

Définition. (Jacques Bernoulli, Suisse, 1654 – 1705). Une variable aléatoire suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$ si elle prend les valeurs 1 et 0, avec les probabilités respectives p et $q = 1 - p$:

[illegible]

Proposition. *Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p alors :*

$E(X) =$	$V(X) =$	$\sigma(X) =$
----------	----------	---------------

Remarques.

- (i) La loi de Bernoulli est la loi indicatrice d'un événement A de probabilité p :
La variable aléatoire prend la valeur 1 si A a lieu et 0 sinon.
- (ii) Une variable aléatoire suit une loi de Bernoulli si et seulement si $X(\Omega) = \{0, 1\}$.
Son paramètre est alors $p = P(X = 1)$.

Définition. On réalise n expériences identiques et indépendantes. Soit A un événement pouvant résulter de cette expérience, et p la probabilité de A . On note $q = 1 - p$.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de réalisations de l'événement A au cours des n expériences. On dit alors que X suit une loi binomiale de paramètres n et p , et on note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Proposition. Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p alors :

$X(\Omega) =$	$\forall k \in X(\Omega)$	$P(X = k) =$
$E(X) =$	$V(X) =$	

(i) Si $n = 1$ alors on retrouve la loi de Bernoulli, ce qui justifie la notation $\mathcal{B}(1, p)$ pour celle-ci.

- (ii) La formule du binôme montre qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité de X .

Démonstration. Sur n expériences le nombre de réalisation de l'événement A est un entier compris entre 0 et n , donc $X(\Omega) = \{0, \dots, n\}$

Soit k un entier compris entre 0 et n . L'événement $X = k$ se produit si au cours des n expériences l'événement A a lieu exactement k fois. Dans ce cas l'événement contraire $\overline{A}$ a lieu $(n - k)$ fois.

Parmi les n expériences, k d'entre elles voient l'événement A se produire. Le nombre de façons de choisir k expériences parmi n est $\binom{n}{k}$.

Si les k expériences sont fixées, la probabilité que l'événement A se réalise lors de ces k expériences et l'événement B se réalise lors des $(n - k)$ autres expériences est $p^k q^{n-k}$, car toutes les expériences sont mutuellement indépendantes.

On obtient donc $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

Démonstration de la formule pour l'espérance.

Démonstration de la formule pour la variance.

On calcule $E(X(X-1))$ plutôt que $E(X^2)$:

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= \sum_{k=0}^n k(k-1) P(X=k) = \sum_{k=2}^n k(k-1) \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\ &= n(n-1) \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} p^k q^{n-k} = n(n-1) p^2 \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} p^i q^{n-2-i} \\ &= n(n-1) p^2 \end{aligned}$$

On en déduit :

▷ Exercice 4.

II. Couples de variables aléatoires

A. Définitions

Définition. Un couple de variables aléatoires est un couple (X, Y) de variables aléatoires définies sur un même univers.

Exemple 1. On jette deux dés. On nomme X et Y les variables aléatoires égales respectivement au plus petit et au plus grand numéro obtenu.

Calculer la loi conjointe du couple (X, Y) , puis les lois marginales de X et de Y .

Définitions. La loi conjointe du couple (X, Y) est la donnée des réels :

$$P(X = x \cap Y = y) \quad \text{pour tout } x \in X(\Omega) \text{ et } y \in Y(\Omega). \\ \text{ou } P(X = x, Y = y)$$

Les lois marginales du couple (X, Y) sont les lois de X et de Y .

Remarque. Un couple de variables aléatoires sur Ω est une fonction vectorielle sur Ω , c'est-à-dire une fonction de Ω dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \omega &\longmapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{aligned}$$

L'événement $(X = x) \cap (Y = y)$ est l'image réciproque du singleton $\{(x, y)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

Proposition. Les lois marginales sont données par les formules :

$$\begin{aligned} \forall x \in X(\Omega) \quad P(X = x) &= \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x \cap Y = y) \\ \forall y \in Y(\Omega) \quad P(Y = y) &= \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x \cap Y = y) \end{aligned}$$

Démonstration. La famille $\{Y = y \mid y \in Y(\Omega)\}$ est un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne, quel que soit $x \in X(\Omega)$:

$$P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P_{Y=y}(X = x) P(Y = y)$$

Ceci donne la première formule, la seconde se démontre de façon similaire. □

Remarques.

(i) En conséquence :

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x, Y = y) = 1$$

(ii) La connaissance de la loi conjointe du couple (X, Y) permet de retrouver les lois marginales, alors que la connaissance des lois marginales ne permet pas de retrouver la loi conjointe.

▷ **Exercice 5 (a).**

B. Propriétés

Définition. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. On dit que X et Y suivent la même loi si :

[illegible]

On note alors $X \sim Y$.

Remarque. Ceci ne signifie pas que X et Y sont égales.

Exemple. On jette deux dés. Soit X et Y les variables aléatoires égales aux numéros donnés respectivement par le premier et le second dé.

Alors X et Y sont différentes mais suivent toutes les deux la loi $\mathcal{U}(6)$.

Proposition. *Si $f : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction et X et Y sont deux variables aléatoires suivant la même loi alors $f(X)$ et $f(Y)$ suivent la même loi.*

Proposition (Croissance). *Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires sur Ω .*

On suppose que $X \leq Y$, i.e., que pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \leq Y(\omega)$. Alors $E(X) \leq E(Y)$.

Démonstration. On utilise l'autre définition de l'espérance. Comme :

$$\forall \omega \in \Omega \quad X(\omega) \leq Y(\omega) \quad \text{et} \quad P(\{\omega\}) \geq 0$$

Alors par somme :

$$\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\}) \leq \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega)P(\{\omega\})$$

Ceci donne bien $E(X) \leq E(Y)$.

▷ **Exercise 6.**

Théorème de transfert généralisé. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires, et $f : X(\Omega) \times Y(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Alors l'espérance de la variable aléatoire $f(X, Y)$ est :

$$E(f(X, Y)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} f(x, y) P(X = x \cap Y = y)$$

Exemple. L'espérance du produit de deux variables aléatoires X et Y est :

$$E(XY) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} xyP(X = x \cap Y = y)$$

Démonstration. Il s'agit du théorème de transfert, en notant Z la variable aléatoire égale au couple (X, Y) , *i.e.*,

$$\begin{aligned} Z : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \omega &\longmapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{aligned}$$

Définition. Soit A un événement et X une variable aléatoire, tous deux définis sur un univers Ω . La loi de X conditionnée par A , ou la loi de X sachant A est l'ensemble des réels :

$$P_A(X = x) \quad \text{avec } x \text{ parcourant } X(\Omega)$$

Définition. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. La loi de X conditionnée par Y , ou la loi de X sachant Y est l'ensemble des réels :

$$P_{Y=y}(X = x) \quad \text{avec } (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$$

▷ **Exercice 5** (b, c, d).

Proposition. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires finies entières. Soit $Z = X + Y$ leur somme. Alors pour tout $n \in Z(\Omega)$:

$$P(Z = n) =$$

Démonstration. Soit $N = \max X(\Omega)$. La famille $\{X = k \mid 0 \leq k \leq N\}$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, pour tout $n \in Z(\Omega)$:

$$P(Z = n) = \sum_{k=0}^N P_{X=k}(Z = n)P(X = k) = \sum_{k=0}^N P(Z = n \cap X = k)$$

$$\text{Or : } (Z = n \cap X = k) = (X + Y = n \cap X = k) = (Y = n - k \cap X = k)$$

D'où le résultat, en remarquant également que cet événement est impossible si $k \geq n$. $\square$

Théorème (Linéarité de l'espérance). *Pour tout couple de variables aléatoires (X, Y) et tous réels a et b :*

[illegible]

Remarque. Il est faux en général que $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ et que $\sigma(X + Y) = \sigma(X) + \sigma(Y)$.

[illegible]

[illegible]

A. Variables aléatoires indépendantes

[illegible][illegible]
$$P(X \in A) = \sum_{a \in A} P(X = a) \quad \text{et} \quad P(Y \in B) = \sum_{b \in B} P(Y = b)$$
$$P(X \in A) \times P(Y \in B) = \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} P(X = a \cap Y = b)$$
$$P(X \in A) \times P(Y \in B) = \sum_{(a,b) \in A \times B} P(X = a \cap Y = b) = P((X, Y) \in A \times B) \quad \square$$

Remarque. Si deux variables aléatoires sont indépendantes alors on peut retrouver leur loi conjointe à partir de leurs lois marginales.

Exemple 2. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires indépendantes dont les lois sont données par les tableaux ci-dessous.

x	0	3	5	6
$P(X = x)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

y	1	2	3
$P(Y = y)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{2}{10}$

Donner la loi conjointe du couple (X, Y) .

▷ **Exercice 5 (f).**

Proposition. Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.

Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes alors les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ le sont aussi.

Exemple. Si X et Y sont indépendantes alors X^2 et Y^2 sont indépendantes.

Démonstration. On vérifie la définition de l'indépendance de deux variables aléatoires :

$$\forall x \in f(X(\Omega)) \quad \forall y \in g(Y(\Omega))$$

$$P(f(X) = x \cap g(Y) = y) = P(f(X) = x) \times P(g(Y) = y)$$

Pour ceci on écrit :

$$P(f(X) = x) \times P(g(Y) = y) = P(X \in f^{-1}(\{x\})) \times P(Y \in g^{-1}(\{y\}))$$

Comme X et Y sont indépendantes alors par propriété :

$$\begin{aligned} P(f(X) = x) \times P(g(Y) = y) &= P((X, Y) \in f^{-1}(\{x\}) \times g^{-1}(\{y\})) \\ &= P\left(\left(X \in f^{-1}(\{x\})\right) \cap \left(Y \in g^{-1}(\{y\})\right)\right) \\ &= P(f(X) = x \cap g(Y) = y) \end{aligned}$$

L'égalité est démontrée pour tout $x \in f(X(\Omega))$ et $y \in g(Y(\Omega))$ donc les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes. $\square$

On généralise la notion de couple de variables aléatoires aux n -uplets de variables aléatoires définies sur un même univers Ω : un n -uplet $(X_1, \dots, X_n)$ de variables aléatoires réelles sur Ω est une application de Ω dans $\mathbb{R}^n$.

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n X_i(\Omega) \quad P\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i)$$

Proposition (lemme des coalitions). Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, p un entier tel que $1 \leq p < n$. Soit f une fonction de p variables, définie sur $\prod_{i=1}^p X_i(\Omega)$, g une fonction de $n - p$ variables, définie sur $\prod_{i=p+1}^n X_i(\Omega)$. Alors les variables aléatoires $f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

B. Indépendance et corrélation

$$E(XY) = E(X)E(Y) \iff V(X+Y) = V(X) + V(Y) \iff \text{Cov}(X, Y) = 0$$
$$(i) E(XY) = E(X)E(Y) \quad (ii) V(X + Y) = V(X) + V(Y) \quad (iii) \text{Cov}(X, Y) = 0.$$

Démonstration.

C. Application à la loi binomiale

Lemme. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, X suivant une loi binomiale de paramètres (n, p) , et Y suivant une loi de Bernoulli de paramètre p . Alors $X + Y$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n + 1, p)$.

Démonstration. On note $q = 1 - p$, et $Z = X + Y$

Tout d'abord $Z(\Omega) = \{0, \dots, n + 1\}$, puis pour tout $k = 1, \dots, n$:

$$(Z = k) = (X = k \cap Y = 0) \cup (X = k - 1 \cap Y = 1)$$

Ceci donne, par incompatibilité de $(X = k \cap Y = 0)$ et $(X = k - 1 \cap Y = 1)$ puis indépendance de X et Y :

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= P(X = k)P(Y = 0) + P(X = k - 1)P(Y = 1) \\ &= \binom{n}{k} p^k q^{n+1-k} + \binom{n}{k-1} p^k q^{n+1-k} \\ &= \binom{n+1}{k} p^k q^{n+1-k} \end{aligned}$$

On vérifie également que :

$$\begin{aligned} P(Z = 0) &= P(X = 0 \cap Y = 0) = P(X = 0)P(Y = 0) = q^{n+1} \\ \text{et} \quad P(Z = n + 1) &= P(X = n \cap Y = 1) = P(X = n)P(Y = 1) = p^{n+1} \end{aligned}$$

La variable aléatoire Z suit donc bien une loi $\mathcal{B}(n + 1, p)$. □

Corollaire. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$.

Alors $X = \sum_{i=1}^n X_i$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Démonstration. Par récurrence sur n , en utilisant le lemme précédent. □

Remarque. Ceci donne par linéarité : $E(X) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$

Comme de plus les X_i sont mutuellement indépendantes alors : $V(X) = \sum_{i=1}^n V(X_i)$

On en déduit que : $E(X) = \sum_{k=1}^n p = np$ $V(X) = \sum_{i=1}^n pq = npq$

Les formules pour l'espérance et la variance d'une loi binomiale sont ainsi démontrées.

Corollaire. Soit X et Y deux variables indépendantes, X suivant une loi binomiale de paramètres (n, p) , et Y suivant une loi binomiale de paramètres (m, p) . Alors $Z = X + Y$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n + m, p)$.

Démonstration. On pose $Y = \sum_{k=1}^m Y_k$ et on applique le lemme m fois. □

Théorème - Inégalité de Markhov. Andreï Markhov, Russie, 1856 – 1922. *Soit X une variable aléatoire sur un univers fini, positive (i.e., telle que $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}_+$). Alors :*

- (i) Ce théorème est très général, il est valable pour toute variable aléatoire dès qu'elle admet une espérance.
- (ii) Si a grandit alors X a de moins en moins de chances d'être supérieur à a . En particulier la limite de $P(X \geq a)$ est nulle lorsque a tend vers $+\infty$.
- (iii) L'inégalité est évidente si $a \leq E(X)$, car alors $\frac{E(X)}{a} \geq 1$.

Démonstration.

A large grid of graph paper, consisting of 20 columns and 20 rows of squares, intended for a demonstration.

Si X est une variable aléatoire sur un univers fini alors :

[illegible]