Concours blanc
Épreuve de mathématiques

Durée : 4 heures – Calculatrices non autorisées.

- *On rappelle qu'une grande attention est portée à la présentation, l'orthographe, la qualité de la rédaction.*
- *En général les symboles mathématiques ne doivent pas figurer dans une phrase.*
- *Les objets introduits doivent être présentés correctement.*
- *Les références au cours doivent être citées, de même que les questions précédentes si elles sont utilisées.*
- *Il est inutile de recopier l'énoncé.*
- *Les copies doivent être numérotées, leur nombre total indiqué.*
- *Les annotations au crayon ne sont pas prises en compte.*
- *Si un élève est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

On rappelle la notation, pour tout entier naturel n : $[\![1,n]\!] = \{1,2,\dots,n\}$.

Problème 1. Théorème de Darboux

Partie A. Un exemple

On définit la fonction
$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

1. Démontrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner sa dérivée.
2. Démontrer que f' n'est pas continue.

Dans la suite de ce problème on démontre le théorème suivant :

Théorème de Darboux

Soit $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
Alors la fonction f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires, c'est-à-dire que pour tout λ compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$ il existe $c \in [a, b]$ tel que $f'(c) = \lambda$.

Il montre donc que, même si la dérivée d'une fonction n'est pas continue, elle vérifie quand même le théorème des valeurs intermédiaires.

Dans tout ce qui suit a et b sont deux réels tels que $a < b$.

Partie B. Première démonstration

Soit f une fonction vérifiant les hypothèses du théorème.
On suppose que $f'(a) < f'(b)$, et on fixe un élément λ de l'intervalle $]f'(a), f'(b)[$
On définit la fonction $g : \begin{array}{rcl} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - \lambda x. \end{array}$

1. Démontrer qu'il existe $x_1 \in]a, b]$ tel que $g(x_1) < g(a)$.
   On pourra raisonner par l'absurde et considérer $\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$.
2. Démontrer qu'il existe $x_2 \in [a, b[$ tel que $g(x_2) < g(b)$.
3. Justifier que g admet un minimum sur $[a, b]$, et que ce minimum est atteint en un point intérieur de $[a, b]$.
4. En déduire qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \lambda$.
5. Le théorème est donc démontré dans le cas où $f'(a) < f'(b)$.
   On le démontre de la même façon si $f'(a) > f'(b)$.
   Qu'en est-il si $f'(a) = f'(b)$?

Partie C. Seconde démonstration

Soit f une fonction vérifiant les hypothèses du théorème. On définit :

$$\varphi : \begin{array}{rcl}]a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array} \qquad \text{et} \qquad \psi : \begin{array}{rcl} [a,b[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{f(x)-f(b)}{x-b} \end{array}$$

1. Démontrer que φ et ψ sont prolongeables par continuité à $[a, b]$.
   On notera dans la suite φ et ψ les prolongements par continuité obtenus.
2. Soit I et J deux intervalles tels que $I \cap J$ est non-vide. Démontrer que $I \cup J$ est un intervalle.
3. Démontrer que $\varphi([a, b])$ et $\psi([a, b])$ sont deux intervalles d'intersection non-vide.
4. En déduire successivement que pour tout λ compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$:
   (a) il existe $d \in [a, b]$ tel que $\varphi(d) = \lambda$ ou $\psi(d) = \lambda$,
   (b) il existe $c \in [a, b]$ tel que $f'(c) = \lambda$.
   Ceci démontre le théorème.

Problème 2. Construction de projecteurs

Partie A. Un exemple

On note $E = \mathbb{R}^4$ et on définit $F = \text{Vect}\,(u_1, u_2)$ avec :

$$u_1 = (0, 1, -1, 2) \qquad \text{et} \qquad u_2 = (-1, 0, 2, 1).$$

Soit $\quad G = \{\,(x, y, z, t) \in E \mid x + 2y + z - t = 2x + y + z + t = 0\}$.

On ne demande pas de justifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

1. Donner une base et la dimension de F et de G.
2. Démontrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Dans la suite de cette partie on déterminera l'expression du projecteur de E sur F parallèlement à G.

Partie B. Cas général

Dans cette partie $\mathbb{K}$ désigne l'un des deux corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$, et soit n sa dimension.

Soit F et G deux espaces vectoriels supplémentaires dans E, et m la dimension de F.

D'après le cours il existe m hyperplans $H_1, \ldots, H_m$ tels que $G = H_1 \cap \cdots \cap H_m$.

On note $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ des formes linéaires telles que pour tout $i \in [\![1, m]\!]$: $H_i = \ker \varphi_i$.

Soit $f : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^m \\ u & \longmapsto & (\varphi_1(u), \ldots, \varphi_m(u)). \end{array}$

1. Justifier que f est linéaire.
2. Démontrer que f est surjective.
3. Démontrer que pour tout $i \in [\![1, m]\!]$ il existe $w_i \in E$ tel que :

$$\forall j \in [\![1, m]\!] \qquad \varphi_j(w_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. Démontrer que pour tout $i \in [\![1, m]\!]$ il existe $v_i \in F$ vérifiant les mêmes conditions.
5. Démontrer que la famille $(v_1, \ldots, v_m)$ est une base de F.

Pour tout $u \in E$ on pose : $\quad p(u) = \sum\limits_{i=1}^{m} \varphi_i(u) v_i$.

6. Démontrer que p est linéaire.
7. Démontrer p est le projecteur de E sur F parallèlement à G.

Partie A. Suite de l'exemple.

Pour tout $u = (x, y, z, t)$ on pose $\varphi(u) = x + 2y + z - t$ et $\psi(u) = 2x + y + z + t$.

3. Déterminer un vecteur v de F tel que $\varphi(v) = 0$ et $\psi(v) = 1$, puis un vecteur w de F tel que $\varphi(w) = 1$ et $\psi(w) = 0$.
4. On pose, pour tout $u \in E$: $\quad p(u) = \varphi(u)v + \psi(u)w$.

   Justifier que p est le projecteur de E sur F parallèlement à G.

   Donner l'image du premier vecteur de la base canonique de E par ce projecteur.

Problème 3. La fonction indicatrice d'Euler

Soit n un entier naturel, dont la décomposition en facteurs premiers est $n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{m_k}$ où les p_k sont des nombres premiers distincts et les m_k sont des entiers strictement positifs. On tire au hasard un entier a dans $[\![1, n]\!]$ avec équiprobabilité.

1. Soit $k \in [\![1, r]\!]$. Déterminer la probabilité de l'événement A_k : p_k divise a.
2. (a) Soit j et k deux entiers distincts dans $[\![1, r]\!]$. Démontrer que A_j et A_k sont indépendants.

   (b) Plus généralement, démontrer que $A_1, \ldots, A_r$ sont mutuellement indépendants.
3. Soit B l'événement : a est premier avec n.

   Démontrer que $P(B) = \prod_{k=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$.
4. Soit $\varphi(n)$ le nombre d'éléments de $[\![1, n]\!]$ premiers avec n.

   La fonction $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ est appelée *fonction indicatrice d'Euler*.

   Exprimer $\varphi(n)$ en fonction des p_k et des m_k, sans n.

Problème 4. Irrationnalité de π

Le but de ce problème est de démontrer que π est irrationnel.
On suppose qu'il existe deux entiers p et q tels que $q > 0$ et $\pi = \frac{p}{q}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit la fonction f_n et l'intégrale I_n par :

$$f_n : \begin{array}{rcl} [0, \pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{n!} x^n (p - qx)^n \end{array} \qquad\qquad I_n = \int_0^\pi f_n(x) \sin x \,\mathrm{d}x$$

1. (a) Déterminer les extrema de la fonction $g : x \mapsto px - qx^2$ sur l'intervalle $[0, \pi]$.

   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un encadrement de I_n.

   Justifier que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

   (c) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale I_n n'est pas nulle.
2. Soit n et k deux entiers naturels.

   Le but de cette question est de démontrer que $f_n^{(k)}(0)$ et $f_n^{(k)}(\pi)$ sont entiers.

   (a) Démontrer que si $k < n$ ou $k > 2n$ alors $f_n^{(k)}(0) = 0$.

   (b) Démontrer que si $n \leqslant k \leqslant 2n$ alors $f_n^{(k)}(0)$ est entier.

   On pourra développer l'expression de f_n ou utiliser la formule de Leibniz.

   (c) Pour $x \in [0, \pi]$, exprimer $f_n(\pi - x)$ en fonction de $f_n(x)$.

   En déduire que $f_n^{(k)}(\pi)$ est entier.
3. On fixe un entier n. Pour tout $x \in [0, \pi]$ on pose :

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f_n^{(2k)}(x)$$

   (a) Démontrer que $\varphi + \varphi'' = f_n$.

   (b) En utilisant l'intégrale $\int_0^\pi \varphi(x) \sin x \,\mathrm{d}x$ démontrer que $I_n = \varphi(0) + \varphi(\pi)$.

   (c) Justifier que I_n est entier.
4. Démontrer que π est irrationnel.