

## Concours blanc

# Corrigé de l'épreuve de mathématiques

### Problème 1. Théorème de Darboux

(18 points)

#### Partie A. Un exemple

(4 points)

1. (2 points) Les fonctions  $x \mapsto x$ ,  $x \mapsto \frac{1}{x}$  et  $\cos$  sont définies et dérivables donc par composition et produit la fonction  $f : x \mapsto x \cos \frac{1}{x}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ . On calcule :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}$$

Pour la dérivabilité en 0 on détermine la limite de son taux d'accroissement :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \cos \frac{1}{x}$$

La fonction  $\cos$  est bornée par  $-1$  et  $1$  donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| \leq |x|$$

Par théorème d'encadrement ceci montre que :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

La fonction  $f$  est donc dérivable en 0, de dérivée  $f'(0) = 0$ .

Finalement on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \begin{cases} 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. (2 points) La fonction  $f'$  est continue en 0 si et seulement si  $f'(x)$  tend vers  $f'(0)$  lorsque  $x$  tend vers 0, donc si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} \right) = 0$$

On sait que  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$ , donc  $f'$  est continue en 0 si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \sin \frac{1}{x} \right) = 0$$

Par composition de limites ceci implique  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \sin y = 0$ , ce qui est faux car la fonction sinus n'admet pas de limite en  $+\infty$ .

On en déduit que  $f'$  n'est pas continue en 0, donc  $f'$  n'est pas continue.

**Partie B. Première démonstration**

(7 points)

1. (2 points) On raisonne par l'absurde. Supposons que :

$$\forall x \in ]a, b] \quad g(x) \geq g(a)$$

Si  $x \in ]a, b]$  alors  $x - a > 0$  donc :

$$\forall x \in ]a, b] \quad \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \geq 0 \quad (1)$$

La fonction  $g$  est dérivable par somme, car la fonction  $f$  est dérivable par énoncé, et la fonction  $x \mapsto \lambda x$  est dérivable. Par définition de la dérivée :

$$g'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

Par théorème de comparaison l'inégalité (1) donne :

$$g'(a) \geq 0$$

Comme  $g(x) = f(x) - \lambda x$  alors pour tout  $x \in [a, b]$  :  $g'(x) = f'(x) - \lambda$

On obtient donc  $f'(a) - \lambda \geq 0$ , soit  $f'(a) \geq \lambda$ . Ceci est une contradiction car on a supposé que  $\lambda \in ]f'(a), f'(b)[$ .

Cette contradiction montre qu'il existe  $x \in ]a, b]$  tel que  $g(x) < g(a)$ .

2. (1 point) On procède de même, en supposant :

$$\forall x \in [a, b[ \quad g(x) \geq g(b)$$

Si  $x \in [a, b[$  alors  $x - b < 0$  donc :

$$\forall x \in [a, b[ \quad \frac{g(x) - g(b)}{x - b} \leq 0$$

Comme  $g$  est dérivable en  $b$  alors par théorème de comparaison :

$$g'(b) \leq 0$$

Ceci donne  $f'(b) \leq \lambda$ , alors qu'on a supposé que  $\lambda \in ]f'(a), f'(b)[$ .

Cette contradiction montre qu'il existe  $x \in [a, b[$  tel que  $g(x) < g(b)$ .

3. (2 points) Les fonctions  $f$  et  $x \mapsto \lambda x$  sont continues donc  $g$  est continue.

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. Or  $[a, b]$  est un segment, donc  $g$  est bornée sur  $[a, b]$  et atteint ses bornes.

Elle atteint en particulier sa borne inférieure, ce qui signifie qu'elle admet un minimum : il existe  $c \in [a, b]$  tel que :

$$\forall x \in [a, b] \quad g(c) \leq g(x)$$

D'après les deux questions précédentes on sait qu'il existe  $x_1$  et  $x_2$  dans  $[a, b]$  tels que  $g(x_1) < g(a)$  et  $g(x_2) < g(b)$ . On a alors  $g(c) \leq g(x_1)$  et  $g(c) \leq g(x_2)$ , ce qui montre que  $g(c) < g(a)$  et  $g(c) < g(b)$ .

En conséquence  $c$  est différent de  $a$  et de  $b$ , donc il appartient à  $]a, b[$ , *i.e.*,  $c$  est un point intérieur à l'intervalle  $[a, b]$ .

4. (1 point) La fonction  $g$  est dérivable sur l'intervalle  $[a, b]$  et admet un minimum en un point  $c$  intérieur à  $]a, b[$ . Par théorème ceci implique que  $g'(c) = 0$ .

Comme  $g'(x) = f'(x) - \lambda$  pour tout  $x \in [a, b]$  alors  $f'(c) = \lambda$ .

On a bien démontré qu'il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $f'(c) = \lambda$ .

5. (1 point) Si  $f'(a) > f'(b)$  alors on peut remplacer  $f$  par  $-f$  et appliquer le résultat que l'on vient de démontrer.

Si  $f'(a) = f'(b)$  alors  $f'(a)$  est le seul réel compris entre  $f'(a)$  et  $f'(b)$ . Il existe bien  $c \in [a, b]$  tel que  $f'(c) = f'(a)$ , par exemple  $c = a$  ou  $c = b$ .

### Partie C. Seconde démonstration

(7 points)

1. (1 point) Comme  $f$  est dérivable en  $a$  et en  $b$  alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = f'(b)$$

Ceci donne  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = f'(a)$  et  $\lim_{x \rightarrow b} \psi(x) = f'(b)$ . Ces limites sont finies donc  $\varphi$  est prolongeable par continuité en  $a$  et  $\psi$  est prolongeable par continuité en  $b$ .

Comme la fonction  $f$  est continue alors par quotient  $\varphi$  et  $\psi$  sont continues respectivement sur  $]a, b[$  et  $[a, b[$ , donc leurs prolongements par continuité à  $[a, b]$  sont continus sur  $[a, b]$ .

2. (1 point) On rappelle qu'une partie  $I$  de  $\mathbb{R}$  est un intervalle si :

$$\forall (x, y) \in I^2 \quad \forall z \in \mathbb{R} \quad x \leq z \leq y \implies z \in I$$

C'est-à-dire que si deux points sont dans l'intervalle alors tous les points entre ces deux points sont aussi dans l'intervalle.

Soit  $x$  et  $y$  deux points de  $I \cup J$ . Quitte à les inverser on suppose que  $x \leq y$ .

Soit  $z$  un réel tel que  $x \leq z \leq y$ . Montrons que  $z$  appartient à  $I \cup J$ .

Comme  $x$  et  $y$  sont dans  $I \cup J$  alors ils appartiennent à  $I$  ou à  $J$ .

Si  $x$  et  $y$  sont tous les deux dans  $I$  ou tous les deux dans  $J$  alors, puisque  $x \leq z \leq y$ ,  $z$  est dans  $I$  ou dans  $J$ , donc dans  $I \cup J$ .

Supposons que  $x \in I$  et  $y \in J$ .

Comme  $I \cap J$  est non-vidé alors il contient au moins un réel  $t$ .

Si  $z \leq t$  alors  $x \leq z \leq t$  avec  $(x, t) \in I^2$ , donc  $z \in I$  car  $I$  est un intervalle.

Si  $t \leq z$  alors  $t \leq z \leq y$  avec  $(t, y) \in J^2$ , donc  $z \in J$  car  $J$  est un intervalle.

Donc finalement  $z \in I$  ou  $z \in J$  donc  $z \in I \cup J$ .

Le cas où  $x \in J$  et  $y \in I$  est similaire : on obtient  $z \in I \cup J$ .

On a donc démontré que si  $I$  et  $J$  deux intervalles d'intersection non-vidé alors  $I \cup J$  est un intervalle.

3. (2 points) Les applications  $\varphi$  et  $\psi$  sont continues sur l'intervalle  $[a, b]$ . L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle, donc  $\varphi([a, b])$  et  $\psi([a, b])$  sont des intervalles.

De plus  $\varphi(b) \in \varphi([a, b])$  et  $\psi(a) \in \psi([a, b])$ . Or :

$$\varphi(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \psi(a)$$

Il existe au moins un réel dans  $\varphi([a, b])$  et  $\psi([a, b])$ , donc leur intersection n'est pas vide.

4. Soit  $\lambda$  un réel compris entre  $f'(a)$  et  $f'(b)$ .

(a) (1 point) D'après les deux questions précédentes, comme  $\varphi([a, b])$  et  $\psi([a, b])$  sont des intervalles d'intersection non-vide alors leur union est un intervalle.

Or  $\varphi(a) \in \varphi([a, b])$  et  $\psi(b) \in \psi([a, b])$ , et on sait que  $\varphi(a) = f'(a)$  et  $\psi(b) = f'(b)$ , donc  $f'(a)$  et  $f'(b)$  sont dans l'intervalle  $\varphi([a, b]) \cup \psi([a, b])$ .

Comme  $\lambda$  est entre  $f'(a)$  et  $f'(b)$  alors par définition d'un intervalle  $\lambda$  appartient à l'union  $\varphi([a, b]) \cup \psi([a, b])$  :

$$\lambda \in \varphi([a, b]) \quad \text{ou} \quad \lambda \in \psi([a, b])$$

Il existe donc  $d \in [a, b]$  tel que  $\varphi(d) = \lambda$  ou il existe  $d \in [a, b]$  tel que  $d = \psi(b)$ .

(b) (2 points) On applique le théorème des accroissements finis à la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[a, d]$  ou sur l'intervalle  $[d, b]$ .

Supposons qu'il existe  $d \in [a, b]$  tel que  $\varphi(d) = \lambda$ , i.e.,  $\lambda = \frac{f(d)-f(a)}{d-a}$ .

Comme la fonction  $f$  est dérivable sur  $[a, b]$  alors :

- La fonction  $f$  est continue sur  $[a, d]$ .
- La fonction  $f$  est dérivable sur  $]a, d[$ .

D'après le théorème des accroissements finis il existe  $c \in ]a, d[$  tel que  $f'(c) = \frac{f(d)-f(a)}{d-a}$ .

Il existe donc  $c \in [a, b]$  tel que  $f'(c) = \lambda$ .

Si il existe  $d \in [a, b]$  tel que  $\psi(d) = \lambda$ , alors  $\lambda = \frac{f(b)-f(d)}{b-d}$ . On applique de même le théorème des accroissements finis à  $f$  sur l'intervalle  $[d, b]$ , il montre qu'il existe  $c \in ]d, b[$  tel que  $f'(c) = \lambda$ .

Finalement dans les deux cas il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $f'(c) = \lambda$ , le théorème de Darboux est démontré.

**Problème 2. Construction de projecteurs**

(19 points)

**Partie A. Un exemple**

(4 points)

1. (2 points) Comme  $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$  alors la famille  $(u_1, u_2)$  est génératrice de  $F$ .

Cette famille est libre car les vecteurs  $u_1$  et  $u_2$  ne sont pas colinéaires, donc c'est une base de  $F$ . Cette base contient deux vecteurs donc  $F$  est de dimension 2.

Pour déterminer la dimension de  $G$  on en cherche une famille génératrice, en simplifiant ses équations, ceci par opérations élémentaires :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 2y + z - t = 0 \\ 2x + y + z + t = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x + 2y + z - t = 0 \\ -3y - z + 3t = 0 \end{cases} && (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ &\iff \begin{cases} x + 2y + z - t = 0 \\ y + \frac{1}{3}z - t = 0 \end{cases} && (L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2) \\ &\iff \begin{cases} x + \frac{1}{3}z + t = 0 \\ y + \frac{1}{3}z - t = 0 \end{cases} && (L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2) \end{aligned}$$

Ceci donne :

$$\begin{aligned} G &= \{(x, y, z, t) \in E \mid x = -\frac{1}{3}z - t \text{ et } y = -\frac{1}{3}z + t\} \\ &= \{(-\frac{1}{3}z - t, -\frac{1}{3}z + t, z, t) \mid (z, t) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{Vect}(v_1, v_2) \quad \text{avec} \quad v_1 = (1, 1, -3, 0) \quad \text{et} \quad v_2 = (-1, 1, 0, 1) \end{aligned}$$

La famille  $(v_1, v_2)$  est génératrice de  $G$ , elle est libre car  $v_1$  et  $v_2$  ne sont pas colinéaires, donc c'est une base de  $G$ . En conséquence  $G$  est de dimension 2.

2. (2 points) On détermine l'intersection  $F \cap G$ .

Les vecteurs de  $F$  sont les vecteurs  $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$  où  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$  :

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = (-\lambda_2, \lambda_1, -\lambda_1 + 2\lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_2)$$

Un tel vecteur appartient à  $G$  si et seulement s'il vérifie ses équations. En notant  $u = (x, y, z, t)$  on obtient :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 2y + z - t = 0 \\ 2x + y + z + t = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} -\lambda_2 + 2\lambda_1 - \lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_2 + \lambda_1 - \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -\lambda_1 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \end{aligned}$$

Ceci démontre que  $F \cap G = \{0_E\}$ .

De plus on sait que  $\dim F = \dim G = 2$  et  $\dim E = 4$ . Par théorème :

$$\text{Comme } F \cap G = \{0_E\} \quad \text{et} \quad \dim F + \dim G = \dim E \quad \text{alors} \quad E = F \oplus G$$

Ainsi  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$ .

**Partie B. Cas général**

(12 points)

- (1 point) Les composantes de  $f$  sont les formes linéaires  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ , elle sont linéaires donc  $f$  est linéaire.
- (2 points) Un vecteur  $u$  de  $E$  est dans le noyau de  $f$  si et seulement si  $f(u) = 0_{\mathbb{K}^m}$ , donc :

$$\forall u \in E \quad u \in \ker f \iff \varphi_1(u) = \dots = \varphi_m(u) = 0_{\mathbb{K}}.$$

Comme  $H_i = \ker \varphi_i$  ceci donne :

$$\begin{aligned} u \in \ker f &\iff u \in (\ker \varphi_1) \cap \dots \cap (\ker \varphi_m) \\ &\iff u \in H_1 \cap \dots \cap H_m = G \end{aligned}$$

Ceci montre que  $\ker f = G$ .

D'après le théorème du rang, comme  $f$  est linéaire et  $E$  est de dimension finie :

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim E$$

Comme  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$  alors :

$$\dim F + \dim G = \dim E$$

Comme  $\ker f = G$  alors :

$$\dim \operatorname{im} f = \dim F = m.$$

Or l'image de  $f$  est incluse dans  $\mathbb{K}^m$  qui est de dimension  $m$ , donc par théorème :

$$\operatorname{im} f = \mathbb{K}^m$$

Ceci montre que  $f$  est surjective.

- (1 point) Soit  $(e_1, \dots, e_m)$  la base canonique de  $\mathbb{K}^m$ .

Comme  $f : E \rightarrow \mathbb{K}^m$  est surjective alors tout vecteur de  $\mathbb{K}^m$  admet un antécédent par  $f$ , et donc pour tout  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$  il existe  $w_i \in E$  tel que  $f(w_i) = e_i$ . Par définition de  $f$  ceci donne exactement :

$$\forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket \quad \varphi_j(w_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (2 points) Soit  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ . Le vecteur  $w_i$  vérifie  $f(w_i) = e_i$ .

Or  $w_i$  appartient à  $E$  et  $E = F \oplus G$ , donc il existe  $v_i \in F$  et  $x_i \in G$  tels que  $w_i = v_i + x_i$ . Par linéarité de  $f$  on obtient  $f(w_i) = f(v_i) + f(x_i)$ .

Comme  $x_i \in G$  et  $G = \ker f$  alors  $f(x_i) = 0$ , puis  $f(w_i) = f(v_i)$  et donc  $f(v_i) = e_i$ , ce qui montre que là encore :

$$\forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket \quad \varphi_j(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Mais les  $v_i$  appartiennent à  $F$  comme demandé.

5. (3 points) Soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  des scalaires tels que

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0_E.$$

Soit  $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$ . En appliquant la fonction  $\varphi_j$ , qui est linéaire, on obtient :

$$\lambda_1 \varphi_j(v_1) + \dots + \lambda_m \varphi_j(v_m) = 0_{\mathbb{K}}$$

D'après la question précédente, comme  $\varphi_j(v_i) = 0$  si  $i \neq j$  et 1 si  $i = j$  alors :

$$\lambda_j = 0.$$

Ceci étant valable pour tout  $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$  on a démontré que :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m \quad \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0_E \quad \implies \quad \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$$

La famille  $(v_1, \dots, v_m)$  est donc libre.

Or c'est une famille de vecteurs de  $F$  qui est de dimension  $m$ , donc c'est une famille libre maximale et donc c'est une base de  $F$ .

6. (1 point) Soit  $u$  et  $v$  deux vecteurs de  $E$  et  $\lambda$  un scalaire. Alors :

$$p(\lambda u + v) = \sum_{i=1}^m \varphi_i(\lambda u + v) v_i$$

Comme les  $\varphi_i$  sont linéaires :

$$p(\lambda u + v) = \sum_{i=1}^m (\lambda \varphi_i(u) + \varphi_i(v)) v_i = \sum_{i=1}^m (\lambda \varphi_i(u) v_i + \varphi_i(v) v_i)$$

Par linéarité de la somme :

$$p(\lambda u + v) = \lambda \sum_{i=1}^m \varphi_i(u) v_i + \sum_{i=1}^m \varphi_i(v) v_i = \lambda p(u) + p(v).$$

D'après la caractérisation des applications linéaires  $p$  est linéaire.

7. (2 points) Soit  $u$  un vecteur de  $E$ . Tout d'abord on calcule  $\varphi_j(u)$  pour tout  $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$ . Comme  $\varphi_j$  est linéaire alors :

$$\varphi_j(p(u)) = \varphi_j\left(\sum_{i=1}^m \varphi_i(u) v_i\right) = \sum_{i=1}^m \varphi_i(u) \varphi_j(v_i).$$

Comme  $\varphi_j(v_i) = 1$  si  $j = i$  et 0 sinon alors :

$$\varphi_j(p(u)) = \varphi_j(u).$$

On en déduit :

$$p \circ p(u) = \sum_{j=1}^m \varphi_j(p(u)) v_j = \sum_{j=1}^m \varphi_j(u) v_j = p(u).$$

Ceci est valable pour tout  $u \in E$  donc  $p \circ p = p$ , ce qui montre que  $p$  est un projecteur.

Déterminons son image et son noyau. Tout d'abord :

$$\forall u \in E \quad p(u) = \sum_{k=1}^m \varphi_k(u) v_k \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_m) = F$$

Ainsi  $\text{im } p \subseteq F$ . Ensuite on remarque que :

$$\forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket \quad p(v_j) = \sum_{i=1}^m \varphi_i(v_j) v_i = v_j.$$

Ceci montre que  $v_j \in \text{im } p$  pour tout  $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$ . Comme  $\text{im } p$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  alors il est stable par combinaisons linéaires et :

$$\text{Vect}(v_1, \dots, v_m) \subseteq \text{im } p.$$

Par double inclusion  $\text{im } p = F$ .

Pour le noyau on écrit :

$$\forall u \in E \quad u \in \ker p \iff \sum_{k=1}^m \varphi_k(u) v_k = 0_{\mathbb{K}^m}.$$

On sait que la famille  $(v_1, \dots, v_m)$  est libre donc :

$$\sum_{k=1}^m \varphi_k(u) v_k = 0_{\mathbb{K}^m} \iff \varphi_1(u) = \dots = \varphi_m(u) = 0$$

Par définition de  $f$  :

$$\varphi_1(u) = \dots = \varphi_m(u) = 0 \iff f(u) = 0 \iff u \in \ker f = G.$$

On en déduit :  $\ker p = G$ .

On a démontré que  $p$  est le projecteur de  $E$  sur  $F$  parallèlement à  $G$ .

### Partie A. Suite de l'exemple

(3 points)

3. (1 point) Les vecteurs de  $F$  sont les vecteurs :

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = (-\lambda_2, \lambda_1, -\lambda_1 + 2\lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_2) \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

On a alors  $\varphi(u) = -\lambda_1$  et  $\psi(u) = 2\lambda_1 + \lambda_2$ .

Le système d'équation  $\begin{cases} \varphi(u) = 0 \\ \psi(u) = 1 \end{cases}$  donne  $\lambda_1 = 0$  et  $\lambda_2 = 1$ , donc le vecteur  $v = u_1 = (-1, 0, 2, 1)$  convient.

Le système d'équation  $\begin{cases} \varphi(u) = 1 \\ \psi(u) = 0 \end{cases}$  donne  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = 2$ , donc le vecteur  $w = -u_1 + 2u_2 = (-2, -1, 5, 0)$  convient.

4. (2 points) On remarque que  $G = \ker \varphi \cap \ker \psi$ , donc l'après la partie précédente l'application  $p : u \mapsto \varphi(u)v + \psi(u)w$  est le projecteur de  $E = \mathbb{R}^4$  sur  $F = \text{Vect}(v, w)$  parallèlement à  $G$ .

Le fait que  $F = \text{Vect}(v, w)$  est conséquence de la question 5 de la partie précédente, car  $v$  et  $w$  sont les antécédents des vecteurs  $e_1$  et  $e_2$  de la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  par l'application  $f : u \mapsto (\varphi(u), \psi(u))$ .

On peut expliciter l'expression  $p(u) = \varphi(u)v + \psi(u)w$  :

$$\forall (x, y, z, t) \in E$$

$$p(x, y, z, t) = (2x + y + z + t)(-1, 0, 2, 1) + (x + 2y + z - t)(-2, -1, 5, 0)$$

Par exemple pour  $e_1 = (1, 0, 0, 0)$  :

$$p(e_1) = 2(-1, 0, 2, 1) + (-2, -1, 5, 0) = (-4, -1, 9, 2).$$

### Problème 3. La fonction indicatrice d'Euler

(7 points)

1. (2 points) Soit  $\Omega = \llbracket 1, n \rrbracket$ , muni de la probabilité uniforme.

L'événement  $A_k$  est alors l'ensemble des multiples de  $p_k$  dans cet intervalle, *i.e.*,

$$A_k = \{p_k, 2p_k, \dots, mp_k\} \quad \text{avec} \quad m = \frac{n}{p_k}$$

Ainsi  $A_k$  est de cardinal  $\frac{n}{p_k}$  et donc par équiprobabilité :

$$P(A_k) = \frac{\text{Card } A_k}{\text{Card } \Omega} = \frac{1}{p_k}.$$

2. (a) (2 points) L'événement  $A_j \cap A_k$  signifie :  $a$  est multiple de  $p_j$  et de  $p_k$ .

Comme  $p_j$  et  $p_k$  sont premiers entre eux alors il équivaut à :  $a$  est multiple du produit  $p_j p_k$ .

En effet on sait que :

$$p_j \mid a \quad \text{et} \quad p_k \mid a \quad \implies \quad p_j \vee p_k \mid a$$

et comme  $p_j$  et  $p_k$  sont premiers entre eux alors  $p_j \vee p_k = p_j p_k$ .

Comme dans la question précédente on montre que :

$$P(A_j \cap A_k) = \frac{\text{Card}(A_j \cap A_k)}{\text{Card } \Omega} = \frac{\frac{n}{p_j p_k}}{n} = \frac{1}{p_j p_k}$$

Or on sait que :

$$P(A_j) \times P(A_k) = \frac{1}{p_j} \times \frac{1}{p_k} = \frac{1}{p_j p_k}$$

Ainsi  $P(A_j \cap A_k) = P(A_j)P(A_k)$  donc les événements  $A_j$  et  $A_k$  sont indépendants.

(b) (1 point) Soit  $s \in \llbracket 1, r \rrbracket$  et  $j_1, \dots, j_s$  des entiers distincts de l'ensemble  $\llbracket 1, r \rrbracket$ .

Les nombres premiers  $p_{j_1}, \dots, p_{j_s}$  sont distincts, donc l'événement  $A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_s}$  est l'événement :  $p_{j_1} \times \dots \times p_{j_s}$  divise  $a$ .

Ceci montre que :

$$P(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_s}) = \frac{1}{p_{j_1} \cdots p_{j_s}} = \prod_{i=1}^s P(A_{j_i})$$

Ceci étant vrai pour toute partie  $\{j_1, \dots, j_s\}$  de  $\llbracket 1, r \rrbracket$ , les événements  $A_1, \dots, A_r$  sont mutuellement indépendants.

3. (1 point) L'entier  $a$  est premier avec  $n$  si et seulement s'il n'est multiple d'aucun des  $p_k$ , donc  $B = \overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_r}$ .

Comme les événements  $A_1, \dots, A_r$  sont mutuellement indépendants alors les événements  $\overline{A_1}, \dots, \overline{A_r}$  sont mutuellement indépendants, et donc :

$$P(B) = P(\overline{A_1}) \times \dots \times P(\overline{A_r}) = \prod_{k=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

4. (1 point) Par définition l'événement  $B$  est l'ensemble des éléments de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  premiers avec  $n$ , donc  $\varphi(n) = \text{Card } B$ .

Par équiprobabilité  $P(B) = \frac{\text{Card } B}{\text{Card } \Omega}$ , donc  $\varphi(n) = nP(B)$ .

Ceci donne :

$$\varphi(n) = \prod_{k=1}^r p_k^{m_k} \times \prod_{k=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = \prod_{k=1}^r (p_k^{m_k} - p_k^{m_k-1})$$

Par exemple si  $n = 720$  alors  $n = 2^4 \times 3^2 \times 5$  donc  $\varphi(n) = (2^4 - 2^3)(3^2 - 3)(5 - 1) = 192$ .

#### Problème 4. Irrationalité de $\pi$

(14 points)

Par définition  $\pi$  est strictement positif. Comme  $\pi = \frac{p}{q}$  avec  $q > 0$  alors  $p > 0$ .

1. (a) (1 point) La fonction  $g$  est polynomiale donc dérivable, de dérivée :

$$\forall x \in [0, \pi] \quad g'(x) = p - 2qx$$

Cette dérivée est positive sur  $\left[0, \frac{p}{2q}\right]$ , négative sur  $\left[\frac{p}{2q}, \pi\right]$ , donc la fonction  $g$  atteint ses minimum locaux en 0 et en  $\pi$ , et son maximum en  $\frac{p}{2q}$ .

On calcule  $g(0) = 0$ . Comme  $\pi = \frac{p}{q}$  alors  $g(\pi) = 0$ , et enfin  $g\left(\frac{p}{2q}\right) = \frac{p^2}{2q} = \frac{\pi p}{2}$ .

Les bornes de  $g$  sont donc 0 et  $\frac{p^2}{2q}$ .

(b) (2 points) D'après la question précédente :

$$\forall x \in [0, \pi] \quad 0 \leq g(x) \leq \frac{p^2}{2q}$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Comme  $f_n = \frac{1}{n!} g^n$  alors :

$$\forall x \in [0, \pi] \quad 0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n!} \left(\frac{p^2}{2q}\right)^n$$

De plus, comme  $0 \leq \sin \leq 1$  sur l'intervalle  $[0, \pi]$  alors :

$$\forall x \in [0, \pi] \quad 0 \leq f_n(x) \sin x \leq \frac{1}{n!} \left( \frac{p^2}{2q} \right)^n$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^\pi 0 \, dx \leq \int_0^\pi f_n(x) \sin x \, dx \leq \int_0^\pi \frac{1}{n!} \left( \frac{p^2}{2q} \right)^n \, dx$$

Ceci donne :

$$0 \leq I_n \leq \frac{\pi}{n!} \left( \frac{p^2}{2q} \right)^n$$

Cet encadrement est valable pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Par croissances comparées on sait que pour tout réel  $a$  :  $a^n \underset{(+\infty)}{=} o(n!)$

On en déduit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n!} \left( \frac{p^2}{2q} \right)^n = 0$ , puis par théorème d'encadrement la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.

(c) (1 point) On raisonne par l'absurde, en supposant que pour un certain  $n \in \mathbb{N}$  l'intégrale  $I_n$  est nulle :

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad \int_0^\pi f_n(x) \sin x \, dx = 0$$

Sur l'intervalle  $[0, \pi]$  la fonction  $x \mapsto f_n(x) \sin x$  est :

- continue par produit,
- positive car les fonctions  $g$  et  $\sin$  sont positives sur  $[0, \pi]$ .

Par théorème de positivité, comme  $\int_0^\pi f_n(x) \sin x \, dx = 0$  alors la fonction  $x \mapsto f_n(x) \sin(x)$  est nulle.

Or  $f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{n!} \left(\frac{\pi p}{2}\right)^2$  car  $\pi = \frac{p}{q}$ , donc  $f_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$  est non-nul.

Cette contradiction montre que  $I_n$  n'est pas nulle.

2. (a) (1 point) On rappelle que pour tout  $x \in [0, \pi]$  :  $f_n(x) = \frac{1}{n!} x^n (p - qx)^n$

Ainsi la fonction  $f_n$  est polynomiale de degré  $2n$ .

Comme elle est multiple de  $x \mapsto x^n$  alors 0 est racine de  $f_n$ , de multiplicité  $n$ .

Ceci implique que  $f_n^{(k)}(0) = 0$  pour tout  $k = 0, \dots, n-1$ .

De plus, comme  $f_n$  est degré  $2n$  alors  $f_n^{(2n+1)}$  est la fonction nulle, puis  $f_n^{(k)}$  est la fonction nulle pour tout  $k > 2n$ .

On a donc démontré que si  $k < n$  ou  $k > 2n$  alors  $f_n^{(k)}(0) = 0$ .

(b) (2 points) Méthode 1 : en développant l'expression de  $f_n$ .

D'après la formule du binôme :

$$\forall x \in [0, \pi] \quad f_n(x) = \frac{1}{n!} x^n \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^{n-i} (-q)^i x^i = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^{n-i} (-q)^i x^{n+i}$$

Soit  $k$  un entier tel que  $n \leq k \leq 2n$ . Alors la dérivée  $k$ -ème de la fonction  $x \mapsto x^{n+i}$  est nulle si  $k > n+i$ , donc si  $i < k-n$ . Si  $i \geq k-n$  elle vaut  $x \mapsto \frac{(n+i)!}{(n+i-k)!} x^{n+i-k}$ . On en déduit, par combinaison linéaire :

$$\forall x \in [0, \pi] \quad f_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{i=k-n}^n \binom{n}{i} p^{n-i} (-q)^i \frac{(n+i)!}{(n+i-k)!} x^{n+i-k}$$

On remarque que l'on a bien  $0 \leq k-n \leq n$  car  $n \leq k \leq 2n$ .

Le monôme  $x^{n+i-k}$  s'annule en 0 si  $n+i-k > 0$ , mais il est constant égal à 1 si  $n+i-k = 0$ , donc si  $i = k-n$ . Ainsi, en spécialisant en  $x = 0$  :

$$f_n^{(k)}(0) = \frac{1}{n!} \binom{n}{k-n} p^{2n-k} (-q)^{k-n} k! = \frac{k!}{n!} \binom{n}{k-n} p^{2n-k} (-q)^{k-n}$$

Comme  $n \leq k$  alors  $n!$  divise  $k!$ , donc  $\frac{k!}{n!}$  est entier.

Les coefficients du binôme sont tous entiers donc  $\binom{n}{k-n}$  est entier.

Par hypothèse  $p$  et  $q$  sont entiers, et  $2n-k$  et  $k-n$  sont positifs, donc  $p^{2n-k}$  et  $(-q)^{k-n}$  sont entiers.

Par produit  $f_n^{(k)}(0)$  est entier.

Méthode 2. On note  $a(x) = x^n$  et  $b(x) = (p - qx)^n$ . Ces fonctions sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , de dérivées :

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad a^{(i)}(x) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-i)!} x^{n-i} & \text{si } 0 \leq i \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$b^{(i)}(x) = \begin{cases} (-q)^i \frac{n!}{(n-i)!} (p - qx)^{n-i} & \text{si } 0 \leq i \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit  $k$  un entier compris entre  $n$  et  $2n$ . D'après la formule de Leibniz, comme  $f_n = \frac{1}{n!} ab$  :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} a^{(i)}(x) b^{(k-i)}(x).$$

La fonction  $a^{(i)}$  est nulle si  $i > n$ , et la fonction  $b^{(k-i)}$  est nulle si  $k-i > n$ , donc si  $i < k-n$ . Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{i=k-n}^n \binom{k}{i} a^{(i)}(x) b^{(k-i)}(x).$$

Comme  $n \leq k \leq 2n$  alors on a bien  $0 \leq k-n \leq n$ .

Les formules pour les dérivées successives de  $a$  et  $b$  donnent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{i=k-n}^n \binom{k}{i} \frac{n!}{(n-i)!} x^{n-i} \frac{n!}{(n-k+i)!} (-q)^{k-i} (p - qx)^{n-k+i}.$$

Le monôme  $x^{n-i}$  est nul en 0 sauf si  $i = n$ , auquel cas il vaut 1, donc :

$$f_n^{(k)}(0) = \binom{k}{n} \frac{n!}{(2n-k)!} (-q)^{k-n} p^{2n-k}.$$

Comme  $k \geq n$  alors  $2n - k \leq n$ , donc  $(2n - k)!$  divise  $n!$ , et  $\frac{n!}{(2n-k)!}$  est entier.

Les coefficients du binôme sont tous entiers donc  $\binom{k}{n}$  est entier.

Par hypothèse  $p$  et  $q$  sont entiers, et  $2n - k$  et  $k - n$  sont positifs, donc  $p^{2n-k}$  et  $(-q)^{k-n}$  sont entiers.

Par produit  $f_n^{(k)}(0)$  est entier.

(c) (1 point) Soit  $x \in [0, \pi]$ . On rappelle que  $\pi = \frac{p}{q}$  donc :

$$\begin{aligned} f_n(\pi - x) &= \frac{1}{n!} \left( \frac{p}{q} - x \right)^n (p - q\pi + qx)^n \\ &= \frac{1}{n!} \left( \frac{p - qx}{q} \right)^n (qx)^n = \frac{1}{n!} x^n (p - qx)^n = f_n(x) \end{aligned}$$

On en déduit, en dérivant  $k$  fois :

$$\forall x \in [0, \pi] \quad (-1)^k f_n^{(k)}(\pi - x) = f_n^{(k)}(x)$$

En particulier  $f_n^{(k)}(\pi) = (-1)^k f_n^{(k)}(0)$ , et donc d'après les deux questions précédentes  $f_n^{(k)}(\pi)$  est entier.

3. (a) (2 points) La fonction  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  donc par combinaison linéaire la fonction  $\varphi$  est deux fois dérivable, de dérivée seconde :

$$\forall x \in [0, \pi] \quad \varphi''(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k f_n^{(2k+2)}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k f_n^{(2(k+1))}(x)$$

Le changement d'indice  $\ell = k + 1$  donne :

$$\forall x \in [0, \pi] \quad \varphi''(x) = \sum_{\ell=1}^{n+1} (-1)^{\ell-1} f_n^{(2\ell)}(x) = - \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k f_n^{(2k)}(x)$$

On obtient alors par télescopage :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, \pi] \quad \varphi(x) + \varphi''(x) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k f_n^{(2k)}(x) - \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k f_n^{(2k)}(x) \\ &= f_n(x) + (-1)^n f_n^{(2n+2)}(x) \end{aligned}$$

Comme  $f_n$  est polynomiale de degré  $2n$  alors  $f_n^{(2n+2)}$  est nulle, donc  $\varphi + \varphi'' = f_n$ .

(b) (2 points) On applique deux intégrations par parties à l'intégrale  $I = \int_0^\pi \varphi(x) \sin x \, dx$ .

On pose  $u(x) = \varphi(x)$  et  $v(x) = -\cos x$ . Les fonctions  $u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'intervalle  $[0, \pi]$ , de dérivées  $u'(x) = \varphi'(x)$  et  $v'(x) = \sin x$ , donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \varphi(x) \sin x \, dx = \left[ -\varphi(x) \cos x \right]_0^\pi + \int_0^\pi \varphi'(x) \cos x \, dx \\ &= \varphi(\pi) + \varphi(0) + \int_0^\pi \varphi'(x) \cos x \, dx \end{aligned}$$

On pose cette fois-ci  $u(x) = \varphi'(x)$  et  $v(x) = \sin x$ . Alors les fonctions  $u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, \pi]$ , de dérivées  $u'(x) = \varphi''(x)$  et  $v'(x) = \cos x$ , donc par une seconde intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \varphi'(x) \cos x \, dx &= \left[ \varphi'(x) \sin x \right]_0^\pi - \int_0^\pi \varphi''(x) \sin x \, dx \\ &= -\int_0^\pi \varphi''(x) \sin x \, dx \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\int_0^\pi \varphi(x) \sin x \, dx = \varphi(\pi) + \varphi(0) - \int_0^\pi \varphi''(x) \sin x \, dx$$

Puis par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^\pi (\varphi(x) + \varphi''(x)) \sin x \, dx = \varphi(0) + \varphi(\pi)$$

D'après la question précédente  $\varphi + \varphi'' = f_n$  donc :

$$\int_0^\pi f_n(x) \sin x \, dx = \varphi(0) + \varphi(\pi)$$

On a bien démontré que  $I_n = \varphi(0) + \varphi(\pi)$ .

(c) (1 point) Par définition de  $\varphi$  :

$$\varphi(0) = \sum_{k=0}^n (-1)^k f_n^{(2k)}(0) \quad \text{et} \quad \varphi(\pi) = \sum_{k=0}^n (-1)^k f_n^{(2k)}(\pi)$$

D'après la question 2, on sait que  $f_n^{(k)}(0)$  et  $f_n^{(k)}(\pi)$  sont entiers pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , donc par somme  $\varphi(0)$  et  $\varphi(\pi)$  sont entiers.

Comme  $I_n = \varphi(0) + \varphi(\pi)$  alors  $I_n$  est entier.

4. (1 point) D'après la question 1 la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.

Il existe donc un certain rang à partir duquel  $|I_n| \leq \frac{1}{2}$ .

Soit  $n$  un entier tel que  $|I_n| \leq \frac{1}{2}$ . Alors  $I_n \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ .

Or d'après la question précédente  $I_n$  est entier, donc  $I_n \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \cap \mathbb{Z} = \{0\}$ .

Ainsi  $I_n = 0$ , alors que dans la question 1 on a démontré qu'aucun  $I_n$  n'est nul.

Cette contradiction montre que l'hypothèse de départ est fautive, il n'existe pas d'entiers  $p$  et  $q$  tels que  $\pi = \frac{p}{q}$ .

Ceci signifie que  $\pi$  est irrationnel.

Cette preuve a été publiée en 1946 par Ivan NIVEN, mathématicien canadien (1915 – 1999).