Chapitre C3
Variables aléatoires

I. Lois usuelles

A. Loi constante

Définition. Une variable aléatoire X suit une loi constante, ou certaine, si elle ne peut prendre qu'une seule valeur, *i.e.,* si $X(\Omega)$ est un singleton : $X(\Omega) = \{b\}$ où b est un réel.

Proposition. *Si X suit une loi constante égale à b alors :*

$E(X) =$ $V(X) =$ $\sigma(X) =$

▷ **Exercice 1.**

B. Loi uniforme

Définition. Une variable aléatoire X suit une loi uniforme de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$ si :

On note alors $X \sim \mathcal{U}(n)$ ou $X \hookrightarrow \mathcal{U}(n)$.

Proposition. *Si X suit une loi uniforme de paramètre n alors :*

$E(X) =$ $V(X) =$ $\sigma(X) =$

Démonstration. Voir exercice de cours 15 de la feuille de TD C1. □

Remarque. Plus généralement, si A est un ensemble fini alors X suit une loi uniforme sur A si pour x appartenant à A les $P(X = x)$ sont égaux. On note alors $X \sim \mathcal{U}(A)$.

▷ **Exercice 2.**

C. Loi de Bernoulli

Définition. (Jacques Bernoulli, Suisse, 1654 – 1705). Une variable aléatoire suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$ si elle prend les valeurs 1 et 0, avec les probabilités respectives p et $q = 1 - p$:

On note alors $X \sim \mathscr{B}(p)$ ou $X \sim \mathscr{B}(1,p)$.

Proposition. *Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p alors :*

$E(X) =$ $V(X) =$ $\sigma(X) =$

▷ **Exercice 3.**

Remarques.

(i) La loi de Bernoulli est la loi indicatrice d'un événement A de probabilité p :
La variable aléatoire prend la valeur 1 si A a lieu et 0 sinon.

(ii) Une variable aléatoire suit une loi de Bernoulli si et seulement si $X(\Omega) = \{0,1\}$.
Son paramètre est alors $p = P(X = 1)$.

D. Loi binomiale

Définition. On réalise n expériences identiques et indépendantes. Soit A un événement pouvant résulter de cette expérience, et p la probabilité de A. On note $q = 1 - p$.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de réalisations de l'événement A au cours des n expériences. On dit alors que X suit une loi binomiale de paramètres n et p, et on note $X \sim \mathscr{B}(n,p)$.

Proposition. *Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p alors :*

$X(\Omega) =$ $\forall k \in X(\Omega)$ $P(X = k) =$

$E(X) =$ $V(X) =$

Remarques.

(i) Si $n = 1$ alors on retrouve la loi de Bernoulli, ce qui justifie la notation $\mathscr{B}(1,p)$ pour celle-ci.

(ii) La formule du binôme montre qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité de X.

Démonstration. Sur n expériences le nombre de réalisation de l'événement A est un entier compris entre 0 et n, donc $X(\Omega) = \{0, \dots, n\}$

Soit k un entier compris entre 0 et n. L'événement $X = k$ se produit si au cours des n expériences l'événement A a lieu exactement k fois. Dans ce cas l'événement contraire $\overline{A}$ a lieu $(n-k)$ fois.

Parmi les n expériences, k d'entre elles voient l'événement A se produire. Le nombre de façons de choisir k expériences parmi n est $\binom{n}{k}$.

Si les k expériences sont fixées, la probabilité que l'événement A se réalise lors de ces k expériences et l'événement B se réalise lors des $(n-k)$ autres expériences est $p^k q^{n-k}$, car toutes les expériences sont mutuellement indépendantes.

On obtient donc $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

Démonstration de la formule pour l'espérance.

Démonstration de la formule pour la variance.

On calcule $E(X(X-1))$ plutôt que $E(X^2)$:

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\, P(X=k) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\, \frac{n!}{k!(n-k)!}\, p^k q^{n-k} \\ &= n(n-1) \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} p^k q^{n-k} = n(n-1)p^2 \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} p^i q^{n-2-i} \\ &= n(n-1)p^2 \end{aligned}$$

On en déduit :

▷ **Exercice 4.**

II. Couples de variables aléatoires

A. Définitions

Définition. Un couple de variables aléatoires est un couple (X, Y) de variables aléatoires définies sur un même univers.

Exemple 1. On jette deux dés. On nomme X et Y les variables aléatoires égales respectivement au plus petit et au plus grand numéro obtenu.

Calculer la loi conjointe du couple (X, Y), puis les lois marginales de X et de Y.

Définitions. La loi conjointe du couple (X, Y) est la donnée des réels :

$$\begin{array}{ll} & P(X = x \ \cap \ Y = y) \qquad \text{pour tout } x \in X(\Omega) \text{ et } y \in Y(\Omega). \\ \text{ou} & P(X = x, Y = y) \end{array}$$

Les lois marginales du couple (X, Y) sont les lois de X et de Y.

Remarque. Un couple de variables aléatoires sur Ω est une fonction vectorielle sur Ω, c'est-à-dire une fonction de Ω dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{rcl} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$$

L'événement $(X = x) \cap (Y = y)$ est l'image réciproque du singleton $\{(x, y)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

Proposition. *Les lois marginales sont données par les formules :*

$$\begin{array}{llcl} \forall x \in X(\Omega) & P(X = x) & = & \displaystyle\sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x \ \cap \ Y = y) \\ \forall y \in Y(\Omega) & P(Y = y) & = & \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x \ \cap \ Y = y) \end{array}$$

Démonstration. La famille $\{Y = y \mid \ y \in Y(\Omega)\}$ est un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne, quel que soit $x \in X(\Omega)$:

$$P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P_{Y=y}(X = x)\, P(Y = y)$$

Ceci donne la première formule, la seconde se démontre de façon similaire. □

Remarques.

(i) En conséquence :

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x, Y = y) = 1$$

(ii) La connaissance de la loi conjointe du couple (X, Y) permet de retrouver les lois marginales, alors que la connaissance des lois marginales ne permet pas de retrouver la loi conjointe.

▷ **Exercice 5 (a).**

B. Propriétés

Définition. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. On dit que X et Y suivent la même loi si :

On note alors $X \sim Y$.

Remarque. Ceci ne signifie pas que X et Y sont égales.

Exemple. On jette deux dés. Soit X et Y les variables aléatoires égales aux numéros donnés respectivement par le premier et le second dé.

Alors X et Y sont différentes mais suivent toutes les deux la loi $\mathcal{U}(6)$.

Proposition. *Si $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ est une fonction et X et Y sont deux variables aléatoires suivant la même loi alors $f(X)$ et $f(Y)$ suivent la même loi.*

Proposition (Croissance). *Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires sur Ω.*

On suppose que $X \leqslant Y$, i.e., *que pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \leqslant Y(\omega)$. Alors $E(X) \leqslant E(Y)$.*

Démonstration. On utilise l'autre définition de l'espérance. Comme :

$$\forall \omega \in \Omega \qquad X(\omega) \leqslant Y(\omega) \qquad \text{et} \qquad P(\{\omega\}) \geqslant 0$$

Alors par somme :

$$\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\}) \leqslant \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) P(\{\omega\})$$

Ceci donne bien $E(X) \leqslant E(Y)$. □

Exemple. On jette deux dés. Soit X_1 et X_2 les variables aléatoires égales aux numéro du premier dé et du second dé.

Soit $X = \operatorname{Max}\{X_1, X_2\}$.

Théorème de transfert généralisé. *Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires, et $f : X(\Omega) \times Y(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors l'espérance de la variable aléatoire $f(X, Y)$ est :*

$$E(f(X,Y)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} f(x,y) P(X = x \cap Y = y)$$

Démonstration. Il s'agit du théorème de transfert, en notant Z la variable aléatoire égale au couple (X, Y), *i.e.*,

$$\begin{aligned} Z : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \omega &\longmapsto (X(\omega), Y(\omega)). \end{aligned}$$

□

Exemple. L'espérance du produit de deux variables aléatoires X et Y est :

$$E(XY) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} xy P(X = x \cap Y = y)$$

C. Lois conditionnelles

Définition. Soit A un événement et X une variable aléatoire, tous deux définis sur un univers Ω. La loi de X conditionnée par A, ou la loi de X sachant A est l'ensemble des réels :

$$P_A(X = x) \qquad \text{avec } x \text{ parcourant } X(\Omega)$$

Définition. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. La loi de X conditionnée par Y, ou la loi de X sachant Y est l'ensemble des réels :

$$P_{Y=y}(X = x) \qquad \text{avec } (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$$

▷ **Exercice 5 (b).**

D. Somme de variables aléatoires

Proposition. *Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires finies entières. Soit $Z = X + Y$ leur somme. Alors pour tout $n \in Z(\Omega)$:*

$$P(Z = n) =$$

Démonstration. Soit $N = \max X(\Omega)$. La famille $\{X = k \mid 0 \leqslant k \leqslant N\}$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, pour tout $n \in Z(\Omega)$:

$$P(Z = n) = \sum_{k=0}^{N} P_{X=k}(Z = n) P(X = k) = \sum_{k=0}^{N} P(Z = n \cap X = k)$$

Or : $\quad (Z = n \cap X = k) = (X + Y = n \cap X = k) = (Y = n - k \cap X = k)$

D'où le résultat, en remarquant également que cet événement est impossible si $k \geqslant n$. □

Théorème (Linéarité de l'espérance). *Pour tout couple de variables aléatoires* (X, Y) *et tous réels* a *et* b *:*

Remarque. Il est faux en général que $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ et que $\sigma(X+Y) = \sigma(X) + \sigma(Y)$.

Démonstration.

E. Covariance

Définition. La covariance d'un couple de variables aléatoires (X, Y) est :

Proposition (Formule de König-Huyghens). *Soit* (X, Y) *un couple de variables aléatoires sur un univers fini. Alors :*

Démonstration. Il suffit d'utiliser la linéarité de l'espérance. □

Remarque. Par théorème de transfert généralisé :

▷ **Exercice 5 (c).**

Remarques.

(i) Pour toute variable aléatoire X :

$$\mathrm{Cov}(X, X) =$$

(ii) La covariance peut être positive ou négative. Lorsqu'elle est négative, ceci signifie que la variable Y a tendance à prendre des grandes valeurs lorsque X en prend des petites, et vice-versa.

(iii) De façon analogue à la formule $V(aX + b) = a^2V(X)$:

$$\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \qquad \mathrm{Cov}(aX + b, cY + d) =$$

Nous verrons que la variance est <u>bilinéaire</u>.

Proposition. *Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. Alors :*

$$V(X + Y) =$$

Remarque. La covariance peut donc être calculée par la formule :

<u>Démonstration</u>.

III. Indépendance

A. Variables aléatoires indépendantes

Définition. Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si :

On note alors $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Remarque. Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout $y \in Y(\Omega)$ la loi de X sachant $Y = y$ est égale à la loi de X :

Proposition. *Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si :*

Démonstration. Le sens indirect est évident, en posant $A = \{x\}$ et $B = \{y\}$.

Pour le sens direct, on suppose que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, et on considère A une partie de $X(\Omega)$, B une partie de $Y(\Omega)$. Alors :

$$P(X \in A) = \sum_{a \in A} P(X = a) \qquad \text{et} \qquad P(Y \in B) = \sum_{b \in B} P(Y = b)$$

Par indépendance de X et Y on en déduit :

$$P(X \in A) \times P(Y \in B) = \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} P(X = a \cap Y = b)$$

Ceci donne, comme prévu :

$$P(X \in A) \times P(Y \in B) = \sum_{(a,b) \in A \times B} P(X = a \cap Y = b) = P((X, Y) \in A \times B) \qquad \square$$

Remarque. Si deux variables aléatoires sont indépendantes alors on peut retrouver leur loi conjointe à partir de leurs lois marginales.

Exemple 2. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires indépendantes dont les lois sont données par les tableaux ci-dessous.

x	0	3	5	6
$P(X = x)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

y	1	2	3
$P(Y = y)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{2}{10}$

Donner la loi conjointe du couple (X, Y).

▷ **Exercice 5 (d).**

Proposition. *Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.*
Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes alors les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ le sont aussi.

Exemple. Si X et Y sont indépendantes alors X^2 et Y^2 sont indépendantes.

Démonstration. On vérifie la définition de l'indépendance de deux variables aléatoires :

$$\forall x \in f(X(\Omega)) \quad \forall y \in g(Y(\Omega))$$
$$P(f(X) = x \cap g(Y) = y) = P(f(X) = x) \times P(g(Y) = y)$$

Pour ceci on écrit :

$$P(f(X) = x) \times P(g(Y) = y) = P(X \in f^{-1}(\{x\})) \times P(Y \in g^{-1}(\{y\}))$$

Comme X et Y sont indépendantes alors par propriété :

$$\begin{aligned} P(f(X) = x) \times P(g(Y) = y) &= P\Big((X, Y) \in f^{-1}(\{x\}) \times g^{-1}(\{y\})\Big) \\ &= P\Big(\Big(X \in f^{-1}(\{x\})\Big) \cap \Big(Y \in g^{-1}(\{y\})\Big)\Big) \\ &= P(f(X) = x \cap g(Y) = y) \end{aligned}$$

L'égalité est démontrée pour tout $x \in f(X(\Omega))$ et $y \in g(Y(\Omega))$ donc les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes. □

Remarque. Soit n un entier naturel non-nul.

On généralise la notion de couple de variables aléatoires aux n-uplets de variables aléatoires définies sur un même univers Ω : un n-uplet $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires réelles sur Ω est une application de Ω dans $\mathbb{R}^n$.

Définition. Des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ définies sur un même univers sont mutuellement indépendantes si :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i(\Omega) \qquad P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)$$

Proposition. *Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes si et seulement si pour toute famille $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de $\prod_{i=1}^{n} \mathscr{P}(X_i(\Omega))$ les événements $(X_i \in A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont mutuellement indépendants.*

Proposition (lemme des coalitions). *Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, p un entier tel que $1 \leqslant p < n$. Soit f une fonction de p variables, définie sur $\prod_{i=1}^{p} X_i(\Omega)$, g une fonction de $n - p$ variables, définie sur $\prod_{i=p+1}^{n} X_i(\Omega)$.*
Alors les variables aléatoires $f(X_1, \ldots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes.

Remarque. Ceci se généralise à plus de deux coalitions.

B. Indépendance et corrélation

Remarque. Les formules pour la covariance montrent que pour tout couple de variable aléatoire (X, Y) :

$$E(XY) = E(X)E(Y) \iff V(X+Y) = V(X) + V(Y) \iff \mathrm{Cov}(X, Y) = 0$$

Dans cette situation on dit que X et Y sont décorrélées.

Proposition. *Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. Si X et Y sont indépendantes alors :*
(i) $E(XY) = E(X)E(Y)$ *(ii)* $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ *(iii)* $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.
La réciproque est fausse en général.

Démonstration.

Remarques.

(i) La propriété $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ est toujours vraie, alors que la propriété $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ est vraie si X et Y sont indépendantes.

(ii) Si X et Y sont indépendantes alors :

$$V(X - Y) =$$

▷ **Exercice 6.**

Corollaire. *Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-uplet de variables aléatoires. Si les X_k sont deux-à-deux indépendantes alors :*

$$V(X_1 + \cdots + X_n) = V(X_1) + \cdots + V(X_n)$$

Démonstration. On démontre par récurrence que :

$$V(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

Le corollaire en découle. □

Remarque. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires non constantes.
Le coefficient de corrélation linéaire de X et Y est le réel :

$$r = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Nous démontrerons qu'il est toujours compris entre -1 et 1 : $r \in [-1, 1]$
Si X et Y sont indépendantes alors $r = 0$.
Si $r = \pm 1$ alors il existe a et b tels que $P(Y = aX + b) = 1$: X et Y sont linéairement corrélées.
Si $r = 1$ alors a est positif, si $r = -1$ alors a est négatif.

▷ **Exercice 5 (e).**

C. Application à la loi binomiale

Lemme. *Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, X suivant une loi binomiale de paramètres (n, p), et Y suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. Alors $X + Y$ suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n + 1, p)$.*

Démonstration. On note $q = 1 - p$, et $Z = X + Y$

On vérifie également que :

$$P(Z = 0) = P(X = 0 \cap Y = 0) = P(X = 0)P(Y = 0) = q^{n+1}$$

$$\text{et} \qquad P(Z = n + 1) = P(X = n \cap Y = 1) = P(X = n)P(Y = 1) = p^{n+1}$$

La variable aléatoire Z suit donc bien une loi $\mathscr{B}(n + 1, p)$. □

Corollaire. *Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$.*

Alors $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.

Démonstration. Par récurrence sur n, en utilisant le lemme précédent. □

Remarque. Ceci donne par linéarité : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$

Comme de plus les X_i sont mutuellement indépendantes alors : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$

On en déduit que : $E(X) = \sum_{k=1}^{n} p = np \qquad V(X) = \sum_{i=1}^{n} pq = npq$

Les formules pour l'espérance et la variance d'une loi binomiale sont ainsi démontrées.

Corollaire. *Soit X et Y deux variables indépendantes, X suivant une loi binomiale de paramètres (n, p), et Y suivant une loi binomiale de paramètres (m, p). Alors $Z = X + Y$ suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n + m, p)$.*

Démonstration. On pose $Y = \sum_{k=1}^{m} Y_k$ et on applique le lemme m fois. □

IV. Inégalités probabilistes

Théorème - Inégalité de Markhov. Andreï Markhov, Russie, 1856 – 1922. *Soit X une variable aléatoire sur un univers fini, positive (i.e., telle que $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}_+$). Alors :*

Remarques.

(i) Ce théorème est très général, il est valable pour toute variable aléatoire dès qu'elle admet une espérance.

(ii) Si a grandit alors X a de moins en moins de chances d'être supérieur à a. En particulier la limite de $P(X \geqslant a)$ est nulle lorsque a tend vers $+\infty$.

(iii) L'inégalité est évidente si $a \leqslant E(X)$, car alors $\frac{E(X)}{a} \geqslant 1$.

Démonstration.

T. S. V. P.

Théorème - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
Irénée-Jules Bienaymé, France, 1796 – 1878, Pafnouti Tchebychev, Russie, 1821-1894.
Si X est une variable aléatoire sur un univers fini alors :

Remarques.

(i) Ce théorème est également très général, il est valable pour toute variable aléatoire dès qu'elle admet une espérance et une variance.

(ii) Si a est grand alors X est rarement hors de l'intervalle $]E(X) - a, E(X) + a[$.

Ceci montre qu'une variable aléatoire est rarement éloignée de sa moyenne.

De plus, comme la majoration fait intervenir la variance, celle-ci est bien un paramètre de dispersion.

(iii) L'inégalité est évidente si $a \leqslant \sigma(X)$, car alors $\frac{V(X)}{a^2} \geqslant 1$.

Démonstration de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Soit $Y = (X - E(X))^2$.

Cette variable aléatoire est positive donc on peut lui appliquer l'inégalité de Markhov.

Soit a un réel strictement positif. Alors a^2 est strictement positif donc d'après l'inégalité de Markhov :

$$P(Y \geqslant a^2) \leqslant \frac{E(Y)}{a^2}$$

Par définition de la variance : $E(Y) = E((X - E(X))^2) = V(X)$

De plus :

$$Y \geqslant a^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (X - E(X))^2 \geqslant a^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad |X - E(X)| \geqslant a$$

On en déduit bien :

$$P(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}. \qquad \square$$