

Devoir à la Maison n°13

Partie A. Règle de d'Alembert

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement positive.

On suppose que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Cas n°1. On suppose que $\ell < 1$.

- Soit q un réel strictement supérieur à ℓ . Démontrer qu'il existe un entier p tel que pour tout $n \geq p$: $u_{n+1} \leq qu_n$.
- En déduire, pour tout $n \geq p$, une majoration de u_n de la forme $u_n \leq Kq^n$ où K ne dépend pas de n .
- Démontrer que la série de terme général u_n converge.

Cas n°2. On suppose que $\ell > 1$, éventuellement $\ell = +\infty$.

En s'inspirant de la question précédente, démontrer que la série de terme général u_n diverge.

Cas n°3. Montrer que si $\ell = 1$ alors la série $\sum u_n$ peut converger ou diverger.

Partie B. Une application

Pour tout $n \geq 1$, soit $u_n = \frac{n!}{n^n}$.

- À l'aide de la partie précédente déterminer la nature de la série $\sum u_n$.
- Retrouver ce résultat en utilisant la formule de Stirling.

Partie C. Règle de Raabe-Duhamel

Soit α un réel et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite strictement positive telle que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{(+\infty)}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = \ln((n+1)^\alpha u_{n+1}) - \ln(n^\alpha u_n)$$

- Démontrer que la série de terme général v_n est absolument convergente.
- En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $u_n \underset{(+\infty)}{\sim} \lambda \frac{1}{n^\alpha}$.
- Que peut-on en déduire sur la convergence de la série $\sum u_n$?

Partie D. Une série d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$ on pose : $F_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{(t^4 + 1)^n}$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

(a) Démontrer que la fonction F_n est bien définie sur \mathbb{R}_+ et donner ses variations.

(b) Démontrer que la fonction F_n est majorée sur \mathbb{R}_+ .

$$\text{On pourra écrire } F_n(x) = F_n(1) + \int_1^x \frac{dt}{(t^4 + 1)^n}.$$

En déduire qu'elle admet une limite finie en $+\infty$.

On note dorénavant $I_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x)$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Déterminer une fonction g_n telle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$F_n(x) - F_{n+1}(x) = \frac{1}{4n} F_n(x) + g_n(x)$$

(b) En déduire une relation entre I_n et I_{n+1} .

3. En utilisant la partie précédente déterminer la nature de la série $\sum I_n$.