Corrigé du Devoir à la Maison n°13

Partie A. Règle de d'Alembert

1. On suppose $\ell < 1$.

(a) Soit $\varepsilon = q - \ell$. Comme $\ell < q$ alors $\varepsilon > 0$.

Comme la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers ℓ alors il existe un entier p tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant p \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$$

Comme (u_n) est positive alors :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell\right| \leqslant \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell \leqslant \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad u_{n+1} \leqslant (\ell + \varepsilon)u_n = qu_n$$

On a donc démontré qu'il existe un entier p tel que pour tout $n \geqslant p$: $\quad u_{n+1} \leqslant qu_n$

(b) Pour tout $n \geqslant p$ on note $\mathscr{P}_n$ la propriété : $\quad u_n \leqslant q^{n-p}u_p$

On démontre par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \geqslant p$.

Initialisation. Au rang $n = p$ la propriété est : $u_p \leqslant u_p$. Elle est bien vraie.

Hérédité. Supposons qu'à un rang $n \geqslant p$ la propriété est vraie : $\quad u_n \leqslant q^{n-p}u_p$

Comme $n \geqslant p$ alors d'après la question précédente : $\quad u_{n+1} \leqslant qu_n$

Par transitivité : $\quad u_{n+1} \leqslant q^{n+1-p}u_p$

La propriété est vraie au rang $n + 1$.

L'hérédité est démontrée.

Conclusion. Par récurrence, pour tout entier $n \geqslant p$: $\quad u_n \leqslant q^{n-p}u_p$

En posant $K = \frac{u_p}{q^p}$ on a bien une majoration de la forme $u_n \leqslant Kq^n$ valable pour tout $n \geqslant p$, avec K ne dépendant pas de n.

(c) La série de terme général u_n est à termes positifs et à partir d'un certain rang elle vérifie : $u_n \leqslant Kq^n$

Ceci est valable pour tout $q > \ell$. C'est en particulier valable pour $q = \frac{\ell+1}{2}$, lequel vérifie $\ell < q < 1$.

Comme $0 \leqslant q < 1$ alors la série de terme général q^n converge.

Par théorème de comparaison des séries à termes positifs la série de terme général u_n converge.

2. On suppose $\ell > 1$.

   Soit q un réel strictement compris entre 1 et ℓ.

   Par exemple si ℓ est fini on pose $q = \frac{\ell+1}{2}$ et si $\ell = +\infty$ on pose $q = 2$.

   Démontrons qu'à partir d'un certain rang : $u_{n+1} \geqslant qu_n$

   Si ℓ est fini on utilise la définition de la convergence de la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ vers ℓ avec $\varepsilon = \ell - q$. Comme $\varepsilon > 0$ alors il existe un entier p tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell\right| \leqslant \varepsilon \quad &\Longrightarrow \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell \geqslant -\varepsilon \\ &\Longrightarrow \quad u_{n+1} \geqslant (\ell - \varepsilon)u_n = qu_n \end{aligned}$$

   Si $\ell = +\infty$ alors on utilise la définition de la divergence de la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ vers $+\infty$ avec $A = q$. Il existe un entier p tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant q \quad \Longrightarrow \quad u_{n+1} \geqslant qu_n$$

   Ainsi à partir d'un rang p la suite (u_n) vérifie $u_{n+1} \geqslant qu_n$.

   Comme dans la question précédente on en déduit par récurrence qu'à partir de ce rang :

$$u_n \geqslant q^{n-p}u_p = q^n \frac{u_p}{q^p}$$

   La suite (u_n) est positive, la série de terme général q^n diverge car $q > 1$, donc par théorème de comparaison des séries à termes positifs la série de terme général u_n diverge.

3. Soit $(u_n) = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n) = \left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   Ces deux suites vérifient les hypothèses de cette partie car elles sont strictement positives, et :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \qquad \qquad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

   Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries de Riemann, on sait que la première diverge alors que la seconde converge.

   On constate donc que lorsque la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers 1 alors la série $\sum u_n$ peut converger ou diverger.

Partie B. Une application

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{n!}{n^n}\right)$ est strictement positive. On calcule :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{n!}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

Comme $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ alors $-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \to -1$ et donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to e^{-1} = \frac{1}{e}$.
Comme $\frac{1}{e} < 1$ alors d'après le résultat de la partie précédente la série de terme général u_n converge.

2. La formule de Stirling donne l'équivalent :

$$n^n \underset{(+\infty)}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

On en déduit :

$$u_n = \frac{n!}{n^n} \underset{(+\infty)}{\sim} \sqrt{2\pi}\frac{\sqrt{n}}{e^n}$$

Comme $\frac{e}{2} > 1$ alors par croissances comparées $n^{\frac{1}{2}} = o\left(\left(\frac{e}{2}\right)^n\right)$, ce qui montre que :

$$\sqrt{2\pi}\frac{\sqrt{n}}{e^n} \underset{(+\infty)}{=} \mathrm{o}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

Ainsi la suite (u_n) est négligeable devant la suite $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$, et elle est positive.
Or la série $\sum\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est convergente car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, donc d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs la série (u_n) est convergente.

Partie C. Règle de Raabe-Duhamel

1. On simplifie l'écriture de v_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad v_n = \ln\left((n+1)^\alpha u_{n+1}\right) - \ln\left(n^\alpha u_n\right) = \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha \frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$
$$= \alpha \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1-\frac{\alpha}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

On utilise un développement limité de $\ln(1+u)$ en 0 :

$$\ln(1+u) \underset{(0)}{=} u - \frac{u^2}{2} + \mathrm{o}\left(u^2\right) \underset{(0)}{=} u + \mathrm{O}(u^2)$$

Il donne :

$$v_n \underset{(+\infty)}{=} \frac{\alpha}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{\alpha}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{(+\infty)}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ceci montre que $|v_n| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente donc la série $\sum |v_n|$ est convergente par théorème de comparaison des séries à termes positifs, et ainsi la série $\sum v_n$ est absolument convergente.

2. La série $\sum v_n$ est absolument convergente donc elle est convergente.

On définit les sommes partielles associées à la série de terme général v_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\ln\left((n+1)^\alpha u_{n+1}\right) - \ln\left(n^\alpha u_n\right)\right)$$

Par télescopage :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad S_n = \sum_{k=2}^{n+1} \ln\left(n^\alpha u_n\right) - \sum_{k=1}^{n} \ln\left(n^\alpha u_n\right) = \ln\left((n+1)^\alpha u_{n+1}\right) - \ln\left(u_1\right)$$

Comme la série $\sum v_n$ est convergente alors la suite (S_{n-1}) converge vers une limite finie.

Par addition de $\ln(u_1)$ la suite $(\ln(n^\alpha u_n))$ converge vers un réel ℓ.

Par composition avec l'exponentielle la suite $(n^\alpha u_n)$ converge vers $\lambda = e^\ell$.

Cette limite est strictement positive, donc non-nulle, et donc par équivalences :

$$n^\alpha u_n \to \lambda \qquad \Longleftrightarrow \qquad u_n \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{\lambda}{n^\alpha}$$

On a démontré l'équivalence $u_n \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{\lambda}{n^\alpha}$ avec λ réel strictement positif.

3. Par théorème d'équivalence des séries à termes positifs la série $\sum u_n$ est de même nature que la série $\sum \frac{\lambda}{n^\alpha}$.

On sait que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

On en déduit que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Partie D. Une série d'intégrales

1. (a) L'entier $n \in \mathbb{N}^*$ étant fixé, on pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $f_n(x) = \frac{1}{(x^4+1)^n}$

Cette fonction est définie et continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$.

D'après le théorème fondamental la fonction F_n est définie sur $\mathbb{R}_+$, et elle est la primitive de f_n qui s'annule en 0.

Ainsi la fonction F_n est dérivable de dérivée f_n. Comme f_n est strictement positive alors F_n est strictement croissante.

(b) D'après la relation de Chasles :

$$\forall x \geqslant 1 \quad F_n(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(t^4+1)^n} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(t^4+1)^n} + \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{(t^4+1)^n} \qquad (1)$$
$$= F_n(1) + \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{(t^4+1)^n}$$

Soit $x \geqslant 1$. Alors :

$$\forall t \in [1, x] \qquad \frac{1}{(t^4+1)^n} \leqslant \frac{1}{(t^4)^n} \leqslant \frac{1}{t^4}$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{(t^4+1)^n} \leqslant \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^4} \qquad (2)$$

On calcule :

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^4} = \left[-\frac{1}{3t^3} \right]_1^x = \frac{1}{3} - \frac{1}{3x^3}$$

D'après (1) et (2) :

$$\forall x \in [1, +\infty[\qquad F_n(x) \leqslant F_n(1) + \frac{1}{3} - \frac{1}{3x^3} \leqslant F_n(1) + \frac{1}{3}$$

La fonction F_n est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et majorée au voisinage de $+\infty$ donc par théorème de la limite monotone elle admet une limite finie en $+\infty$.

2. (a) Par linéarité de l'intégrale :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad F_n(x) - F_{n+1}(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{(t^4+1)^n} - \frac{1}{(t^4+1)^{n+1}} \right) \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t^4}{(1+t^4)^{n+1}} \, \mathrm{d}t$$

Posons, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$: $u(t) = t$ et $v'(t) = \frac{t^3}{(1+t^4)^{n+1}}$

Comme $v'(t) = \frac{1}{4}(4t^3)(1+t^4)^{-n-1}$ alors elle admet pour primitive :

$$v(t) = \frac{1}{4} \frac{1}{-n} (1+t^4)^{-n} = -\frac{1}{4n(t^4+1)^n}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$. Par intégration par parties :

$$F_n(x) - F_{n+1}(x) = \left[-\frac{t}{4n(t^4+1)^n} \right]_0^x + \int_0^x \frac{1}{4n(t^4+1)^n} \, \mathrm{d}t$$

On en déduit :

$$F_n(x) - F_{n+1}(x) = -\frac{x}{4n(x^4+1)^n} + \frac{1}{4n}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(t^4+1)^n}$$

En posant $g_n(x) = -\frac{x}{(x^4+1)^n}$ on a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad F_n(x) - F_{n+1}(x) = \frac{1}{4n}F_n(x) + g_n(x)$$

(b) Pour x tendant vers $+\infty$ l'équivalence $g_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{x}{x^{4n}} = -\frac{1}{x^{4n-1}}$ montre que $g_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, puisque n est supposé strictement positif.

On sait que pour les fonctions F_n et F_{n+1} admettent les limites I_n et I_{n+1} lorsque x tend vers $+\infty$.

La relation de la question précédente donne par unicité de la limite :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad I_n - I_{n+1} = \frac{1}{4n}I_n$$

3. La relation précédente donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad I_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{4n}\right)I_n$$

On en déduit :

$$\frac{I_{n+1}}{I_n} = 1 - \frac{1}{4n} \underset{(+\infty)}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{avec} \quad \alpha = \frac{1}{4}$$

Les hypothèses de la partie précédente sont satisfaites car la suite (I_n) est strictement positive. En effet la fonction F_n est strictement croissante, donc $F_n(1) > F_n(0) = 0$, et donc sa limite en $+\infty$ est strictement positive.

Comme $\alpha < 1$ alors d'après le résultat de la partie précédente la série de terme général I_n diverge.