Lycée Bellevue – Toulouse **Année 2025-2026**
MPSI – Mathématiques

Programme de colles
Semaine 26
du 4 au 8 mai 2026

Questions de cours

Sauf mention explicite il faut connaître l'énoncé et la démonstration.

1. P_A est une probabilité sur Ω.
2. Formule des probabilités composées.
3. Formule des probabilités totales.
4. Espérance et variance de $aX + b$.
5. Formule de König-Huyghens.

Exercices

Chapitre A12. Intégration

I. Continuité uniforme
II. Définition des intégrales
III. Propriétés
IV. Sommes de Riemann
V. Théorèmes
VI. Intégrales des fonctions complexes

Chapitre B10. Dimension

I. Dimension d'un espace vectoriel
II. Dimension et sous-espaces vectoriels
III. Applications linéaires en dimension finie

Programme prévisionnel de la semaine suivante

Chapitre C1 (Probabilités).

Chapitre A12. Intégration

I. Continuité uniforme

Définition, exemples. Si f est lipschitzienne alors elle est uniformément continue, si elle est uniformément continue alors elle est continue. Théorème de Heine.

II. Définition des intégrales

Subdivision d'un segment, fonctions en escalier, intégrales des fonctions en escalier. Continuité par morceaux, théorème d'approximation par une fonction en escalier. Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

III. Propriétés

Linéarité, croissance de l'intégrale. Si f est continue positive d'intégrale nulle sur un segment non réduit à un point alors f est nulle. Inégalité triangulaire, relation de Chasles.

IV. Sommes de Riemann

Méthodes des carrés et des trapèzes. Théorème : si f est continue alors les suites (R_n) et (S_n) convergent vers $\int_a^b f(t)dt$.

V. Théorèmes

Théorème fondamental et corollaire : toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive. Valeur moyenne, atteinte si f est continue. Exemples de fonctions définies par une intégrale.

Formule de Taylor avec reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange.

VI. Intégrales des fonctions complexes

Définition, inégalité triangulaire.

Chapitre B10. Dimension

I. Dimension d'un espace vectoriel

Espace vectoriel de dimension finie. Théorème : tout espace vectoriel de dimension finie admet une base, et toutes ses bases ont même cardinal. Définition de la dimension. Exemples usuels. Droites et plans vectoriels. Dimension d'un produit d'espaces vectoriels.

Théorème : cardinaux des familles génératrices et libres, cas d'égalité (familles génératrices minimales et libres maximales). Théorèmes de la base extraite et de la base incomplète.

II. Dimension et sous-espaces vectoriels

Dimension d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie, cas d'égalité.

Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie admet un supplémentaire. Deux sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$. Base adaptée à une somme directe. Formule de Grassmann.

Rang d'une famille de vecteur. Le rang d'une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n est inférieur à p et à n. Cas d'égalité.

III. Applications linéaires en dimension finie

Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.

Proposition : l'image d'une base est libre, génératrice, une base si et seulement si f est injective, surjective, bijective.

Rang d'une application linéaire. En dimension finie, caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité et de la bijectivité à l'aide du rang. Le rang de $g \circ f$ est inférieur à ceux de f et de g.

Espaces vectoriels isomorphes en dimension finie, E et F sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimension. La dimension des sous-espaces vectoriels et le rang des applications linéaires sont invariants par isomorphismes.

Théorème du rang, corollaire (cas $\dim E = \dim F$).

Les hyperplans d'un espace vectoriel de dimension n sont les sous-espaces vectoriels de dimension $n - 1$. L'intersection de m hyperplans est de dimension au moins $n - m$. Tout sous-espace vectoriel de dimension $n - m$ est l'intersection de m hyperplans.