Concours blanc
Épreuve de mathématiques

Durée : 4 heures – Calculatrices non autorisées

- *On rappelle qu'une grande attention est portée à la présentation, l'orthographe, la qualité de la rédaction.*
- *En général les symboles mathématiques ne doivent pas figurer dans une phrase.*
- *Les objets introduits doivent être présentés correctement.*
- *Les références au cours doivent être citées, de même que les questions précédentes si elles sont utilisées.*
- *Il est inutile de recopier l'énoncé.*
- *Les copies doivent être numérotées, leur nombre total indiqué.*
- *Les annotations au crayon ne sont pas prises en compte.*
- *Le barème et indicatif.*
- *Si un élève est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Problème 1. *(30 points)*

Partie A. Le problème de Bâle *(14 points)*

Le problème de Bâle a été énoncé en 1644 par Pietro Mengoli, puis étudié par Jacques Bernoulli à Bâle, et résolu par Leonhard Euler – aussi natif de Bâle – en 1735.
Il s'agit de calculer la somme des $\frac{1}{k^2}$ où k parcourt $\mathbb{N}^*$, que l'on définit par :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n} t \,\mathrm{d}t.$$

1. (a) Calculer I_0 et I_1.
   (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad I_n > 0$.
   (c) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

2. (a) Étudier la convexité de la fonction sinus sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
   (b) En déduire que pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: $\quad t \leqslant \frac{\pi}{2} \sin t$.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad 0 \leqslant J_n \leqslant \frac{\pi^2}{4}(I_{2n} - I_{2n+2})$.
   (d) Démontrer que : $\quad \frac{J_n}{I_{2n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
3. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad I_{2n+2} = (2n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \cos^{2n+1} t \,\mathrm{d}t$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{I_{2n+2}}{n+1} = (2n+1)J_n - (2n+2)J_{n+1} \qquad \text{puis} \qquad 2\left(\frac{J_n}{I_{2n}} - \frac{J_{n+1}}{I_{2n+2}}\right) = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.
   Démontrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Partie B. Le dilogarithme *(16 points)*

Soit f la fonction définie sur $[0,1[$ par : $\forall t \in [0,1[\quad f(t) = \begin{cases} -\dfrac{\ln(1-t)}{t} & \text{si } t > 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Justifier que f est continue.

On appelle *dilogarithme* la fonction Li_2 définie pour tout $x \in [0,1[$ par :

$$\mathrm{Li}_2(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. (a) Justifier que la fonction Li_2 est dérivable, étudier ses variations.
   (b) Démontrer que pour tout $t \in [0,1[$: $\quad f(t) \leqslant 1 - \ln(1-t)$.
   (c) En déduire que pour tout $x \in [0,1[$: $\quad \mathrm{Li}_2(x) \leqslant 2x + (1-x)\ln(1-x)$.
   (d) Démontrer que la fonction Li_2 admet une limite finie en 1.
3. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,1[$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k} = -\ln(1-t) - \int_0^t \frac{u^n}{1-u}\,\mathrm{d}u.$$

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,1[$:

$$0 \leqslant -\ln(1-t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k} \leqslant \frac{t^{n+1}}{1-t}.$$

   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1[$:

$$0 \leqslant \mathrm{Li}_2(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k^2} \leqslant \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

   (d) En déduire que :

$$\forall x \in [0,1[\qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Li}_2(x) \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \lim_{x\to 1} \mathrm{Li}_2(x).$$

   (e) Démontrer que la fonction Li_2 est majorée par $\dfrac{\pi^2}{6}$ sur $[0,1[$.
   (f) Déterminer $\lim\limits_{x\to 1} \mathrm{Li}_2(x)$.
4. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x)\ln(1-x)$.
   (b) Démontrer que pour tout $x \in]0,1[$:

$$\mathrm{Li}_2(x) + \mathrm{Li}_2(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(x)\ln(1-x).$$

   (c) En déduire la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k k^2}$.

Problème 2. Endomorphismes de trace nulle *(29 points)*

Soit $\mathbb{K}$ un corps, E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie n non-nulle.

On note H_n l'ensemble des endomorphismes de E de trace nulle, $\mathcal{H}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille (n, n) de trace nulle :

$$H_n = \{\, f \in \mathcal{L}(E) \mid \operatorname{tr} f = 0\}$$
$$\mathcal{H}_n(\mathbb{K}) = \{\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \operatorname{tr} M = 0\}\,.$$

On note $\mathcal{G}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille (n, n) à diagonale nulle :

$$\mathcal{G}_n(\mathbb{K}) = \{\, M = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \forall i = 1, \ldots, n \quad a_{i,i} = 0\}\,.$$

On rappelle que $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et que I_n est la matrice identité de taille (n, n).

Partie A. Généralités *(8 points)*

Les résultats de cette partie seront utilisés dans les deux parties suivantes.

1. Justifier que $\mathcal{H}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et déterminer sa dimension. Démontrer que $\operatorname{Vect}(I_n)$ en est un supplémentaire dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Démontrer que $\mathcal{G}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, en donner une base et la dimension.
3. Démontrer que : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{G}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$.
4. Déterminer la dimension de $\mathcal{H}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$.
5. Justifier que H_n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et donner sa dimension.
6. Soit f un endomorphisme de E.
   (a) On suppose que pour tout $u \in E$ la famille $(u, f(u))$ est liée.
   Démontrer que f est une homothétie, *i.e.,* il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda \mathrm{Id}_E$.
   Indication. Fixer un vecteur u non-nul de E, justifier qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(u) = \lambda u$, puis démontrer que pour tout $v \in E$ on a $f(v) = \lambda v$.
   (b) Démontrer que si $f \in H_n$ et f est non-nul alors il existe $u \in E$ tel que la famille $(u, f(u))$ est libre.

Partie B. Première caractérisation *(12 points)*

1. Décrire l'ensemble H_1.
2. Dans cette question on suppose que $n = 2$. Soit f un élément non-nul de H_2.
   (a) Justifier qu'il existe un vecteur u de E tel que $(u, f(u))$ est une base de E.
   (b) Démontrer que la matrice de f dans cette base appartient à $\mathcal{G}_2(\mathbb{K})$.
3. On suppose dans cette question que $n \geqslant 2$. Soit f un élément non-nul de H_n.
   (a) Justifier qu'il existe $(n-1)$ vecteurs $u, e_3, \dots, e_n$ de E tels que la famille
   $$\mathcal{B} = (u, f(u), e_3, \dots, e_n)$$
   est une base de E.
   (b) Justifier que la matrice de f dans cette base est de la forme :
   $$M_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & a_{1,2} & \cdots\cdots & a_{1,n} \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$
   où $a_{1,2}, \dots, a_{1,n}$ sont des scalaires et A' est une matrice de $\mathcal{H}_{n-1}(\mathbb{K})$.
   Soit $F = \text{Vect}\,(f(u), e_3, \dots, e_n)$ et $G = \text{Vect}\,(u)$.
   (c) Justifier que F et G sont supplémentaires dans E.
   On note p le projecteur de E sur F parallèlement à G.
   (d) Donner la matrice de $p \circ f$ dans la base $\mathcal{B}$ en fonction de la matrice A'.
   (e) Justifier que F est stable par $p \circ f$.
   Ceci montre que l'application $g : \begin{array}{rcl} F & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & p \circ f(u) \end{array}$ est bien définie.
   (f) Démontrer qu'il existe une base de F dans laquelle la matrice de g est A' et déterminer la trace de g.
4. (a) Démontrer par récurrence sur n que pour tout $f \in H_n$ il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est à diagonale nulle.
   (b) Justifier que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de $\mathcal{G}_n(\mathbb{K})$.

Partie C. Seconde caractérisation *(9 points)*

Soit D une matrice diagonale de taille (n, n) à coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ distincts. On définit :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M &\longmapsto DM - MD. \end{aligned}$$

1. (a) Démontrer que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   (b) Soit $M = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Déterminer les coefficients de $\Phi(M)$ en fonction des $a_{i,j}$ et des λ_i.
2. En déduire le noyau de Φ et démontrer que $\operatorname{im}\Phi = \mathcal{G}_n(\mathbb{K})$.
3. Soit Φ_1 la restriction de Φ à $\mathcal{H}_n(\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned} \Phi_1 : \mathcal{H}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M &\longmapsto \Phi(M). \end{aligned}$$

   (a) Déterminer la dimension de $\ker \Phi_1$.
   (b) En déduire que $\Phi(\mathcal{H}_n(\mathbb{K})) = \mathcal{G}_n(\mathbb{K})$.
4. (a) En utilisant le résultat final de la partie précédente démontrer que pour tout matrice A de trace nulle il existe deux matrices B et C telles que $A = BC - CB$.
   (b) Vérifier que toute matrice de trace nulle s'écrit comme précédemment, où l'une des deux matrices carrées B et C est également de trace nulle.
5. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :
   (i) $f \in H_n$
   (ii) Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $M_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{G}_n(\mathbb{K})$.
   (iii) Il existe deux endomorphismes g et h de E tels que $f = g \circ h - h \circ g$.