Concours blanc
Corrigé de l'épreuve de mathématiques

Problème 1. Intégrale de Gauss et formule de Stirling *(36 points)*

Partie A. Intégrales de Wallis *(9 points)*

1. *(2 points)* Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} t \, \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, \cos^{n+1} t \, \mathrm{d}t$.

   On pose $u(t) = \sin t$ et $v(t) = \cos^{n+1} t$. Ces deux fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, de dérivées $u'(t) = \cos t$ et $v'(t) = -(n+1) \sin t \cos^n t$. La formule d'intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \Big[\sin t \cos^{n+1} t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1) \sin^2 t \cos^n t \, \mathrm{d}t \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t) \cos^n t \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

   Par linéarité :

$$W_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, \mathrm{d}t - (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} t \, \mathrm{d}t = (n+1) W_n - (n+1) W_{n+2}$$

   Cette égalité donne $(n+2) W_{n+2} = (n+1) W_n$ puis : $\quad W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$

2. *(2 points)* Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit la propriété $\mathscr{P}_n$: $\quad W_{n+1} W_n = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$

   On démontre par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   <u>Initialisation.</u> On calcule $W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, \mathrm{d}t = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.
   Ainsi $W_1 W_0 = \frac{\pi}{2}$, la propriété $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   <u>Hérédité.</u> Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie.
   L'égalité démontrée dans la question précédente donne :

$$W_{n+2} W_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} W_n W_{n+1}$$

   Par hypothèse de récurrence :

$$W_{n+2} W_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} \, \frac{\pi}{2(n+1)} = \frac{\pi}{2(n+2)}$$

   Ceci démontre que la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. Ainsi l'hérédité est démontrée.
   <u>Conclusion.</u> Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie.

3. *(1 point)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que : $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad 0 \leqslant \cos t \leqslant 1$
   On en déduit :
$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad 0 \leqslant \cos^{n+1} t \leqslant \cos^n t \leqslant \cos^{n-1} t$$
   Par croissance de l'intégrale :
$$0 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} t \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} t \,\mathrm{d}t$$
   Ceci donne bien :
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad 0 \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n \leqslant W_{n-1}$$

4. *(2 points)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme W_n est positive alors par multiplication de l'inégalité ci-dessus :
$$W_{n+1}W_n \leqslant W_n^2 \leqslant W_{n-1}W_n$$
   Grâce à la formule démontrée dans la question 2 :
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{\pi}{2(n+1)} \leqslant W_n^2 \leqslant \frac{\pi}{2n}$$
   Comme W_n est positive :
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \sqrt{\frac{n}{n+1}} \leqslant \sqrt{\frac{2n}{\pi}} W_n \leqslant 1$$
   Comme $\lim \sqrt{\frac{n}{n+1}} = 1$ alors par théorème d'encadrement la suite $\left(\sqrt{\frac{2n}{\pi}} W_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1, ce qui prouve l'équivalence :
$$W_n \underset{(+\infty)}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \tag{1}$$

5. *(2 points)* Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété :
$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2}.$$
   On démontre par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Initialisation. On sait que $W_0 = \frac{\pi}{2}$, donc la propriété $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   Hérédité. Supposons que pour un $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie.
   D'après le résultat de la question 1 :
$$W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} W_{2n}.$$
   Ainsi d'après l'hypothèse de récurrence :
$$W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2(n+1)} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2n+1)!}{2 \times 4^n (n+1)! n!} \frac{\pi}{2}.$$

On en déduit :

$$W_{2n+2} = \frac{2n+2}{2(n+1)} \times \frac{(2n+1)!}{2 \times 4^n (n+1)!n!} \frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)!}{4^{n+1}((n+1)!)^2} \frac{\pi}{2}$$

Ceci montre que la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie, et donc l'hérédité est établie.

Conclusion. Par récurrence la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Elle s'écrit aussi :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad W_{2n} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \frac{\pi}{2}.$$

D'après la formule (1) :

$$W_{2n} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

On en déduit donc :

$$\binom{2n}{n} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}. \tag{2}$$

Partie B. Intégrale de Gauss *(14 points)*

1. *(2 points)* La fonction exponentielle est convexe. Sa tangente en 0 est la droite d'équation $y = 1 + t$. La courbe d'une fonction convexe est au-dessus de toutes ses tangentes, donc :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad e^t \geqslant 1 + t.$$

Soit x un réel et $t = -x^2/2n$. Alors :

$$e^{-x^2/2n} \geqslant 1 - x^2/2n$$

Si x appartient à l'intervalle $\left[0, \sqrt{2n}\right]$ alors $1 - x^2/2n$ est positif, donc l'inégalité ci-dessus donne par passage à la puissance n-ème :

$$\forall x \in \left[0, \sqrt{2n}\right] \qquad e^{-x^2/2} \geqslant \left(1 - x^2/2n\right)^n.$$

Ceci est la première inégalité à démontrer.

Si $t = x^2/2n$ alors :

$$e^{x^2/2n} \geqslant 1 + x^2/2n$$

Tous ces termes sont strictement positifs, et la fonction $u \mapsto u^{-n}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$, donc on obtient par application de cette fonction :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad e^{-x^2/2} \leqslant \left(1 + x^2/2n\right)^{-n}.$$

La seconde inégalité est démontrée.

2. (a) *(2 points)* Soit $g_n(x) = (1 + x^2/2n)^n$. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$, et continue car elle est polynomiale.

D'après le théorème fondamental la fonction G_n est une primitive de g_n.

Ceci montre que G_n est bien définie, et de plus elle est dérivable de dérivée g_n.

La fonction g_n est positive, donc G_n est croissante.

(b) *(2 points)* Soit $x = \sqrt{2n}\tan t$. Alors :

- Si $t = 0$ alors $x = 0$ et si $t = \arctan \frac{A}{\sqrt{2n}}$ alors $x = A$.
- La fonction $t \mapsto \sqrt{2n}\tan t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $\left[0, \arctan \frac{A}{\sqrt{2n}}\right]$ car celui-ci est inclus dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. .
- Par dérivation, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\sqrt{2n}}{\cos^2 t}$ donc $\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2n}}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$.

Par changement de variable :

$$G_n(A) = \int_0^{\arctan \frac{A}{\sqrt{2n}}} (1 + \tan^2 t)^{-n} \frac{\sqrt{2n}}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$

La formule $1 + \tan^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t}$ donne : $\quad G_n(A) = \sqrt{2n}\displaystyle\int_0^{\arctan \frac{A}{\sqrt{2n}}} \cos^{2n-2} t\,\mathrm{d}t.$

C'est le résultat demandé.

(c) *(2 points)* La fonction $\varphi_n : t \mapsto \cos^{2n-2} t$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème fondamental la fonction

$$\Phi_n : x \mapsto \int_0^x \cos^{2n-2} t\,\mathrm{d}t$$

en est une primitive. Ainsi Φ_n est dérivable donc continue.

On remarque que :

$$\forall A \in \mathbb{R} \qquad G_n(A) = \sqrt{2n}\ \Phi_n\left(\arctan \frac{A}{\sqrt{2n}}\right)$$

On sait que :

$$\lim_{A\to+\infty} \arctan \frac{A}{\sqrt{2n}} = \frac{\pi}{2}$$

et comme Φ_n est continue alors :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \Phi_n(x) = \Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot$$

Par composition de limites :

$$\lim_{A\to+\infty} G_n(A) = \sqrt{2n}\ \Phi_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} t\,\mathrm{d}t.$$

Cette limite est bien finie, et finalement :

$$K_n = \sqrt{2n}\,W_{2n-2}.$$

3. *(1 point)* Soit $x = \sqrt{2n}\sin t$. Alors :
   - Si $t = 0$ alors $x = 0$ et si $t = \frac{\pi}{2}$ alors $x = \sqrt{2n}$.
   - La fonction $t \mapsto \sqrt{2n}\sin t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
   - Par dérivation $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sqrt{2n}\cos t$ donc $\mathrm{d}x = \sqrt{2n}\cos t\,\mathrm{d}t$.

Par changement de variable :

$$H_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)^n \sqrt{2n}\cos t \,\mathrm{d}t = \sqrt{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t \,\mathrm{d}t.$$

Ceci donne :

$$H_n = \sqrt{2n}\, W_{2n+1}.$$

4. (a) *(2 points)* La fonction $x \mapsto e^{-x^2/2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème fondamental F en est une primitive.

   La fonction F est donc définie sur $\mathbb{R}$, dérivable de dérivée $F' : x \mapsto e^{-x^2/2}$.

   Cette dérivée est positive, donc F est croissante.

   D'après la question 1 de cette partie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $A \in \mathbb{R}_+$:

   $$\forall x \in [0, A] \qquad 0 \leqslant e^{-x^2/2} \leqslant (1 + x^2/2n)^{-n}$$

   Par croissance de l'intégrale :

   $$0 \leqslant F(A) \leqslant G_n(A).$$

   Ainsi F est inférieure ou égale à toutes les fonctions G_n sur $\mathbb{R}_+$.

   (b) *(1 point)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction G_n est croissante et tend vers K_n en $+\infty$, donc :

   $$\forall A \in \mathbb{R}_+ \qquad F(A) \leqslant G_n(A) \leqslant K_n.$$

   La fonction F est croissante et majorée par K_n, donc par théorème de la limite monotone elle admet une limite finie en $+\infty$, que l'on note I.

   Par théorème de comparaison : $I \leqslant K_n$.

   (c) *(1 point)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 1 de cette partie :

   $$\forall x \in \left[0, \sqrt{2n}\right] \qquad (1 - x^2/2n)^n \leqslant e^{-x^2/2}$$

   Par croissance de l'intégrale :

   $$\int_0^{\sqrt{2n}} (1 - x^2/2n)^n \,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\sqrt{2n}} e^{-x^2/2} \,\mathrm{d}x.$$

   Ainsi $H_n \leqslant F(\sqrt{2n})$. La fonction F est croissante donc majorée par sa limite en $+\infty$, ce qui donne : $H_n \leqslant I$.

5. *(1 point)* Dans la partie A on a démontré l'équivalence $W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. Elle donne :

$$H_n = \sqrt{2n}\, W_{2n+1} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2n}\sqrt{\frac{\pi}{4n+2}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{et} \quad K_n = \sqrt{2n}\, W_{2n-2} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2n}\sqrt{\frac{\pi}{4n-4}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Les suites (H_n) et (K_n) convergent donc vers $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

D'après la question 4, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $H_n \leqslant I \leqslant K_n$, donc par encadrement :

$$\boxed{I = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

Partie C. Formule de Stirling *(13 points)*

1. (a) *(2 points)* D'après la relation de Chasles :

$$\int_1^n \frac{\lfloor t \rfloor}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{\lfloor t \rfloor}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Si $t \in [k, k+1[$ alors $\lfloor t \rfloor = k$, donc :

$$\int_1^n \frac{\lfloor t \rfloor}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{k}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Ceci donne :

$$\int_1^n \frac{\lfloor t \rfloor}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n-1}\Big[k\ln|t|\Big]_k^{k+1} = \sum_{k=1}^{n-1}(k\ln(k+1) - k\ln k)$$

Par linéarité de la somme, changement de variable puis télescopage :

$$\begin{aligned}\int_1^n \frac{\lfloor t \rfloor}{t}\,\mathrm{d}t &= \sum_{k=1}^{n-1}k\ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n-1}k\ln k\\ &= \sum_{k=2}^{n}(k-1)\ln k - \sum_{k=1}^{n-1}k\ln k\\ &= \sum_{k=2}^{n}k\ln k - \sum_{k=2}^{n}\ln k - \sum_{k=1}^{n-1}k\ln k = n\ln n - \sum_{k=1}^{n}\ln k.\end{aligned}$$

Finalement :

$$\int_1^n \frac{\lfloor t \rfloor}{t}\,\mathrm{d}t = n\ln n - \ln\left(\prod_{k=1}^{n}k\right) = n\ln n - \ln(n!).$$

Il s'agit bien du résultat attendu.

(b) *(1 point)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}I_n &= \int_1^n \frac{1}{t}\Big(t - \lfloor t \rfloor - \frac{1}{2}\Big)\,\mathrm{d}t = \int_1^n\Big(1 - \frac{1}{2t}\Big)\,\mathrm{d}t - \int_1^n \frac{\lfloor t \rfloor}{t}\,\mathrm{d}t\\ &= \Big[t - \frac{1}{2}\ln t\Big]_1^n - (n\ln n - \ln(n!)) = n - \frac{1}{2}\ln n - 1 - n\ln n + \ln(n!).\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad I_n = \ln(n!) - \Big(n + \frac{1}{2}\Big)\ln n + n - 1.}$$

2. (a) *(2 points)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \ln((n+1)!) - \left(n + \frac{3}{2}\right)\ln(n+1) + (n+1) - \ln(n!) + \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - n \\ &= -\left(n + \frac{1}{2}\right)\ln(n+1) + \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n + 1 \\ &= -\left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1 \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{x}{2n+1+x}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(1 - \frac{2n+1}{2n+1+x}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\Big[x - (2n+1)\ln|2n+1+x|\Big]_{-1}^{1} = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\frac{2n+2}{2n} \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{x}{2n+1-x}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(1 - \frac{2n+1}{2n+1-x}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\Big[x + (2n+1)\ln|2n+1-x|\Big]_{-1}^{1} = 1 + \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\frac{2n}{2n+2}. \end{aligned}$$

Ceci donne bien :

$$I_{n+1} - I_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{x}{2n+1+x}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{x}{2n+1-x}\,\mathrm{d}x.$$

(b) *(1 point)* Par addition et linéarité les résultats de la question précédente donnent :

$$\begin{aligned} 2(I_{n+1} - I_n) &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{x}{2n+1+x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{x}{2n+1-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{x}{2n+1+x} - \frac{x}{2n+1-x}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{-2x^2}{(2n+1)^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Finalement on obtient, comme demandé :

$$I_{n+1} - I_n = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{(2n+1)^2 - x^2}\,\mathrm{d}x.$$

(c) *(2 points)* Rappelons que $n > 0$. Comme :

$$\forall x \in [-1,1] \qquad 0 < (2n+1)^2 - 1 \leqslant (2n+1)^2 - x^2 \leqslant (2n+1)^2$$

Alors :

$$\forall x \in [-1,1] \qquad \frac{1}{(2n+1)^2} \leqslant \frac{1}{(2n+1)^2 - x^2} \leqslant \frac{1}{4n(n+1)}.$$

Ensuite :

$$\forall x \in [-1,1] \qquad \frac{x^2}{(2n+1)^2} \leqslant \frac{x^2}{(2n+1)^2 - x^2} \leqslant \frac{x^2}{4n(n+1)}.$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{(2n+1)^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{(2n+1)^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{4n(n+1)}\,\mathrm{d}x$$

Ceci donne, d'après la question précédente :

$$\frac{2}{3(2n+1)^2} \leqslant 2(I_n - I_{n+1}) \leqslant \frac{1}{6n(n+1)}.$$

Comme n est positif on constate :

$$4(n+1)(n+2) = 4n^2 + 12n + 8 \geqslant 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2.$$

On en déduit bien :

$$\frac{1}{12(n+1)(n+2)} \leqslant I_n - I_{n+1} \leqslant \frac{1}{12n(n+1)}.$$

3. *(2 points)* On calcule, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} - u_n = I_{n+1} - I_n - \frac{1}{12(n+1)} + \frac{1}{12n} = I_{n+1} - I_n + \frac{1}{12n(n+1)}$$

et

$$v_{n+1} - v_n = I_{n+1} - I_n - \frac{1}{12(n+2)} + \frac{1}{12(n+1)} = I_{n+1} - I_n + \frac{1}{12(n+1)(n+2)}$$

Le résultat de la question précédente montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} - u_n \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} - v_n \leqslant 0.$$

Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
De plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad v_n - u_n = \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)} = \frac{1}{12n(n+1)}.$$

La suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc vers 0.
Finalement la suite u est croissante, la suite v est décroissante et la suite $u-v$ converge vers 0, donc les suites u et v sont adjacentes.

4. (a) *(2 points)* Comme les suites u et v sont adjacentes alors elles convergent vers la même limite. Notons ℓ cette limite.

Comme u est croissante et v ets décroissante alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n \leqslant \ell \leqslant v_n.$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad I_n - \frac{1}{12n} \leqslant \ell \leqslant I_n - \frac{1}{12(n+1)}$$

Ceci donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad 0 \leqslant \ell - I_n + \frac{1}{12n} \leqslant \frac{1}{12n(n+1)} = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ceci montre que :

$$I_n \underset{(+\infty)}{=} \ell + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

L'expression de I_n obtenue dans la question (1b) donne :

$$\ln(n!) \underset{(+\infty)}{=} \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - n + 1 + \ell + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi :

$$n! \underset{(+\infty)}{=} e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n}\, e^{-n}\, e^{1+\ell}\, e^{\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Par développement limité :

$$e^{\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{(+\infty)}{=} 1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Posons $\alpha = e^{1+\ell}$. Alors $\alpha > 0$ et :

$$n! \underset{(+\infty)}{=} \left(\frac{n}{e}\right)^n \alpha\sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Il s'agit du résultat attendu.

(b) *(1 point)* Comme :

$$1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{(+\infty)}{\sim} 1$$

Alors :

$$n! \underset{(+\infty)}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \alpha\sqrt{n}. \tag{3}$$

L'équivalent (2) obtenu dans la partie A s'écrit :

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}.$$

Grâce à (3) on en déduit :

$$\frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\alpha\sqrt{2n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}\alpha^2 n} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}.$$

Ceci donne $\alpha = \sqrt{2\pi}$, et donc finalement on obtient la formule de Stirling :

$$\boxed{n! \underset{(+\infty)}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.}$$

Problème 2. Racines carrées et nilpotence *(29 points)*

Partie A. En dimension 2 *(6 points)*

1. *(2 points)* Supposons qu'il existe une racine carrée g de Id_E telle que $g(e_1) = xe_2$.

   Alors par linéarité $g^2(e_1) = xg(e_2)$. Comme $g^2 = \mathrm{Id}_E$ et $x \neq 0$ alors $g(e_2) = \frac{1}{x}e_1$.

   Un application linéaire est uniquement déterminée par l'image d'une base. Or (e_1, e_2) est une base de E, et $xe_2, \frac{1}{x}e_1$ sont deux vecteurs de E. Donc il existe un et un seul endomorphisme g de E tel que $g(e_1) = xe_2$ et $g(e_2) = \frac{1}{x}e_1$.

   Cet endomorphisme vérifie $g^2(e_1) = xg(e_2) = e_1$ et $g^2(e_2) = \frac{1}{x}g(e_1) = e_2$, donc $g^2 = \mathrm{Id}_E$, toujours car une application linéaire est uniquement déterminée par l'image d'une base.

   Ainsi g est une racine carrée de Id_E, et il est uniquement déterminé, donc il existe bien une et une seule racine carrée de Id_E telle que $g(e_1) = xe_2$.

   Si y est un réel non-nul différent de x alors il existe de même une et une seule racine carrée h de Id_E telle que $h(e_1) = ye_2$. Comme e_2 est non-nul alors $g \neq h$.

   Comme il existe une infinité de réels non-nuls alors il existe une infinité de racines carrées de Id_E.

   On peut ajouter que ce sont les symétries de E.

2. (a) *(2 points)* On démontre que la famille $(e, g(e))$ est libre.

   Soit λ et μ deux réels tels que

   $$\lambda e + \mu g(e) = 0_E. \tag{4}$$

   Comme g est linéaire alors :

   $$\lambda g(e) + \mu g^2(e) = 0_E.$$

   Comme $g^2 = -\mathrm{Id}_E$ alors :

   $$-\mu e + \lambda g(e) = 0_E. \tag{5}$$

   Par combinaison linéaire des égalités (4) et (5) :

   $$\lambda(\lambda e + \mu g(e)) - \mu(-\mu e + \lambda g(e)) = 0_E.$$

   Ceci donne $(\lambda^2 + \mu^2)e = 0$. Comme e est non-nul alors $\lambda^2 + \mu^2 = 0$. Comme λ et μ sont réels alors $\lambda = \mu = 0$.

   On a démontré que :

   $$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \qquad \lambda e + \mu g(e) = 0_E \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \mu = 0.$$

   La famille $(e, g(e))$ est donc libre.

   Elle est de cardinal 2 qui est la dimension de E donc c'est une base de E.

   (b) *(1 point)* On sait que $g(e) = e$, et $g(g(e)) = -e$ car $g^2 = -\mathrm{Id}_E$, donc la matrice de g dans la base $(e, g(e))$ est :

   $$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. *(1 point)* Supposons que f admet une racine carrée g, et notons $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice de g dans la base $\mathscr{B}$.
   Comme $g^2 = f$ alors $B^2 = A$, ce qui donne :
   $$\begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
   Si $\operatorname{tr} B \neq 0$, *i.e.*, $a + d \neq 0$, alors $b = c = 0$, puis $d^2 = -1$, ce qui est impossible car d est un réel.
   Ainsi $\operatorname{tr} B = 0$, *i.e.*, $a + d = 0$. Alors $d = -a$ donc $a^2 = d^2$, ce qui est absurde car $a^2 + bc = 1$ et $d^2 + bc = -1$.
   Ceci montre que f n'admet pas de racine carrée.

Partie B. Endomorphismes nilpotents *(7 points)*

1. *(1 point)* Soit N l'ensemble des entiers naturel k tels que $f^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
   Comme f est nilpotent N est non-vide. Ainsi N est une partie non-vide de $\mathbb{N}$ donc N possède un plus petit élément, que l'on note p.
2. (a) *(1 point)* Comme p est le plus petit élément de N alors $p-1$ n'appartient pas à N et donc f^{p-1} est non-nul. Il existe donc $e \in E$ tel que $f^{p-1}(e) \neq 0_E$.
   (b) *(2 points)* Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1})$ des scalaires tels que :
   $$\lambda_0 e + \lambda_1 f(e) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(e) = 0_E.$$
   Supposons qu'il existe $k \in \{0, \dots, p-1\}$ tel que $\lambda_k \neq 0$, et notons m le plus petit de ces entiers. Alors :
   $$\lambda_m f^m(e) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(e) = 0_E \qquad \text{avec} \quad \lambda_m \neq 0.$$
   Comme $\lambda_m \neq 0$ alors :
   $$f^m(e) = -\frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m} f^{m+1}(e) - \cdots - \frac{\lambda_{p-1}}{\lambda_m} f^{p-1}(e).$$
   On applique f^{p-1-m} à cette égalité. Comme $m \leqslant p-1$ alors $p-1-m \geqslant 0$ et donc cette application est bien définie, et comme f est linéaire alors elle est linéaire. On obtient :
   $$f^{p-1}(e) = -\frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m} f^p(e) - \cdots - \frac{\lambda_{p-1}}{\lambda_m} f^{p+(p-m-2)}(e).$$
   Comme $f^p = 0$ alors $f^{p-1}(e) = 0_E$, ce qui contredit le choix de e.
   Cette contradiction montre que tous les λ_k sont nuls, et donc :
   $$\forall (\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{R}^p \qquad \lambda_0 e + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(e) = 0_E \quad \Longrightarrow \quad \lambda_0 = \cdots = \lambda_{p-1} = 0.$$
   La famille $(e, f(e), f^2(e), \dots, f^{p-1}(e))$ est donc libre.
   (c) *(1 point)* La famille $(e, f(e), f^2(e), \dots, f^{p-1}(e))$ est une famille libre de E qui est de dimension n, donc son cardinal est inférieur ou égal à n, et ainsi $p \leqslant n$.

3. *(1 point)* Soit g une racine carrée de f. Alors $g^2 = f$, et donc $g^{2p} = f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

   Ceci montre que g est nilpotent.

   Notons q son indice de nilpotence. D'après la question précédente $q \leqslant n$.

   De plus $f^{p-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$, donc $g^{2p-2} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$, et ainsi $2p-2 < q$, soit $2p-1 \leqslant q$ car $2p-2$ et q sont des entiers.

   Par transitivité $2p-1 \leqslant n$, ce qui donne $p \leqslant \frac{n+1}{2}$.

4. *(1 point)* La composée k fois de D est $D^k : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P^{(k)}. \end{array}$

   Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors P est de degré au plus n, donc $P^{(n+1)} = 0$. On en déduit :

   $$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \qquad D^{n+1}(P) = 0.$$

   Ceci montre que $D^{n+1} = 0$, donc D est nilpotent.

   Par contre $X^n \in \mathbb{R}_n[X]$ et $D^n(X^n) = n! \neq 0$, donc $D^n \neq 0$.

   Ainsi D est nilpotent d'indice $n+1$.

   Suppons que D admet une racine carrée.

   Comme D est nilpotent d'indice $n+1$ et $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$ alors d'après la question précédente :

   $$n + 1 \leqslant \frac{1}{2}(\dim \mathbb{R}_n[X] + 1) = \frac{n}{2} + 1.$$

   Ceci donne $n \leqslant 0$, c'est en contradiction avec l'hypothèse $n > 0$.

   Cette contradiction montre que D n'admet pas de racine carrée.

Partie C. En dimension 3 *(11 points)*

1. *(2 points)* Comme $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ alors $\operatorname{im} f \subseteq \ker f$.

   En effet, si $u \in \operatorname{im} f$ alors il existe $v \in E$ tel que $u = f(v)$ et donc $f(u) = f^2(v) = 0$, ce qui donne $u \in \ker f$.

   Ceci montre que $\dim \operatorname{im} f \leqslant \dim \ker f$. De plus d'après le théorème du rang :

   $$\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim E = 3.$$

   On en déduit $2 \dim \operatorname{im} f \leqslant 3$, puis $\dim \operatorname{im} f \leqslant 1$ car la dimension d'un espace vectoriel est un entier.

   Si $\dim \operatorname{im} f = 0$ alors $\operatorname{im} f = \{0_E\}$, donc $f = 0_{\mathscr{L}(E)}$, ce qui est contraire aux hypothèses. Donc :

   $$\dim \operatorname{im} f = 1 \qquad \text{puis} \qquad \dim \ker f = 2.$$

2. *(3 points)* D'après la question précédente $\operatorname{im} f$ est de dimension 1. Soit e_2 un vecteur non-nul de $\operatorname{im} f$, si bien que la famille (e_2) est une base de $\operatorname{im} f$.

   Comme $\operatorname{im} f \subseteq \ker f$ alors $e_2 \in \ker f$.

   Comme e_2 est non-nul alors la famille (e_2) est une famille libre de $\ker f$.

D'après le théorème de la base incomplète cette famille peut être complétée en une base de $\ker f$. Or $\dim \ker f = 2$ donc il existe un vecteur e_3 de E tel que la famille (e_2, e_3) est une base de $\ker f$.

Comme $e_2 \in \operatorname{im} f$ alors il existe $e_1 \in E$ tel que $f(e_1) = e_2$.

Démontrons que la famille $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E.

On commence par démontrer qu'elle est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ une famille de scalaires tels que :

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0_E. \tag{6}$$

Par application de f, qui est linéaire :

$$\lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \lambda_3 f(e_3) = 0_E.$$

Comme $e_2, e_3 \in \ker f$ alors $f(e_2) = f(e_3) = 0_E$, et comme $f(e_1) = e_2$:

$$\lambda_1 e_2 = 0_E.$$

Comme e_2 est non-nul alors $\lambda_1 = 0$, puis (6) donne :

$$\lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0_E.$$

Comme la famille (e_2, e_3) est une base de $\ker f$ alors elle est libre, et donc $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

On a démontré que :

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \qquad \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0_E \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Ceci montre que la famille (e_1, e_2, e_3) est libre. Elle est de cardinal 3 qui est la dimension de E donc c'est une base de E.

Par construction :

$$f(e_1) = e_2 \qquad f(e_2) = 0_E \qquad f(e_3) = 0_E.$$

La matrice de f dans la base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est donc $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. (a) *(1,5 points)* Comme g est une racine carrée de f alors $g^2 = f$. Comme $f^2 = 0$ alors $g^4 = f^2 = 0$. Ainsi g est nilpotent.

   Soit p son indice. D'après la question 2c de la partie B son indice est inférieur ou égal à la dimension de E, donc $p \leqslant 3$.

   Si $p \leqslant 2$ alors $g^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$, donc $f = 0_{\mathscr{L}(E)}$, ce qui est contraire aux suppositions de l'énoncé. Donc $p = 3$.

   Ainsi g est nilpotent d'indice 3.

   (b) *(1 point)* Supposons que $\ker g^2 \subseteq \ker g$ et démontrons qu'alors $\ker g^3 \subseteq \ker g^2$.

   Soit $u \in \ker g^3$. Alors $g^3(u) = 0$, donc $g^2(g(u)) = 0_E$, et $g(u) \in \ker g^2$.

   D'après la supposition ceci implique que $g(u) \in \ker g$, donc $g^2(u) = 0$, et $u \in \ker g^2$.

   Ceci montre que $\ker g^3 \subseteq \ker g^2$.

   On a démontré que si $\ker g^2 \subseteq \ker g$ alors $\ker g^3 \subseteq \ker g^2$.

(c) *(2 points)* Comme g est nilpotent d'indice 3 alors $g^3 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
Ceci montre que $\operatorname{im} g^2 \subseteq \ker g$ et $\operatorname{im} g \subseteq \ker g^2$, donc :

$$\operatorname{im} f \subseteq \ker g \qquad \text{et} \qquad \operatorname{im} g \subseteq \ker f.$$

On sait que $\operatorname{im} f$ et $\ker f$ sont de dimensions respectives 1 et 2, et $\ker g$, $\operatorname{im} g$ sont des sous-espaces vectoriels de E qui est de dimension 3, donc :

$$1 \leqslant \dim \ker g \leqslant 3 \qquad \text{et} \qquad 1 \leqslant \dim \operatorname{im} g \leqslant 3.$$

D'après le théorème du rang :

$$\dim \ker g + \dim \operatorname{im} g = 3.$$

Comme les dimensions sont des entiers alors deux cas sont possibles :

$$(\dim \ker g = 1 \quad \text{et} \quad \dim \operatorname{im} g = 2) \quad \text{ou} \quad (\dim \ker g = 2 \quad \text{et} \quad \dim \operatorname{im} g = 1).$$

Supposons que $\dim \ker g = 2$.
De façon général on a $\ker g \subseteq \ker g^2$: si $u \in \ker g$ alors $g(u) = 0_E$, puis $g^2(u) = 0$.
On a alors :

$$\ker g \subseteq \ker g^2 \qquad \text{avec} \qquad \dim \ker g = 2 \quad \text{et} \quad \dim \ker g^2 = \dim \ker f = 2.$$

Ceci implique $\ker g^2 = \ker g$, et donc d'après la question précédente $\ker g^3 \subseteq \ker g^2$.
Mais $g^3 = 0_{\mathscr{L}(E)}$, donc $\ker g^3 = E$, ce qui implique $\ker g^2 = E$, puis $g^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
Or $g^2 = f \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$, donc c'est une contradiction.
Ainsi $\dim \ker g = 1$, et par suite $\dim \operatorname{im} g = 2$.
On a donc :

$$\begin{array}{lllll} \operatorname{im} f \subseteq \ker g & \text{et} & \dim \operatorname{im} f = \dim \ker g & \text{donc} & \operatorname{im} f = \ker g \\ \operatorname{im} g \subseteq \ker f & \text{et} & \dim \operatorname{im} g = \dim \ker f & \text{donc} & \operatorname{im} g = \ker f. \end{array}$$

Il s'agit du résultat attendu.

4. *(1,5 points)* Soit $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & \frac{1}{y} \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Alors $B^2 = A$, donc l'endomorphisme g dont B est la matrice dans la base $\mathscr{B}$ vérifie $g^2 = f$, c'est une racine carrée de f.

Réciproquement, supposons que g est une racine carrée de f et notons B sa matrice dans la base $\mathscr{B}$.

D'après la question précédente $\operatorname{im} g = \ker f = \operatorname{Vect}(e_2, e_3)$ et $\ker g = \operatorname{im} f = \operatorname{Vect}(e_2)$.

Comme $\operatorname{im} g = \operatorname{Vect}(e_2, e_3)$ alors les vecteurs $g(e_1)$, $g(e_2)$ et $g(e_3)$ sont combinaisons linéaires de e_2 et e_3.

Comme $e_2 \in \ker g$ alors $g(e_2) = 0_E$.

La matrice de g dans la base $\mathscr{B}$ est donc de la forme :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & z \\ y & 0 & t \end{pmatrix} \qquad \text{où} \quad (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$$

Comme $g^2 = f$ alors $B^2 = A$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ zy & 0 & zt \\ ty & 0 & t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit $t = 0$, puis $zy = 1$ donc $y \neq 0$ et $z = \frac{1}{y}$. Ainsi la matrice de g dans la base $\mathscr{B}$ est bien :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & \frac{1}{y} \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*.$$

Finalement les racines carrées de f sont les endomorphismes de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice B ci-dessus.

Partie D. Racines carrées d'un endomorphisme unipotent *(5 points)*

1. *(1 point)* La fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ en 0 donc d'après la formule de Taylor-Young elle admet un développement limité à l'ordre $n-1$ en 0.
   Ce développement limité est de la forme :
   $$\sqrt{1+x} \underset{(0)}{=} P_n(x) + o(x^{n-1}) \tag{7}$$
   où P_n est un polynôme de degré au plus $n-1$.
2. *(2 points)* Après mise au carré l'égalité (7) donne
   $$1 + x \underset{(0)}{=} P_n^2(x) + P_n(x) o\left(x^{n-1}\right) + o\left(x^{2n-2}\right).$$
   Comme $P_n(x) \underset{(0)}{=} o(1)$ alors :
   $$1 + x \underset{(0)}{=} P_n^2(x) + o\left(x^{n-1}\right).$$
   Comme P_n est un polynôme alors $P_n^2 - 1 - X$ est un polynôme, que l'on peut noter A. Ainsi :
   $$A(x) \underset{(0)}{=} o\left(x^{n-1}\right).$$
   Ceci est le développement limité de la fonction $x \mapsto A(x)$ au voisinage de 0. Par unicité du développement limité les coefficients de degré 0 à $n-1$ de A sont nuls, donc A est multiple de X^n. Il existe alors $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A = X^n Q$, ce qui donne comme demandé :
   $$P_n^2 = 1 + X + X^n Q_n.$$

3. *(2 points)* Soit $H = A - I_n$. Comme A et I_n sont les matrices respectivement de f et Id_E dans la base $\mathscr{B}$ alors H est la matrice de $h = f - \mathrm{Id}_E$ dans la base $\mathscr{B}$.

   Comme f est unipotent alors h est nilpotent, et donc H est nilpotente.

   Comme E est de degré n alors l'indice de nilpotence de H est inférieur ou égal à n, donc $H^n = 0$.

   En appliquant l'égalité polynomiale de la question précédente à la matrice H on obtient :

$$(P_n(H))^2 = I_n + H + H^n Q_n(H) = I_n + H = A.$$

   Ainsi la matrice $P_n(H)$ est une racine carrée de A.

   L'endomorphisme g associé à cette matrice et donc une racine carrée de f.

   Ainsi f admet une racine carrée.

   On a démontré que tout endomorphisme unipotent admet une racine carrée.

4. *(0 point)* Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) On calcule $H = A - I_3$ et ses puissances :

$$H = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad H^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad H^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3.$$

   La matrice H est donc nilpotente, et A est unipotente.

   (b) Le développement limité de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$ à l'ordre 2 en 0 est :

$$\sqrt{1+x} \underset{(0)}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o\big(x^2\big).$$

   Ceci donne $P_3 = 1 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2$.

   (c) D'après la question (3) La matrice $B = P_3(H)$ est une racine carrée de A. On calcule :

$$B = I_3 + \frac{1}{2}H - \frac{1}{8}H^2 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 5 & 13 & -4 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

   On peut vérifier que $B^2 = A$.