

## Chapitre B11 Matrices II

On note dans tout ce chapitre  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , et  $n, p$  sont des entiers naturels non-nuls.

### I. Rappels et compléments sur les matrices

#### A. Définitions

##### Proposition - Définition

- L'ensemble  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  des matrices de taille  $(n, p)$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$  est un espace vectoriel de dimension  $np$ .
- Sa base canonique est la famille  $(E_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p)$ , où  $E_{ij}$  est la matrice de taille  $(n, p)$  dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient d'indices  $i, j$  qui est égal à 1.

##### Proposition

La multiplication matricielle est l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{mp}(\mathbb{K}) \\ (A, B) &\longmapsto AB \end{aligned}$$

Elle est bilinéaire, *i.e.*, linéaire par rapport à chaque variable.  
Elle est aussi associative.

##### Proposition

Sous réserve d'existence, pour tous entiers  $i, j, k, \ell$  :

$$E_{ij}E_{k\ell} =$$

##### Définition

La *transposition* est l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K}) \\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} &\longmapsto {}^tA = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1p} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Propositions**

- Si  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  alors  ${}^tA = (a'_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 \leq i \leq n}}$  avec :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket \quad a'_{ji} = a_{ij}$$

- L'application de transposition est linéaire :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad {}^t(\lambda A + B) = \lambda {}^tA + {}^tB$$

- Si  $A$  et  $B$  sont deux matrices multipliables alors :  ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$ .
- Si une matrice  $A$  est inversible alors sa transposée est inversible et  $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ .  
On peut donc noter  ${}^tA^{-1}$  cette matrice.

**Proposition - Définition**

- L'ensemble  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  des matrices carrées de taille  $(n, n)$  est un espace vectoriel et un anneau.
- L'ensemble des matrices inversibles de taille  $(n, n)$  est noté  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$  et appelé *n-ème groupe linéaire de  $\mathbb{K}$* .  
C'est un groupe pour la loi multiplicative.

**Définitions**

On note :

- $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices diagonales, *i.e.*, telles que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad i \neq j \implies a_{ij} = 0$$

De plus  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  désigne la matrice diagonale de coefficients diagonaux  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

- $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices triangulaires supérieures, *i.e.*, telles que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad i > j \implies a_{ij} = 0$$

- $\mathcal{T}'_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices triangulaires inférieures, *i.e.*, telles que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad i < j \implies a_{ij} = 0$$

- $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices symétriques, *i.e.*, telles que  ${}^tA = A$ , ou :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad a_{ij} = a_{ji}$$

- $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices antisymétriques, *i.e.*, telles que  ${}^tA = -A$ , ou :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad a_{ij} = -a_{ji}$$

**Propositions**

- Ces ensembles sont tous des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
- $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ ,  $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ ,  $\mathcal{T}'_n(\mathbb{K})$ , sont stables par multiplication interne.
- Ces ensembles vérifient :

$$\mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T}'_n(\mathbb{K}) = \mathcal{D}_n(\mathbb{K}) \qquad \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) + \mathcal{T}'_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

- Leurs dimensions sont :

$\dim \mathcal{D}_n(\mathbb{K}) =$	$\dim \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) = \dim \mathcal{T}'_n(\mathbb{K}) =$
$\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) =$	$\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) =$

► **Exercice 1.**

**B. Trace**

**Définition**

La *trace* d'une matrice carrée est la somme de ses coefficients diagonaux.

On note  $\text{tr } A$  la trace d'une matrice  $A$  :

$\forall A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
---

**Proposition**

L'application  $\text{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  est une forme linéaire :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \text{tr}(\lambda A + B) = \lambda \text{tr } A + \text{tr } B$$

Démonstration. Si  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  et  $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  alors les coefficients de  $\lambda A + B$  sont  $(\lambda a_{ij} + b_{ij})$  donc :

$$\text{tr}(\lambda A + B) = \sum_{i=1}^n (\lambda a_{ii} + b_{ii}) = \lambda \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii} = \lambda \text{tr } A + \text{tr } B$$

D'après la caractérisation la trace est linéaire, et comme ses valeurs sont des scalaires alors c'est une forme linéaire. □

**Proposition**

Pour toutes matrices  $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$  :  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .

Démonstration.

**Corollaire**

Soit  $A$  et  $P$  deux matrices carrées de tailles  $(n, n)$ , avec  $P$  inversible.

Alors :  $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr} A$ .

Démonstration.



**Définition**

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimensions finies et  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire.

Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ ,  $\mathcal{B}'$  une base de  $F$ .

On appelle *matrice de  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$*  et on note  $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f)$  la matrice dont les colonnes sont les coordonnées dans la base  $\mathcal{B}'$  de l'image des vecteurs de  $\mathcal{B}$  par  $f$ .

**Remarque.** Notons  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  et  $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ . Pour tout vecteur  $e_j$  de  $\mathcal{B}$ ,  $f(e_j)$  est un élément de  $F$ , donc il admet des coordonnées dans la base  $\mathcal{B}'$  :

$$f(e_j) = a_{1j}e'_1 + \dots + a_{nj}e'_n$$

Alors on obtient :

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

En d'autres termes la matrice de  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  est la représentation matricielle la famille  $f(\mathcal{B})$  dans la base  $\mathcal{B}'$  :

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f) = M_{\mathcal{B}'}(f(\mathcal{B}))$$

**Exemple.** Soit l'application linéaire  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y, z) \mapsto (4x + 2z, -x - 5y)$$

Alors la matrice de  $f$  dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^3$  et de  $\mathbb{R}^2$  est :

$$A = M_{\mathcal{B}_3\mathcal{B}_2}(f) =$$

Soit  $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$  et  $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$  avec :

$$u_1 = (1, 1, 1) \quad u_2 = (1, 1, -1) \quad u_3 = (-5, 1, 10) \quad v_1 = (1, -1) \quad v_2 = (0, 2)$$

Les familles  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  sont des bases respectivement de  $\mathbb{R}^3$  et de  $\mathbb{R}^2$ .

La matrice de  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  est :

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f) =$$

**Exemple 1.** Soit  $d : \mathbb{K}_3[X] \rightarrow \mathbb{K}_3[X]$

$$P \mapsto P'$$

Alors  $d$  est linéaire. Sa matrice dans la base canonique de  $\mathbb{K}_3[X]$  est :

$$D =$$

► **Exercices 2, 3, 4.**

## B. Correspondances bijectives

### Proposition

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ .

Alors l'application  $M_{\mathcal{B}} : E \longrightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$  est un isomorphisme.  
 $u \longmapsto M_{\mathcal{B}}(u)$

**Démonstration.** On démontre que  $M_{\mathcal{B}}$  est linéaire et bijective.

Soit  $e_1, \dots, e_n$  les vecteurs de  $\mathcal{B}$ .

Soit  $u$  et  $v$  deux vecteurs de  $E$ , de coordonnées respectives  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  et  $(\mu_1, \dots, \mu_n)$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Soit  $\alpha$  un scalaire. Alors :

$$u = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \quad \text{et} \quad v = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n$$

Par somme :

$$\alpha u + v = (\alpha \lambda_1 + \mu_1) e_1 + \dots + (\alpha \lambda_n + \mu_n) e_n$$

Ainsi les coordonnées de  $\alpha u + v$  dans la base  $\mathcal{B}$  sont  $(\alpha \lambda_1 + \mu_1, \dots, \alpha \lambda_n + \mu_n)$  et donc :

$$M_{\mathcal{B}}(\alpha u + v) = \begin{pmatrix} \alpha \lambda_1 + \mu_1 \\ \vdots \\ \alpha \lambda_n + \mu_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \alpha M_{\mathcal{B}}(u) + M_{\mathcal{B}}(v)$$

Ceci étant valable pour tous vecteurs  $u$  et  $v$  de  $E$  et tout scalaire  $\alpha$ , l'application  $M_{\mathcal{B}}$  est linéaire.

On définit l'application :

$$N_{\mathcal{B}} : \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \longrightarrow E \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \longmapsto \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$$

Cette application vérifie  $N_{\mathcal{B}} \circ M_{\mathcal{B}} = \text{Id}_E$  et  $M_{\mathcal{B}} \circ N_{\mathcal{B}} = \text{Id}_{\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})}$  donc  $M_{\mathcal{B}}$  est une bijection (et que  $N_{\mathcal{B}}$  est sa réciproque).

Finalement l'application  $M_{\mathcal{B}}$  est linéaire et bijective, donc c'est un isomorphisme.  $\square$

### Proposition

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimensions finies  $p$  et  $n$  respectivement.

Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $\mathcal{B}'$  une base de  $F$ .

Alors l'application  $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} : \mathcal{L}(E, F) \longrightarrow \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  est un isomorphisme.  
 $f \longmapsto M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f)$

**Remarques.**

- La matrice de l'application nulle est la matrice nulle :  $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(0_{\mathcal{L}(E,F)}) = 0_{\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})}$
- La linéarité s'écrit :

$$\begin{aligned} \forall (f, g) \in (\mathcal{L}(E, F))^2 & \quad M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f + g) = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f) + M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(g) \\ \forall f \in \mathcal{L}(E, F) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} & \quad M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\lambda f) = \lambda M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f) \end{aligned}$$







**Démonstration.** Soit  $f$  l'application linéaire canoniquement associée à  $A$ . Alors  $f$  est une application de  $\mathbb{K}^p$  dans  $\mathbb{K}^n$ , où  $n$  est le nombre de lignes de  $A$  :

$$f : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

D'après le théorème du rang :

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim \mathbb{K}^p$$

Ceci donne bien la formule voulue car  $\ker A = \ker f$  et  $\operatorname{im} A = \operatorname{im} f$ .  $\square$

### Définition

Soit  $A$  une matrice de taille  $(n, p)$ . Le *rang* de  $A$ , noté  $\operatorname{rg} A$ , est la dimension du sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^n$  engendré par les colonnes de  $A$ .

### Remarques.

- Le rang de  $A$  est donc la dimension de son image :  $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{im} A$ .

C'est aussi le rang de l'application linéaire  $f : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$  canoniquement associée à  $A$ .

En conséquences, si  $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  alors :

- $\operatorname{rg} A \leq p$  et  $\operatorname{rg} A \leq n$ .
- $A$  est inversible si et seulement si  $\operatorname{rg} A = n = p$ .

### Notation

- Dorénavant on identifie  $\mathbb{K}^n$  à  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ , ce qui permet d'écrire les vecteurs de  $\mathbb{K}^n$  en colonnes.
- Si  $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  alors l'application linéaire canoniquement associée à  $A$  est l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X &\longmapsto AX. \end{aligned}$$

### Proposition

Soit  $E$  et  $F$  des espaces vectoriels de dimensions finies admettant pour base  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  respectivement.

Soit  $A$  la matrice de  $f$  dans ces bases. Alors :

- $\ker A$  est l'ensemble des coordonnées des vecteurs de  $\ker f$  dans la base  $\mathcal{B}$ ,
- $\operatorname{im} A$  est l'ensemble des coordonnées des vecteurs de  $\operatorname{im} f$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

En d'autres termes :

$$\ker A = M_{\mathcal{B}}(\ker f) \quad \text{et} \quad \operatorname{im} A = M_{\mathcal{B}'}(\operatorname{im} f).$$

**Démonstration.** Soit  $p = \dim E$  et  $n = \dim F$ .

L'application  $X \mapsto AX$  est l'application  $M_{\mathcal{B}'} \circ f \circ M_{\mathcal{B}}^{-1}$ , ce qui permet de démontrer la proposition.  $\square$

**Théorème**

Soit  $A$  une matrice carrée de taille  $(n, n)$ .

- S'il existe une matrice  $B$  telle que  $BA = I_n$  alors  $A$  est inversible et  $B$  est son inverse.
- S'il existe une matrice  $B$  telle que  $AB = I_n$  alors  $A$  est inversible et  $B$  est son inverse.

Démonstration.

**Proposition**

Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non-nuls.

L'inverse d'une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) inversible est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure).

Démonstration. La rang d'une matrice est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ses colonnes, donc le rang d'une matrice triangulaire supérieure est le nombre de ses coefficients diagonaux non-nuls.

Une matrice carrée de taille  $(n, n)$  est inversible si et seulement si elle est de rang  $n$ , donc une matrice triangulaire supérieure de taille  $(n, n)$  est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non-nuls.

Démontrons que dans ce cas la matrice inverse  $T^{-1}$  est triangulaire supérieure.

On sait que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieure, donc l'application

$$\begin{aligned} f : \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \\ M &\longmapsto TM \end{aligned}$$

est bien définie. Elle est linéaire car la multiplication matricielle à gauche est linéaire.

Son noyau est réduit à l'élément nul. En effet, si  $TM = 0_n$  alors  $T^{-1}TM = 0_n$  donc  $M = 0_n$ .

Ainsi  $f$  est injective. Or c'est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, donc elle est surjective par corollaire du théorème du rang.

La matrice identité est triangulaire supérieure, donc elle appartient à l'image de  $f$ . Il existe donc  $S \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$  tel que  $f(S) = I_n$ , *i.e.*,  $TS = I_n$ .

En multipliant à gauche par  $T^{-1}$  on obtient  $S = T^{-1}$ , et donc  $T^{-1}$  est triangulaire supérieure.

On démontre les mêmes résultats dans le cas où  $T$  est triangulaire inférieure en considérant  ${}^tT$ , qui est alors triangulaire supérieure.  $\square$

### Corollaire

Une matrice diagonale  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  est inversible si et seulement si tous les  $\lambda_i$  sont non-nuls.

Son inverse est alors  $D^{-1} = \text{diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1})$ .

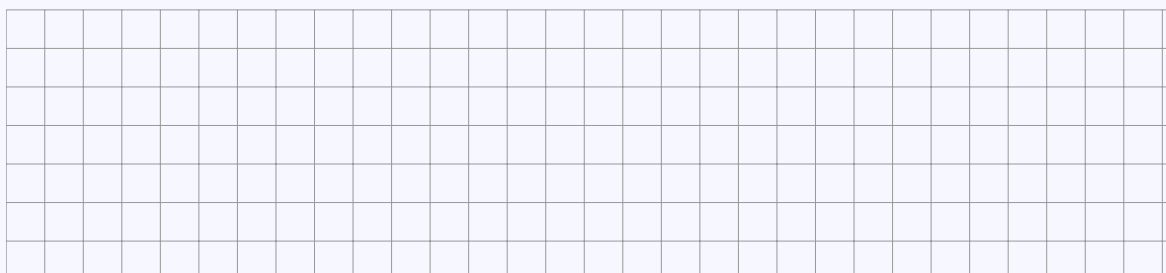
## III. Changement de base

### A. Matrices de passage

#### Définition 1

Soit  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ .

La *matrice de passage* de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  est la matrice notée  $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$  dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de  $\mathcal{B}'$  dans la base  $\mathcal{B}$ .





**Proposition**

La matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$  est inversible, son inverse est la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}'$  à la base  $\mathcal{B}$ .

$$(P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$$

Démonstration. En effet si  $P$  est la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ , alors  $P$  est la matrice de l'identité de  $E$  dans les bases  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{B}$ . Or l'identité de  $E$  est un isomorphisme, d'inverse lui-même. Ainsi  $P$  est inversible, et son inverse est la matrice de l'identité dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ , donc la matrice de passage de  $\mathcal{B}'$  à  $\mathcal{B}$ .  $\square$

**Remarque.** On peut justifier de deux façons différentes l'équivalence :

$$X = PX' \quad \Longleftrightarrow \quad X' = P^{-1}X$$

**Exemple 3 (suite).** Soit  $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$  avec  $u_1 = (2, 1)$  et  $u_2 = (5, 3)$ .

Quelle est la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}_c$  ?

**Méthode alternative pour inverser une matrice**

On peut exprimer les vecteurs de la base canonique en fonction de ses colonnes.

► **Exercices 6, 7.**

**Proposition (Réciproque de la précédente)**

Soit  $P$  une matrice inversible de taille  $(n, n)$ . Alors les colonnes de  $P$  forment une base de  $\mathbb{K}^n$ , et  $P$  est la matrice de passage de la base canonique de  $\mathbb{K}^n$  à cette base.

**Remarque.** Ainsi les matrices de passage sont les matrices inversibles.

Démonstration. Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  canoniquement associé à  $P$ . Comme  $P$  est inversible alors  $f$  est un isomorphisme.

L'image d'une base par un isomorphisme est une base. Or les colonnes de  $P$  sont les images par  $f$  des vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ , donc elles forment une base de  $\mathbb{K}^n$ .

Par définition  $P$  est la matrice de passage de la base canonique à cette base.  $\square$





**Théorème**

Soit  $A$  une matrice de taille  $(n, p)$ .

Alors  $A$  est de rang  $r$  si et seulement si elle est équivalente à  $J_{npr}$ .

**Corollaire (Caractérisation des matrices équivalentes par le rang)**

Deux matrices de même taille sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

**Lemme**

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimensions finies, et  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire.

Si  $f$  est de rang  $r$  alors il existe une base  $\mathcal{B}_1$  de  $E$  et une base  $\mathcal{B}_2$  de  $F$  telles que la matrice de  $f$  dans ces bases est  $J_{npr}$ .

Démonstration.



Démonstration du théorème. Soit  $f$  l'application linéaire canoniquement associée à  $A$ . Par définition l'image de  $A$  est l'image de  $f$ , donc le rang de la matrice  $A$  est le rang de l'application linéaire  $f$ .

Supposons que  $A$  est de rang  $r$ .

D'après le lemme précédent il existe une base  $\mathcal{B}_1$  de  $\mathbb{K}^p$  et une base  $\mathcal{B}_2$  de  $\mathbb{K}^n$  telle que la matrice de  $f$  dans ces bases est  $J_{npr}$ . En notant  $P$  et  $Q$  les matrices de changement de base on a  $A = PJ_{npr}Q$  avec  $P$  et  $Q$  inversibles, donc  $A$  est équivalente à  $J_{npr}$ .

Réciproquement, supposons que  $A$  est équivalente à  $J_{npr}$ .

Alors il existe deux matrices inversibles  $P$  et  $Q$  telles que  $A = PJ_{npr}Q$ .

On note  $\varphi$ ,  $g$  et  $\psi$  les applications linéaires canoniquement associées à  $P$ ,  $J_{npr}$  et  $Q$  respectivement. Alors  $f = \varphi \circ g \circ \psi$ .

De plus  $\varphi$ ,  $\psi$  sont des isomorphismes car  $P$  et  $Q$  sont inversibles. Donc  $\text{rg } f = \text{rg } g$  car le rang est invariant par composition avec un isomorphisme.

Par définition le rang de  $g$  est le rang de  $J_{npr}$ , donc  $g$  est de rang  $r$ , puis  $f$  est de rang  $r$ , et finalement  $A$  est de rang  $r$ .  $\square$

Démonstration du corollaire. Soit  $A$  et  $B$  deux matrices de même taille.

Si  $A$  et  $B$  sont de même rang  $r$  alors elles sont toutes les deux équivalentes à la matrice  $J_r$ , donc par transitivité elles sont équivalentes.

Réciproquement, si  $A$  et  $B$  sont équivalentes, comme  $A$  est équivalente à la matrice  $J_r$  où  $r = \text{rg } A$ , alors par transitivité  $B$  est équivalente à la matrice  $J_r$ , et donc  $B$  est de rang  $r$  également.  $\square$

### Remarques.

- Ainsi le rang d'une application linéaire est le rang de sa matrice dans n'importe quelles bases.
- De plus, les classes d'équivalence des matrices de taille  $(n, p)$  sont en bijection avec l'ensemble  $\{0, \dots, m\}$  où  $m = \text{Min}\{n, p\}$ .

Elles sont représentées par les matrices  $J_0, \dots, J_m$ .

## D. Matrices semblables

### Définition

Deux matrices carrées  $A$  et  $B$  sont dites *semblables* s'il existe une matrice  $P$  inversible telle que  $A = PBP^{-1}$ .

### Remarques.

- La relation de semblance est une relation d'équivalence sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
- Si deux matrices sont semblables alors elles sont équivalentes, mais la réciproque est fautive en général (il faudrait déjà que les deux matrices soient carrées).
- Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  dans deux bases différentes.

En effet, si  $f$  est l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ , et  $B$  est semblable à  $A$  alors il existe  $P$  inversible telle que  $A = PBP^{-1}$ . Comme  $P$  est inversible alors  $P$  est la matrice de passage de la base canonique à la base  $\mathcal{B}$  formée par ses colonnes. Alors  $B$  est la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .



## IV. Rangs

### A. Pivot de Gauss

**Remarque.** Soit  $A$  et  $B$  deux matrices de même taille.

On dit que  $A$  et  $B$  sont *équivalentes par lignes* si on peut passer de l'une à l'autre par opérations élémentaires sur les lignes.

Ceci a lieu si et seulement si il existe une matrice inversible  $P$  telle que  $A = PB$ . En effet :

- Réaliser une opération élémentaire sur les lignes d'une matrice revient à la multiplier à gauche par une matrice élémentaire.
- Les matrices élémentaires sont inversibles, et un produit de matrices inversibles est inversible.
- L'algorithme du pivot de Gauss montre que toute matrice inversible est produit de matrices élémentaires, car elle est équivalente par lignes à la matrice identité.

De même les matrices  $A$  et  $B$  sont *équivalentes par colonnes* si on peut passer de l'une à l'autre par opérations élémentaires sur les colonnes, ce qui a lieu si et seulement si il existe une matrice inversible  $Q$  telle que  $A = BQ$ .

Enfin les matrices  $A$  et  $B$  sont *équivalentes par lignes et par colonnes* si on peut passer de l'une à l'autre par opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes. Ceci a lieu si et seulement si il existe deux matrices inversibles  $P$  et  $Q$  telles que  $A = PBQ$ , donc si et seulement si  $A$  et  $B$  sont équivalentes.

#### Proposition

Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles sont équivalentes par lignes et par colonnes. En d'autres termes les relations «équivalentes» et «équivalentes par lignes et par colonnes» sont identiques.

**Remarque.** L'algorithme du pivot de Gauss montre que toute matrice est équivalente par ligne à une matrice échelonnée réduite par ligne. Appliqué aux colonnes il montre que toute matrice est équivalente par lignes et colonnes à une matrice  $J_{npr}$ .

Ceci démontre de nouveau que toute matrice est équivalente à une matrice  $J_{npr}$ . Comme l'équivalence conserve le rang alors  $r$  est le rang de la matrice.

#### Corollaire

Les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes ne modifient pas le rang d'une matrice.

**Démonstration.** En effet, si  $A$  et  $B$  sont équivalentes par lignes et colonnes alors elles sont équivalentes donc elles ont même rang.  $\square$

#### Proposition

Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice ne changent pas son noyau.  
Les opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice ne changent pas son image.

Démonstration. Soit  $A$  une matrice de taille  $(n, p)$ .

Soit  $P$  une matrice inversible de taille  $(n, n)$ . Alors :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \quad AX = 0 \iff PAX = 0$$

Ceci montre que  $\ker A = \ker(PA)$ , et comme les matrices élémentaires sont inversibles on en déduit le premier point

Pour toute matrice inversible  $Q$  de taille  $(p, p)$  l'application  $X \mapsto QX$  réalise une bijection de  $\mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K})$  donc  $\mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K}) = \{QX \mid X \in \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K})\}$ . On en déduit :

$$\operatorname{im} A = \{AX \mid X \in \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K})\} = \{AQX \mid X \in \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K})\} = \operatorname{im}(AQ)$$

Ceci permet de conclure car les matrices élémentaires sont inversibles.  $\square$

## B. Liens entre les différents rangs

**Exemple 5.** On définit  $\mathcal{F} = ((2, 1, 4), (4, 1, 2), (4, 3, 3))$  et :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad S : \begin{cases} 2x + 4y + 4z = c_1 \\ x + y + 3z = c_2 \\ 4x + 2y + 3z = c_3 \end{cases} \quad f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x + 4y + 4z \\ x + y + 3z \\ 4x + 2y + 3z \end{pmatrix}$$

Alors  $\mathcal{F}$  est une famille de vecteurs,  $A$  est une matrice,  $S$  un système linéaire (quels que soient les scalaires  $c_i$ ) et  $f$  est une application linéaire.

Par théorème ces quatre objets ont même rang.

**Remarque.** Par définition le rang d'un système linéaire est le nombre de pivots du système échelonné réduit qui lui est équivalent.

### Théorème

Soit :

- $A$  une matrice,
- $f$  l'application linéaire qui lui est canoniquement associée,
- $S$  un système linéaire de la forme  $AX = B$  où  $B$  est une matrice colonne,
- $\mathcal{F}$  la famille des colonnes de  $A$ .

Alors  $A$ ,  $f$ ,  $S$ , et  $\mathcal{F}$  ont même rang.

Démonstration. Par définition :

$$\operatorname{rg} \mathcal{F} = \dim(\operatorname{Vect}(\mathcal{F})) \quad \operatorname{rg} A = \dim(\operatorname{im} A) \quad \operatorname{rg} f = \dim(\operatorname{im} f)$$

Comme  $f$  est l'application linéaire canoniquement associée à  $A$  alors l'image de  $A$  est celle de  $f$ , et elle est engendrée par les colonnes de  $A$ , donc les trois rangs ci-dessus sont égaux.

Soit  $r$  le rang de  $S$ . Alors la matrice échelonnée réduite par lignes  $R$  équivalente par lignes à  $A$  contient  $r$  pivots. Ses colonnes engendrent donc un espace vectoriel de dimension  $r$ .

Ainsi  $R$  est de rang  $r$ . Les opérations élémentaires ne changent pas le rang, donc  $A$  est de rang  $r$ , et ainsi  $S$  et  $A$  ont même rang.  $\square$

**Méthodes**

- Pour calculer le rang d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire, ou d'un système linéaire, on calcule le rang de la matrice associée.
- Pour déterminer le rang d'une matrice on utilise l'algorithme du pivot de Gauss, il permet de se ramener à une matrice triangulaire en utilisant les opérations élémentaires :

$$\begin{array}{lll} (L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j) & (L_i \leftarrow \lambda L_i) & (L_i \leftrightarrow L_j) \\ (C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j) & (C_i \leftarrow \lambda C_i) & (C_i \leftrightarrow C_j) \\ \text{avec } i \neq j & \text{avec } \lambda \neq 0 & \end{array}$$

En effet, le rang est invariant par opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes.

**Exemple 5 (suite).** On obtient

$\text{rg } \mathcal{F} = \text{rg } A = \text{rg}(S) = \text{rg } f =$
---

► **Exercice 11.**

**C. Propriétés****Proposition (rang maximal)**

Soit  $A$  une matrice,  $S$  un système de la forme  $AX = B$ ,  $f$  l'application linéaire canoniquement associée à  $A$ , et  $\mathcal{F}$  la famille des colonnes de  $A$ . Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- $A$  est inversible
- $S$  est un système de Cramer
- $f$  est un isomorphisme
- $\mathcal{F}$  est une base de  $\mathbb{K}^n$ , où  $n$  est le nombre de lignes et de colonnes de  $A$ .

Démonstration. Toutes ces propriétés sont déjà connues, il s'agit des cas  $n = p = r$ .  $\square$

**Proposition**

Le rang d'une matrice est égal à celui de sa transposée.

Démonstration. En effet, une matrice  $A$  de taille  $(n, p)$  est de rang  $r$  si et seulement si il existe deux matrices inversibles  $P$  et  $Q$  telles que  $A = PJ_{npr}Q$ .

Dans ce cas  ${}^tA = {}^tQJ_{pnr}{}^tP$ .

Les matrices  ${}^tQ$  et  ${}^tP$  sont inversibles car  $P$  et  $Q$  le sont, donc  ${}^tA$  est de rang  $r$ .  $\square$

**Remarques.** En conséquence :

- Le rang d'une matrice est égal à la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses lignes.
- La transposition est aussi autorisée dans le calcul du rang d'une matrice.

## D. Matrices extraites

### Définition

On note  $I = \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $J = \llbracket 1, p \rrbracket$ .

Une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  peut être notée  $A = (a_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ .

On appelle *matrice extraite* ou *sous-matrice* de  $A$  une matrice  $(a_{ij})_{(i,j) \in I' \times J'}$  où  $I'$  est une sous-suite de  $I$  et  $J'$  est une sous-suite de  $J$ .

Ceci revient à supprimer des lignes et des colonnes de  $A$ .

**Exemple.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & 5 & 4 \\ 4 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ . Quelles matrices ci-dessous sont extraites de  $A$  ?

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad (1) \quad (1 \ 2 \ 0) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 8 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

### Proposition

Si une matrice  $A$  est de rang  $r$  alors toute matrice extraite de  $A$  est de rang inférieur ou égal à  $r$ .

**Démonstration.** On note  $A = (a_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ . Soit  $A' = (a_{ij})_{(i,j) \in I' \times J'}$  une matrice extraite de  $A$ , avec  $I' \subseteq I$  et  $J' \subseteq J$ .

Posons  $A_1 = (a_{ij})_{(i,j) \in I \times J'}$ , c'est-à-dire qu'on ne garde de  $A$  que les colonnes qui apparaissent dans  $A'$ . Alors  $A_1$  ne contient que certaines colonnes de  $A$  et  $A'$  ne contient que certaines lignes de  $A_1$ .

La famille des colonnes de  $A$  est de rang  $r$  car  $A$  est de rang  $r$ , donc la famille des colonnes de  $A_1$  est de rang au plus  $r$  :  $\text{rg } A_1 \leq \text{rg } A$ .

La famille des lignes de  $A_1$  est de rang  $r_1 = \text{rg } A_1$  donc la famille des lignes de  $A'$  est de rang au plus  $r_1$  :  $\text{rg } A' \leq \text{rg } A_1$

Par transitivité  $\text{rg } A' \leq \text{rg } A$ . □

### Proposition

Une matrice  $A$  est de rang  $r$  si et seulement si :

- Il existe une sous-matrice de  $A$  inversible de taille  $(r, r)$ .
- Pour tout  $s > r$  aucune sous-matrice de  $A$  de taille  $(s, s)$  n'est inversible.

Ainsi une matrice est de rang  $r$  si et seulement si sa plus grande sous-matrice inversible est de taille  $(r, r)$ .

Démonstration. Supposons que  $A$  est de rang  $r$ .

Alors la famille des colonnes de  $A$  est de rang  $r$ , donc on peut en extraire une famille libre de  $r$  colonnes.

En effet, la famille des colonnes de  $A$  est une famille génératrice de  $\text{im } A$ , par théorème on peut en extraire une base de  $\text{im } A$ .

Ces colonnes forment une matrice  $A_1$  de taille  $(n, r)$  extraite de  $A$ , et cette matrice est de rang  $r$ .

La famille des lignes de  $A_1$  est donc de rang  $r$ , et de même on peut en extraire une famille libre de  $r$  lignes.

On obtient alors une matrice  $A'$  extraite de  $A$ , de taille  $(r, r)$  et de rang  $r$ . Cette matrice est inversible car elle est carrée de rang maximal.

Soit  $s > r$ . Si une sous-matrice de  $A$  de taille  $(s, s)$  est inversible, alors elle est de rang  $s$ . Ceci contredit la proposition précédente : toute sous-matrice de  $A$  est de rang au plus  $r$ . Donc aucune sous-matrice de  $A$  de taille  $(s, s)$  n'est inversible.

Supposons maintenant que  $A$  admet une sous-matrice  $A'$  inversible de taille  $(r, r)$ , et qu'aucune sous-matrice de taille  $(s, s)$  avec  $s > r$  n'est inversible. Montrons que  $A$  est de rang  $r$ .

La matrice  $A'$  est inversible donc elle est de rang  $r$ . Or c'est une sous-matrice de  $A$  donc  $r \leq \text{rg } A$ .

Supposons que  $\text{rg } A > r$ . Alors d'après la première partie de cette démonstration  $A$  admet une sous-matrice inversible de taille  $(s, s)$  avec  $s = \text{rg } A > r$ . Mais ceci est faux par hypothèse, donc  $\text{rg } A = r$ .  $\square$