Feuille de T. D. B11
Matrices et applications linéaires

Exercices de cours

1 Soit n et p deux entiers naturels non-nuls.
Soit $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$, $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K})$.
Justifier que ${}^tXAY$ et ${}^tY\,{}^tAX$ sont bien définies et égales.

2 On définit l'application linéaire :
$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (y+3z, x-2y+2z) \end{array}$$
et on note : $\mathcal{B} = ((1,1,0),(1,0,1),(0,1,1))$
$\mathcal{B}' = ((1,1),(1,-1))$

a. Démontrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
b. Donner la matrice de f dans les bases canoniques, puis dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

3 Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P & \longmapsto & (P(1), P'(-1)) \end{array}$
puis : $P_1 = X-1 \quad P_2 = X+1 \quad P_3 = (X+1)^2$

a. Justifier que f est linéaire.
b. Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
c. Donner la matrice A de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et de $\mathbb{R}^2$.
d. Donner la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_2$ ($\mathcal{B}_2$ étant la base canonique de $\mathbb{R}^2$).

4 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et p un projecteur de E.
Donner la matrice de p dans une base adaptée à la somme directe $E = \operatorname{im} p \oplus \ker p$.

5 Soit $E = \mathbb{R}^2$, puis $u_1 = (2,1)$ et $u_2 = (2,-1)$.
La famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
Donner les matrices de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ et de la base $\mathcal{B}$ à la base canonique.

6 Reproduire l'exercice précédent pour $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ avec :
$$u_1 = (1,1,1) \qquad u_2 = (1,1,0) \qquad u_3 = (1,0,0)$$

7 (Suite des deux exercices précédents.)
Dans les deux cas suivants donner la matrice de f dans la base canonique, puis dans la base $\mathcal{B}$.
Vérifier ensuite la formule reliant ces matrices.

a. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-2y, 2x+2y) \end{array}$
b. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x, x-z, x-y) \end{array}$

8 On définit les matrices :
$$A = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Déterminer le noyau et l'image de A.
b. Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A est B.
c. En déduire que A et B sont semblables.

9 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et p un projecteur de E. Démontrer que $\operatorname{tr} p = \operatorname{rg} p$.

10 Calculer le rang des objets suivants.

$$\mathcal{F}_1 = ((6,9),(-2,-3)) \qquad M_1 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$S : \begin{cases} x - 2y = -1 \\ 7x + 3y = 10 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{F}_2 = ((i, 1+2i), (2+3i, 1+i))$$

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^5 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (y+z, x+t, 0, y+z, z+t) \end{array}$$

Travaux dirigés

1 Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$
Soit u_1, u_2 et u_3 les vecteurs de coordonnées respectives $(2,1,-1)$, $(2,-1,1)$ et $(0,2,2)$.

a. Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
b. Calculer $f(u_3) + 5u_2$, puis exprimer la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}$.
c. Déterminer le rang de f ainsi qu'une base de son noyau.
d. Démontrer que $f^3 = 0$ (où $f^3 = f \circ f \circ f$).

2 On note :
$$P=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

a. Justifier que P est la matrice de passage de la base canonique à une base $\mathcal{B}$ et calculer la matrice de passage dans l'autre sens.

b. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :
$$f(x,y,z)=(2x+2y+z,-2x-y,x+y-z)$$
Donner la matrice de f dans la base canonique, puis dans la base $\mathcal{B}$.

c. Démontrer que : $f\circ f\circ f=-3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$

3 On note : $A=\begin{pmatrix}3&-10\\2&-6\end{pmatrix}$ $\quad u_1=(5,2)$, $u_2=(2,1)$

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

a. Démontrer que $\mathcal{B}=(u_1,u_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Donner la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ et sa matrice inverse.

b. Exprimer la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}$.

c. Calculer B^n pour tout entier n.

d. En déduire A^n pour tout entier n.

4 Reproduire l'exercice précédent avec :
$$A=\begin{pmatrix}11&-25\\4&-9\end{pmatrix}$$

5 Déterminer une base du noyau et de l'image de chacune des matrices suivantes.
$$\begin{pmatrix}4&8\\2&4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}3&0&1\\2&7&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}6&-3\\-2&1\\4&-3\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}4&3&4\\1&0&2\\2&1&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}5&3&6\\8&10&7\\4&2&5\end{pmatrix}$$

6 Calculer le rang des matrices suivantes.
$$A=\begin{pmatrix}3&4&2\\4&2&3\\2&3&4\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&3&7&8\\3&2&-7&3\\2&1&-6&6\end{pmatrix}$$
$$C=\begin{pmatrix}0&7&10\\17&8&9\\-13&5&9\\5&11&15\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}4&2&1&0\\4&5&0&6\\-2&0&5&2\\5&6&0&7\end{pmatrix}$$
$$E=\begin{pmatrix}3&0&2\\-2&1&0\\0&3&4\\4&1&4\\5&2&3\end{pmatrix}\qquad F=\begin{pmatrix}35&15&5&1\\20&10&4&1\\10&6&3&1\\4&3&2&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

7 On définit les matrices :
$$A=\begin{pmatrix}9&-6\\12&-8\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}6&-5\\7&-6\end{pmatrix}$$
Démontrer que l'une est la matrice d'un projecteur et l'autre d'une symétrie.

Déterminer leurs éléments caractéristiques.

8 Soit P la matrice :
$$P=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&2&-5\\-1&6&-5\\-1&2&-1\end{pmatrix}$$

a. Déterminer le noyau et l'image de P.

b. Démontrer que l'endomorphisme canoniquement associé à P est un projecteur et donner ses éléments caractéristiques.

9 Démontrer que la matrice
$$S=\begin{pmatrix}-5&-6&-6\\6&7&6\\-2&-2&-1\end{pmatrix}$$
est la matrice d'une symétrie et en préciser les éléments caractéristiques.

10 Soit $E=\mathbb{R}^3$, F le sous-espace vectoriel de E d'équation $x+y+2z=0$, et G le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $(1,0,1)$.

a. Démontrer que $E=F\oplus G$ et donner une base $\mathcal{B}$ adaptée à cette somme directe.

b. Donner les matrices de passage de la base canonique $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$ et de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_c$.

On note p le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur F parallèlement à G et s la symétrie associée.

c. Déterminer la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$.

d. Déterminer la matrice de p puis celle de s dans la base canonique.

11 Soit $E=\mathbb{R}^4$. On souhaite déterminer la matrice de p, le projecteur de E sur F le sous-espace vectoriel d'équation $x+y+z+t=0$, parallèlement à G le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $v_1=(1,1,1,1)$.

a. Démontrer que $E=F\oplus G$, donner une base adaptée à cette somme directe.

b. Donner les matrices de passages de la base canonique à cette base, et réciproquement.

c. Déterminer la matrice de $q=\mathrm{Id}_E-p$ dans la base adaptée choisie ci-dessus.

d. En déduire la matrice de q dans la base canonique, puis celle de p.

12 Soit f l'application linéaire définie par
$$f:\begin{array}{rcl}\mathbb{R}^3&\longrightarrow&\mathbb{R}^3\\(x,y,z)&\longmapsto&(y+z,x-z,x-y).\end{array}$$
On pose $F=\ker(f-\mathrm{Id})$, $G=\ker(f+2\mathrm{Id})$.

a. Donner les matrices de $f-\mathrm{Id}$ et de $f+2\mathrm{Id}$.

b. Déterminer une base de F puis de G.

c. Démontrer que F et G sont supplémentaires.

d. Donner la matrice de f dans une base adaptée à la somme directe $\mathbb{R}^3=F\oplus G$.

e. Simplifier $f\circ f+f$.
En déduire que f est bijective et donner son application réciproque.

13 Soit f l'application définie par

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a,b,c) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^2 \frac{ax^2+bx+c}{(x+1)(x-3)}\,dx \end{array}$$

a. Démontrer que f est linéaire.

Soit $u_1 = (0,1,1)$ $u_2 = (0,1,-3)$ $u_3 = (1,-2,-3)$.

b. Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

c. Calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$.

d. Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base canonique. En déduire la valeur de $f(a,b,c)$ pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

14 Dans $E = \mathbb{R}^3$ on définit :

$u_1 = (1,1,0)$ $u_2 = (1,2,2)$ $u_3 = (2,3,1)$

a. Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de E. Donner la matrice de passage de la base canonique de E à cette base puis inverser cette matrice.

b. Pour $i = 1,2,3$ on note u_i^* la forme linéaire de E qui à un vecteur associe sa i-ème coordonnée dans la base $\mathcal{B}$. Donner les matrices des u_i^* dans les bases canoniques de E et de $\mathbb{R}$.

15 Soit f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^2$ défini par :

$\forall (x,y) \in E \qquad f(x,y) = (4x - y\ , 9x - 2y)$

Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Donner une telle base.

16 Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$.

Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

17 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E tel que $\ker f \oplus \operatorname{im} f = E$. On note r le rang de f.

a. Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est la matrice par blocs $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où C est une matrice inversible de taille (r,r).

b. Déterminer une telle base et la matrice B pour l'endomorphisme f canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -a & -a-4 & 4-a & 3a \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ a & a & a & -3a \end{pmatrix}$$

18 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E tel que $\ker f = \operatorname{im} f$.

Démontrer que dans une certaine base de E la matrice de f est la matrice par blocs $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où l'entier r est à déterminer.

19 Dans chacun des cas ci-dessous démontrer que les matrices A et B sont semblables.

a. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

c. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

20 Soit A et B deux matrices de taille (n,n).

On suppose que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \qquad \operatorname{tr}(AM) = \operatorname{tr}(BM)$$

Démontrer que $A = B$.

21 Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E de rang 1.

a. Démontrer qu'il existe un scalaire λ tel que $f \circ f = \lambda f$.

On suppose dorénavant que E est de dimension finie.

b. Démontrer qu'une matrice A de taille (n,p) et de rang 1 si et seulement si il existe deux matrices colonnes U et V non-nulles telles que $A = U\,{}^tV$.

c. En déduire une autre justification du résultat de la première question.

d. En considérant une base judicieuse démontrer que si de plus $\operatorname{tr} f = 1$ alors f est un projecteur.

22 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

On définit l'application $f: \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & AM. \end{array}$

a. Justifier que f est un endomorphisme de E, inversible si et seulement si A est inversible.

b. Donner la matrice de f dans la base canonique de E.

c. Exprimer la trace de f en fonction de celle de A, puis le rang de f en fonction de celui de A.

23 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Pour tout $i = 1, \dots, n$ on note e_i^* la forme linéaire coordonnée associée à e_i, c'est-à-dire la forme linéaire qui à un vecteur de E associe sa i-ème coordonnée dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

a. Soit f un endomorphisme de E. Démontrer que :

$$\operatorname{tr} f = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(f(e_i))$$

b. Application : déterminer la trace de l'endomorphisme de transposition de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

24 Soit α, β, γ trois réels distincts et :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ P &\longmapsto (P(\alpha), P(\beta), P(\gamma)) \end{aligned}$$

a. Justifier que f est linéaire et donner sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^3$.
   On note A cette matrice.

b. Démontrer que A est inversible.

c. Déterminer l'image réciproque par f de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

d. Démontrer que la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ à la base de la question précédente est la matrice inverse de A.

25 Soit n un entier naturel et $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Soit f l'application définie par :

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow E \\ P &\longmapsto P(X+1) \end{aligned}$$

a. Démontrer que f est bijective en explicitant sa réciproque.

b. Justifier que f est linéaire, et donner sa matrice dans la base canonique de E.

c. Donner la matrice inverse de la précédente.

26 Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ engendré par les fonctions cosinus et sinus.

a. Justifier que $\mathcal{B} = (\cos, \sin)$ est une base de E.

b. Justifier que $\Phi : f \mapsto f' - f$ est un endomorphisme de E. Donner sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.

c. Démontrer que Φ est un automorphisme.
   Quels éléments f de E vérifient $f' - f = \cos$?

27 Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et φ l'application linéaire définie par :

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow E \\ f &\longmapsto f'' + 9f \end{aligned}$$

a. Déterminer le noyau de φ et donner sa dimension.

Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\mathcal{B} = \left(\cos, \cos^3\right)$.

b. Démontrer que $\mathcal{B}$ est une base de F.

c. Démontrer que F est stable par φ.

d. Soit $\psi : F \to F$ la restriction de φ à F. Donner la matrice Ψ de ψ dans la base $\mathcal{B}$.

e. Donner une base du noyau de Ψ et en déduire une base de celui de ψ.

f. Démontrer que $\ker \psi \subseteq \ker \varphi$. En déduire la formule donnant $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$.

28 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A\,{}^tAA = I_n$.

a. Démontrer que pour tout matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:
   $\operatorname{tr}({}^tMM) \geqslant 0$ et $(\operatorname{tr}({}^tMM) = 0 \iff M = 0_n)$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A\,{}^tAA = I_n$.

b. Démontrer que A est inversible et symétrique.

c. Soit $a = \operatorname{tr} A$ et $b = \operatorname{tr} A^2$. Justifier que les matrices $(A - I_n)^2$, $(A^2 - I_n)^2$ et $(A^2 - A)^2$ sont symétriques et exprimer leurs traces en fonction de a, b, n.

d. En utilisant la question (a) démontrer que $a = b = n$. En déduire que $A = I_n$.