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n.$$

On en déduit, grâce à la question (4) de la partie précédente :

$$\int_0^1 (t^n - 1) f(t)\,\mathrm{d}t = \ln(n+1) - H_n.$$

On aboutit à :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad H_n = \ln(n+1) - \int_0^1 (t^n - 1) f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. *(1 point)* Par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^1 (t^n - 1) f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = I_n - \gamma.$$

D'après la partie A :

$$I_n = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

De plus :

$$\ln(n+1) = \ln\left(n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{(+\infty)}{=} \ln n + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

D'après la question précédente :

$$H_n \underset{(+\infty)}{=} \ln n + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + \gamma.$$

Ceci donne le développement asymptotique suivant à l'ordre 1 :

$$H_n \underset{(+\infty)}{=} \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$