Feuille de T. D. C3
Variables aléatoires

Exercices de cours

1 Soit X une variable aléatoire définie sur un univers fini. Démontrer que X est constante si et seulement si sa variance est nulle (utiliser le théorème de transfert.)

2 Soit a et b deux entiers avec $a < b$ et X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'ensemble $\{a, \dots, b\}$.

Déterminer l'espérance et la variance de X.

3 Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire X suivant une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

4 Bob joue à pile ou face avec Aldo, en utilisant une pièce truquée qui donne pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$.

Bob donne 30 euros à Aldo, puis il jette dix fois la pièce. Il récupère 8 euros à chaque Pile qu'il obtient.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de Piles obtenus, Y la variable aléatoire égale au gain de Bob.

a. Justifier que X suit une loi binomiale, donner ses paramètres et son espérance.

b. Exprimer Y en fonction de X et calculer $E(Y)$.

c. À quelle condition Bob a-t-il intérêt à jouer ?

5 On possède un sac contenant n jetons numérotés de 1 à n (avec $n \geqslant 2$).

On pioche l'un après l'autre deux jetons de ce sac, sans les remettre, et on note X et Y les variables aléatoires égales au premier et au second numéro obtenu.

a. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).
En déduire ses lois marginales, ainsi que leurs espérances et leurs variances.

b. Déterminer directement la loi de X.

c. Donner, pour tout $i \in X(\Omega)$, la loi de Y conditionnée par $X = i$.

d. Retrouver ainsi la loi du couple (X, Y).

e. Calculer la covariance du couple (X, Y) et la variance de $X + Y$.

f. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

g. Calculer le coefficient de corrélation linéaire du couple (X, Y).
Que peut-on dire de ses valeurs extrêmes ?

6 On jette deux dés, dont l'un seulement est rouge. Soit X la variable aléatoire égale au plus grand numéro obtenu, dont la loi a été calculée dans l'exercice 0, et Y la variable aléatoire égale au numéro du dé rouge.

a. Donner la loi de Y, son espérance et sa variance.

b. Calculer l'espérance de X.

c. Justifier que $Y \leqslant X$ et vérifier la croissance.

7 Soit (X, Y) le couple de variables aléatoires dont la loi est donnée par le tableau suivant :

Y \ X	0	1	2
0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$

Calculer les espérances de X, Y et XY, puis les variances de X et de Y. Que peut-on en déduire ?

Travaux dirigés

1 Soit X une variable aléatoire finie à valeurs dans $\mathbb{N}$. La *fonction génératrice* de X est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad G_X(t) = \sum_{k \in X(\Omega)} P(X = k) t^k$$

a. Justifier que deux variables aléatoires X et Y suivent la même loi si et seulement si elles ont même fonction génératrice.

b. Que valent $G_X(1)$ et $G'_X(1)$?

c. Exprimer $V(X)$ en fonction de G_X, G'_X et G''_X.

d. On suppose que X suit une loi binomiale.
Utiliser la fonction génératrice de X pour retrouver $E(X)$ et $V(X)$.

e. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Démontrer que si X et Y sont indépendantes alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.
On pourra remarquer que $G_X(t) = E(t^X)$.

2 Soit X suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Déterminer l'espérance de $\frac{1}{1+X}$.

3 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $U = X + Y$ et $V = X - Y$.

a. Déterminer la loi conjointe du couple (U, V) puis ses lois marginales.

b. Calculer la covariance du couple (U, V). Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

4 Démontrer que deux variables aléatoire de Bernoulli sont indépendantes si et seulement si leur covariance est nulle.

5 On jette n dés ($n \geqslant 1$), et on note X et Y les variables aléatoires égales aux nombres de 1 et de 6 obtenus.

a. Déterminer les lois suivies par X et Y, leurs espérances et leurs variances.

b. Reconnaître, pour tout $j \in Y(\Omega)$, la loi de X sachant $Y = j$.

c. En déduire la loi conjointe du couple (X, Y).

d. X et Y sont-elles indépendantes ?

e. Déterminer la loi de $Z = X + Y$.
Vérifier par le calcul.

f. Calculer la covariance du couple (X, Y) puis son coefficient de corrélation linéaire.

6 On pioche deux boules successivement et sans remise dans une urne contenant n boules dont a noires, avec $0 < a < n$, les autres étant blanches.

On note X_1 et X_2 les variables aléatoires égales à 1 si la première boule, respectivement la seconde, est noire, et à 0 sinon.

a. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2), ainsi que ses lois marginales.

b. Démontrer que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

c. Calculer la covariance du couple (X_1, X_2).

d. Soit $X = X_1 + X_2$. Quel sens donner à X ?
Calculer la loi de X, son espérance et sa variance.

7 On lance N fois un dé équilibré ($N \in \mathbb{N}^*$) et on note n est le nombre de six obtenus. On lance n fois une pièce qui donne pile avec la probabilité $p \in]0,1[$. On définit les variables aléatoires :

Z : le nombre de six obtenus aux lancers du dé,
X : le nombre de piles obtenus,
Y : le nombre de faces obtenus.

a. Quelle est la loi de Z ?

b. Pour n fixé quelle est la loi de X sachant $Z = n$?

c. En déduire la loi de X. Reconnaître cette loi, décrire de même la loi de Y.

d. Calculer la covariance du couple (X, Y), puis son coefficient de corrélation linéaire.

8 On tire simultanément trois boules d'une urne contenant a boules rouges, b boules jaunes et c boules bleues, avec a, b, c strictement supérieurs à 1. On note X, Y, Z les variables aléatoires égales aux nombres de boules rouges, jaunes et bleues respectivement.

a. Démontrer que X, Y, Z ne sont pas deux-à-deux indépendantes.

b. Calculer $E(X) + E(Y) + E(Z)$.

c. Démontrer que $V(X + Y) = V(Z)$.

9 Un troupeau de 200 gnous fuit un feu de brousse. Sur son passage se trouve une rivière. Chaque gnou, indépendamment des autres, a la probabilité $\frac{1}{16}$ de se noyer. Sur l'autre rive une troupe de lionnes les attend, et là chaque gnou a la probabilité $\frac{1}{25}$ de se faire attraper, indépendamment des autres.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de gnous qui réussissent à passer la rivière, et Y le nombre de gnous qui ensuite échappent aux lionnes.

a. Déterminer la loi de X.

b. Pour tout $n \in X(\Omega)$, déterminer la loi de Y sachant $X = n$.

c. En déduire la loi de Y.

d. Expliquer pourquoi on a obtenu une loi usuelle.

10 Un joueur réalise un score entier compris entre 0 et n ($n \in \mathbb{N}^*$ fixé). Au moment de noter son score, le joueur triche parfois en ajoutant 1 point.

Soit X la variable aléatoire égale au score réel et Y la variable aléatoire égale au score noté. Soit T la variable aléatoire égale à 1 si le joueur triche et à 0 sinon. On note $t = E(T)$.

Pour tout $k = 0, \ldots, n$ soit a_k la probabilité que le joueur triche si son score est égal à k.

a. Quelle relation relie X, Y et T ?
En déduire la loi de Y en fonction de celle de X et des a_k, puis l'espérance de Y en fonction de celle de X et de t.

On suppose que : $\forall k \in \{0, \ldots, n\} \quad a_k = 1 - \frac{k}{n}$.

b. Exprimer la valeur de t en fonction de l'espérance de X et de n.

c. Déterminer $Y(\Omega)$.

d. Déterminer la loi de Y dans le cas où X suit une loi uniforme sur $\{0, \ldots, n\}$.
Vérifier la valeur de son espérance.

e. On suppose que X suit une loi binomiale de paramètres n et $p \in]0,1[$.
Déterminer la loi de Y et reconnaître celle de $Y - 1$. Vérifier la valeur de son espérance.

11 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires tel que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{0, \dots, n\}$ avec $n \geqslant 1$, et pour tout couple (i, j) de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$:

$$P(X = i \cap Y = j) = \begin{cases} \lambda & \text{si } 0 \leqslant i + j \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a. Calculer la valeur de λ.

b. Calculer les lois de X et de Y.
Ces variables sont-elles indépendantes ?

c. Calculer la loi de $Z = X + Y$.

d. Calculer les espérances de X, Y et Z.

e. Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que Z suit la même loi que $aX + b$.

f. En déduire la valeur du coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.

12 Soit N et a entiers tels que $0 < a < N$. On possède une urne contenant N boules, dont a sont noires et $b = N - a$ sont blanches.

On pioche sans remise n boules successivement dans l'urne, avec $n \in \{0, \dots, N\}$.

Pour tout $k = 1, \dots, n$ on note X_k la variable aléatoire égale à 1 si la k-ème boule est noire, et à 0 sinon.

a. Déterminer, pour tout $k = 1, \dots, n$, la loi de X_k.

b. Déterminer, pour tout $i, j = 1, \dots, n$, la loi de $X_i X_j$.

c. Soit $X = X_1 + \dots + X_n$.
Calculer l'espérance et la variance de X.

d. Reproduire l'exercice en supposant que l'on remet la boule obtenue après chaque tirage.
Que retrouve-t-on ?
Comparer l'espérance et la variance obtenues avec celles de la partie précédente.

13 Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires identiques et indépendantes, d'espérance m et d'écart-type σ.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $T_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$.

a. Déterminer l'espérance et l'écart-type de T_n en fonction de m, σ et n.

b. Démontrer que pour tout $a > 0$:

$$\lim_{n \to +\infty} P(|T_n - m| \geqslant a) = 0$$

c. Calculer l'espérance de la variable aléatoire :

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - T_n)^2$$

14 Soit X une variable aléatoire, d'espérance m et d'écart-type σ. Soit a un réel strictement positif.

a. Démontrer que pour tout $t > 0$:

$$E\big((X - m + t)^2\big) = \sigma^2 + t^2$$

b. En déduire que pour tout $t > 0$:

$$P(X - m \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2 + t^2}{(a + t)^2}$$

c. Démontrer que : $\quad P(X - m \geqslant a) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$

d. Démontrer que : $\quad P(|X - m| \geqslant a) \leqslant \dfrac{2\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$
Cette majoration est-elle meilleure que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ?