Corrigé du Devoir à la Maison n°13

1. (a) On démontre par récurrence finie que la propriété :

$$\mathscr{P}_k : \quad I_n = \frac{(-\alpha)^k}{n!}\int_0^1 e^{\alpha t} P_n^{(n-k)}(t)\,\mathrm{d}t$$

est vraie pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$.

<u>Initialisation.</u> Comme $L_n = \frac{1}{n!}P_n^{(n)}$ alors par définition : $\quad I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 e^{\alpha t} P_n^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t$.

La propriété $\mathscr{P}_0$ est donc vraie.

<u>Hérédité.</u> Supposons que la propriété $\mathscr{P}_k$ est vraie pour un entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Soit $u(t) = e^{\alpha t}$ et $v(t) = P_n^{(n-k-1)}(t)$. Cette dernière fonction est bien définie car $n-k-1 \geqslant 0$, puisque $k \leqslant n-1$.

Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, de dérivées $u'(t) = \alpha e^{\alpha t}$ et $v'(t) = P_n^{(n-k)}$. Par intégration par parties :

$$I_n = \frac{(-\alpha)^k}{n!}\int_0^1 u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(-\alpha)^k}{n!}\left[\Big[u(t)v(t)\Big]_0^1 - \int_0^1 u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t\right].$$

Ceci donne :

$$I_n = \frac{(-\alpha)^k}{n!}\left[\Big[e^{\alpha t}P_n^{(n-k-1)}(t)\Big]_0^1 - \int_0^1 \alpha e^{\alpha t}P_n^{(n-k-1)}(t)\,\mathrm{d}t\right].$$

Comme $P_n = X^n(1-X)^n$ alors 0 et 1 sont racines de P_n d'ordres de multiplicité n.

Par théorème ceci implique qu'ils sont racines de $P_n^{(j)}$ pour $j = 0, \dots, n-1$.

Comme $0 \leqslant k \leqslant n-1$ alors $0 \leqslant n-1-k \leqslant n-1$ donc 0 et 1 sont racines de $P_n^{(n-k-1)}$, ce qui donne $P_n^{(n-k-1)}(0) = P_n^{(n-k-1)}(1) = 0$, et ainsi :

$$\Big[e^{\alpha t}P_n^{(n-k-1)}(t)\Big]_0^1 = 0.$$

On en déduit :

$$I_n = -\frac{(-\alpha)^k}{n!}\int_0^1 \alpha e^{\alpha t}P_n^{(n-k-1)}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(-\alpha)^{k+1}}{n!}\int_0^1 e^{\alpha t}P_n^{(n-(k+1))}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ceci montre que la propriété $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.

<u>Conclusion.</u> Par récurrence finie la propriété $\mathscr{P}_k$ est vraie pour tout $k = 0, \dots, n$.

(b) La propriété $\mathscr{P}_n$ est en particulier vraie, donc :

$$I_n = \frac{(-\alpha)^n}{n!}\int_0^1 e^{\alpha t}P_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(-\alpha)^n}{n!}\int_0^1 e^{\alpha t}t^n(1-t)^n\,\mathrm{d}t.$$

Posons, pour tout $t \in [0,1]$: $f(t) = e^{\alpha t}t^n(1-t)^n$. Ainsi $I_n = \frac{(-\alpha)^n}{n!}\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Supposons que $I_n = 0$.

Comme α est non-nul alors $\frac{(-\alpha)^n}{n!} \neq 0$ donc $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

La fonction f est continue par produit, positive sur le segment $[0,1]$. Comme son intégrale sur ce segment est nulle alors par théorème de positivité elle est nulle sur tout le segment $[0,1]$.

Or $f(\frac{1}{2}) = e^{\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{4^n}$, cette valeur n'est pas nulle donc f n'est pas nulle.

Cette contradiction montre que I_n est non-nulle.

(c) Par équivalence, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$t(1-t) \leqslant \frac{1}{4} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 4t^2 - 4t + 1 \geqslant 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (2t-1)^2 \geqslant 0.$$

Cette dernière égalité étant vraie pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'inégalité $t(1-t) \leqslant \frac{1}{4}$ est vraie pour tout $t \in \mathbb{R}$ donc pour tout $t \in [0,1]$.

De plus $t(1-t)$ est positif sur $[0,1]$, donc :

$$\forall t \in [0,1] \qquad 0 \leqslant t^n(1-t)^n \leqslant \frac{1}{4^n}.$$

Comme α est positif alors :

$$\forall t \in [0,1] \qquad \alpha t \leqslant \alpha \qquad \text{puis} \qquad 0 \leqslant e^{\alpha t} \leqslant e^{\alpha}.$$

Par produit :

$$\forall t \in [0,1] \qquad 0 \leqslant e^{\alpha t}t^n(1-t)^n \leqslant \frac{e^{\alpha}}{4^n}.$$

Par croissance de l'intégrale :

$$0 \leqslant \int_0^1 e^{\alpha t}t^n(1-t)^n\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{e^{\alpha}}{4^n}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{\alpha}}{4^n}.$$

Comme α est positif alors :

$$|I_n| = \frac{\alpha^n}{n!}\int_0^1 e^{\alpha t}t^n(1-t)^n\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit :

$$|I_n| \leqslant \frac{\alpha^n}{n!} \times \frac{e^{\alpha}}{4^n} = \frac{e^{\alpha}}{n!}\left(\frac{\alpha}{4}\right)^n.$$

Il s'agit bien de l'inégalité souhaitée.

2. La formule du binôme donne :

$$(1-X)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-X)^k.$$

Comme $P_n = X^n(1-X)^n$ alors :

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k X^{n+k}.$$

La dérivée n-ème du polynôme X^{n+k} est $\frac{(n+k)!}{k!}X^k$, donc par linéarité de la dérivation :

$$P_n^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{(n+k)!}{k!} X^k.$$

Comme $L_n = \frac{1}{n!}P_n^{(n)}$ alors :

$$L_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(n+k)!}{k!n!} X^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n+k}{n} X^k.$$

Ceci est bien la formule demandée.

3. (a) Par définition : $J_k = \displaystyle\int_0^1 e^{\alpha t} t^k \,\mathrm{d}t$.

Soit $u(t) = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}$ et $v(t) = t^k$.

Ces deux fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$, de dérivées $u'(t) = e^{\alpha t}$ et $v'(t) = kt^{k-1}$.

Par intégration par parties :

$$J_k = \left[\frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} t^k\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{k}{\alpha} e^{\alpha t} t^{k-1} \,\mathrm{d}t.$$

Ceci donne :

$$J_k = \frac{e^\alpha}{\alpha} - \frac{k}{\alpha}\int_0^1 e^{\alpha t} t^{k-1} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}(e^\alpha - kJ_{k-1}).$$

Il s'agit du résultat attendu.

(b) Soit $\mathscr{P}_k$ la propriété : il existe deux entiers a_k et b_k tels que $J_k = \frac{1}{\alpha^{k+1}}(a_k + b_k e^\alpha)$.

On démontre par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

<u>Initialisation.</u> On calcule :

$$J_0 = \int_0^1 e^{\alpha t} \,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{\alpha t}}{\alpha}\right]_0^1 = \frac{1}{\alpha}(-1 + e^\alpha).$$

La propriété $\mathscr{P}_0$ est donc vraie avec $a_0 = -1$ et $b_0 = 1$, qui sont bien des entiers.

<u>Hérédité.</u> Supposons que la propriété $\mathscr{P}_{k-1}$ est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$.

Il existe donc deux entiers a_{k-1} et b_{k-1} tels que :

$$J_{k-1} = \frac{1}{\alpha^k}(a_{k-1} + b_{k-1}e^\alpha).$$

D'après la question précédente, comme $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} J_k &= \frac{1}{\alpha}(e^\alpha - kJ_{k-1}) = \frac{1}{\alpha}\left(e^\alpha - \frac{ka_{k-1}}{\alpha^k} - \frac{kb_{k-1}}{\alpha^k}e^\alpha\right) \\ &= \frac{1}{\alpha^{k+1}}\Big(-ka_{k-1} + \big(\alpha^k - kb_{k-1}\big)e^\alpha\Big) \\ &= \frac{1}{\alpha^{k+1}}(a_k + b_k e^\alpha) \qquad \text{avec} \quad a_k = -ka_{k-1} \quad \text{et} \quad b_k = \alpha^k - kb_{k-1}. \end{aligned}$$

Comme α, k, a_{k-1} et b_{k-1} sont entiers alors a_k et b_k sont entiers.
La propriété $\mathscr{P}_k$ est donc vraie, et l'hérédité est démontrée.
<u>Conclusion.</u> Par récurrence la propriété $\mathscr{P}_k$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(c) Par définition : $I_n = \displaystyle\int_0^1 e^{\alpha t} L_n(t)\,\mathrm{d}t$.

La formule de la question (2) et la linéarité de l'intégrale montrent que :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 e^{\alpha t}\left[\sum_{k=0}^n (-1)^k \tbinom{n}{k}\tbinom{n+k}{k} t^k\right]\mathrm{d}t = \int_0^1 \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k \tbinom{n}{k}\tbinom{n+k}{k} e^{\alpha t} t^k\right]\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^n \left[\int_0^1 (-1)^k \tbinom{n}{k}\tbinom{n+k}{k} e^{\alpha t} t^k\,\mathrm{d}t\right] = \sum_{k=0}^n \left[(-1)^k \tbinom{n}{k}\tbinom{n+k}{k} \int_0^1 e^{\alpha t} t^k\,\mathrm{d}t\right] \end{aligned}$$

On reconnaît les intégrales J_k, et donc en utilisant la question précédente :

$$I_n = \sum_{k=0}^n \left[(-1)^k \tbinom{n}{k}\tbinom{n+k}{k} J_k\right] = \sum_{k=0}^n \left[(-1)^k \tbinom{n}{k}\tbinom{n+k}{k} \tfrac{1}{\alpha^{k+1}}(a_k + b_k e^\alpha)\right]$$

On écrit $\frac{1}{\alpha^{k+1}} = \frac{\alpha^{n-k}}{\alpha^{n+1}}$, et on utilise la linéarité de la somme :

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{\alpha^{n+1}} \sum_{k=0}^n \left[(-1)^k \tbinom{n}{k}\tbinom{n+k}{k} \alpha^{n-k}(a_k + b_k e^\alpha)\right] \\ &= \frac{1}{\alpha^{n+1}}\left[\sum_{k=0}^n \Big((-1)^k \tbinom{n}{k}\tbinom{n+k}{k} \alpha^{n-k} a_k\Big) + e^\alpha \sum_{k=0}^n \Big((-1)^k \tbinom{n}{k}\tbinom{n+k}{k} \alpha^{n-k} b_k\Big)\right] \end{aligned}$$

Ceci donne bien :

$$I_n = \frac{1}{\alpha^{n+1}}(c_n + d_n e^\alpha) \qquad \text{avec} \quad c_n = \sum_{k=0}^n \Big((-1)^k \tbinom{n}{k}\tbinom{n+k}{k} \alpha^{n-k} a_k\Big)$$
$$\text{et} \quad d_n = \sum_{k=0}^n \Big((-1)^k \tbinom{n}{k}\tbinom{n+k}{k} \alpha^{n-k} b_k\Big)$$

Les coefficients c_n et d_n sont des entiers car les coefficients du binôme, α, les a_k et les b_k sont des entiers, et si k va de 0 à n alors $n-k$ est positif, donc α^{n-k} est entier.

(d) On suppose $e^\alpha = \frac{p}{q}$ avec $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

L'expression de la question précédente donne :

$$I_n = \frac{1}{\alpha^{n+1}}\left(c_n + d_n\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q\alpha^{n+1}}(qc_n + pd_n).$$

Comme q et α sont positifs alors :

$$|I_n| = \frac{1}{q\alpha^{n+1}}|qc_n + pd_n|.$$

Comme q, p, c_n et d_n sont entiers alors $qc_n + pd_n$ est entier.

Comme I_n est non-nul d'après la question (1b) alors $qc_n + qd_n$ est non-nul, et donc $|qc_n + pd_n| \geqslant 1$. Ceci donne, comme demandé :

$$|I_n| \geqslant \frac{1}{q\alpha^{n+1}}.$$

(e) D'après la question précédente et l'inégalité de la question (1c) :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{1}{q\alpha^{n+1}} \leqslant |I_n| \leqslant \frac{e^\alpha}{n!}\left(\frac{\alpha}{4}\right)^n.$$

Ceci implique :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 1 \leqslant q\alpha e^\alpha \frac{\left(\frac{\alpha^2}{4}\right)^n}{n!}.$$

Par croissances comparées $\left(\frac{\alpha^2}{4}\right)^n \underset{(+\infty)}{=} o(n!)$, donc :

$$q\alpha e^\alpha \frac{\left(\frac{\alpha^2}{4}\right)^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par théorème de comparaison on en déduit $1 \leqslant 0$, ce qui est absurde.

Cette contradiction montre que e^α n'est pas rationnel.

4. (a) Supposons que α est rationnel non-nul, *i.e.*, $\alpha = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

On raisonne par l'absurde en supposant que e^α est rationnel.

Comme $\mathbb{Q}$ est stable par produit alors $(e^\alpha)^q$ est rationnel, donc e^p est rationnel.

Si p est positif alors $p \in \mathbb{N}^*$, mais nous avons démontré dans la question précédente que e^p ne peut être rationnel dans ce cas.

Si p est négatif alors $-p \in \mathbb{N}^*$ et $e^{-p} = \frac{1}{e^p}$. Comme $\mathbb{Q}$ est stable par passage à l'inverse alors e^{-p} est rationnel aussi, ce qui est impossible d'après la question précédente.

On aboutit dans tous les cas à une contradiction, donc e^α est irrationnel.

Nous venons de démontrer que si α est rationnel alors e^α est irrationnel.

Ainsi, si α est un réel non-nul alors α et e^α ne peuvent être tous les deux rationnels car si le premier est rationnel alors le second ne l'est pas.

(b) Nous venons de démontrer :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^* \qquad \alpha \in \mathbb{Q} \quad \Longrightarrow \quad e^\alpha \notin \mathbb{Q}. \tag{1}$$

Par contraposée :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^* \qquad e^\alpha \in \mathbb{Q} \quad \Longrightarrow \quad \alpha \notin \mathbb{Q}. \tag{2}$$

Soit α un rationnel strictement positif.

Posons $\beta = \ln \alpha$, qui est bien défini car α est strictement positif.

Alors $e^\beta = \alpha$ donc e^β est rationnel, puis β est irrationnel d'après (2).

Nous avons donc démontré que si α est rationnel alors $\ln \alpha$ est irrationnel.