Concours blanc
Corrigé de l'épreuve de mathématiques

Problème 1. *(30 points)*

Partie A. Le problème de Bâle *(14 points)*

1. (a) *(1 point)* On obtient $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \,\mathrm{d}t = \Big[\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$

(b) *(2 points)* La fonction cosinus est positive sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \cos^n t \geqslant 0.$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

Ceci montre que $I_n \geqslant 0$.
Supposons que $I_n = 0$. La fonction $t \mapsto \cos^n t$ est continue et positive sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc par théorème de positivité si $I_n = 0$ alors elle est nulle sur ce segment. Ceci est faux car par exemple $\cos^n 0 = 1$.
Cette contradiction montre que $I_n > 0$.

(c) *(2 points)* Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque :

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos^{n+1} t \,\mathrm{d}t.$$

Posons $u'(t) = \cos t$ et $v(t) = \cos^{n+1} t$, puis $u(t) = \sin t$ et $v'(t) = -(n+1)\sin t \cos^n t$.
Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Par intégration par parties :

$$I_{n+2} = \Big[\sin t \cos^{n+1} t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\sin^2 t \cos^n t \,\mathrm{d}t.$$

Par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= 0 + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos^2 t\right) \cos^n t \,\mathrm{d}t \\ &= (n+1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} t \,\mathrm{d}t\right) \\ &= (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}. \end{aligned}$$

On en déduit $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$, puis comme convenu $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

2. (a) *(1 point)* La fonction sinus est deux fois dérivable, de dérivée seconde $\sin'' = -\sin$. La fonction sinus est positive sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc sa dérivée seconde est négative et par propriété la fonction sin est concave sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(b) *(1 point)* Une fonction concave est au-dessus de toutes ses cordes.
Les points d'abscisses 0 et $\frac{\pi}{2}$ de la fonction sinus ont pour coordonnées $(0,0)$ et $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$, donc la corde reliant ces deux points admet pour équation :

$$y = \frac{2}{\pi}x.$$

Comme la fonction sinus est concave sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ alors sa courbe représentative est au-dessus de toutes ses cordes :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \sin t \geqslant \frac{2}{\pi}t.$$

Ceci donne l'inégalité demandée :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad t \leqslant \frac{\pi}{2}\sin t.$$

(c) *(1 point)* D'après l'inégalité précédente, comme t est positif sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad t^2 \leqslant \frac{\pi^2}{4}\sin^2 t.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction cosinus est positive sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad 0 \leqslant t^2\cos^{2n} t \leqslant \frac{\pi^2}{4}\sin^2 t\cos^{2n} t.$$

Par croissance de l'intégrale :

$$0 \leqslant \int_0^{\pi 2} t^2\cos^{2n} t\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi^2}{4}\sin^2 t\cos^{2n} t\,\mathrm{d}t.$$

Par linéarité de l'intégrale :

$$0 \leqslant J_n \leqslant \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos^2 t\right)\cos^{2n} t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{4}(I_{2n} - I_{2n+2}).$$

Il s'agit de l'inégalité attendue.

(d) *(1 point)* On a justifié que I_{2n} est strictement positive donc en divisant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant \frac{J_n}{I_{2n}} \leqslant \frac{\pi^2}{4}\left(1 - \frac{I_{2n+2}}{I_{2n}}\right).$$

La relation de la question (1c) donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant \frac{J_n}{I_{2n}} \leqslant \frac{\pi 2}{4}\left(1 - \frac{2n+1}{2n+2}\right) = \frac{\pi^2}{4(2n+2)}.$$

Comme $\dfrac{\pi^2}{4(2n+2)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors par théorème d'encadrement $\dfrac{J_n}{I_{2n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

3. (a) *(1 point)* Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque que :

$$I_{2n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \times \cos^{2n+2} t \, \mathrm{d}t.$$

Posons $u'(t) = 1$ et $v(t) = \cos^{2n+2} t$, puis $u(t) = t$ et $v'(t) = -(2n+2)\sin t \cos^{2n+1} t$.
Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Par intégration par parties :

$$I_{2n+2} = \left[t \cos^{2n+2} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} t(2n+2) \sin t \cos^{2n+1} t \, \mathrm{d}t$$

Comme $\left[t \cos^{2n+2} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$ alors par linéarité de l'intégrale on obtient, comme souhaité :

$$I_{2n+2} = (2n+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \cos^{2n+1} t \, \mathrm{d}t.$$

(b) *(2 points)* Soit $n \in \mathbb{N}$. La relation précédente donne :

$$\frac{I_{2n+2}}{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t \times \sin t \cos^{2n+1} t \, \mathrm{d}t.$$

Posons $u'(t) = 2t$ et $v(t) = \sin t \cos^{2n+1} t$, puis $u(t) = t^2$ et :

$$\begin{aligned} v'(t) &= \cos^{2n+2} t - (2n+1) \sin^2 t \cos^{2n} t \\ &= \cos^{2n+2} t - (2n+1)\left(1 - \cos^2 t\right) \cos^{2n} t \\ &= (2n+2) \cos^{2n+2} t - (2n+1) \cos^{2n} t \end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Par intégration par parties et linéarité de l'intégrale :

$$\frac{I_{2n+2}}{n+1} = \left[t^2 \sin t \cos^{2n+1} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - (2n+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n+2} t \, \mathrm{d}t + (2n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n} t \, \mathrm{d}t.$$

Comme $\left[t^2 \sin t \cos^{2n+1} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$ alors on obtient bien :

$$\frac{I_{2n+2}}{n+1} = (2n+1) J_n - (2n+2) J_{n+1}.$$

On sait que I_{2n+2} n'est pas nul. En divisant par $(n+1) I_{2n+2}$ on obtient :

$$\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n+1} \frac{J_n}{I_{2n+2}} - 2 \frac{J_{n+1}}{I_{2n+2}}.$$

La relation de la question (1c) donne $I_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} I_{2n}$, donc en remplaçant dans le premier terme de la somme :

$$\frac{1}{(n+1)^2} = 2 \frac{J_n}{I_{2n}} - 2 \frac{J_{n+1}}{I_{2n+2}}.$$

La relation attendue en découle :

$$2\left(\frac{J_n}{I_{2n}} - \frac{J_{n+1}}{I_{2n+2}}\right) = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

4. *(1 point)* La relation de la question précédente donne :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{1}{k^2} = 2\left(\frac{J_{k-1}}{I_{2(k-1)}} - \frac{J_k}{I_{2k}}\right).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par somme :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} 2\left(\frac{J_{k-1}}{I_{2(k-1)}} - \frac{J_k}{I_{2k}}\right).$$

Par linéarité de la somme puis télescopage :

$$S_n = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{J_{k-1}}{I_{2(k-1)}} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{J_k}{I_{2k}} = 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{J_k}{I_{2k}} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{J_k}{I_{2k}} = 2\frac{J_0}{I_0} - 2\frac{J_n}{I_{2n}}.$$

D'après la question (2d) : $\dfrac{J_n}{I_{2n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par somme : $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\dfrac{J_0}{I_0}$.

On sait que $I_0 = \frac{\pi}{2}$. On calcule :

$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24}.$$

On en déduit que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $2 \times \dfrac{\pi^3}{24} \times \dfrac{2}{\pi} = \dfrac{\pi^2}{6}$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi^2}{6}.$$

Partie B. Le dilogarithme *(16 points)*

1. *(1,5 points)* Par définition : $\forall t \in]0,1[\quad f(t) = -\dfrac{\ln(1-t)}{t}$.

   La fonction logarithme népérien est continue, donc par quotient et composition la fonction f est continue sur l'intervalle $]0,1[$.

   L'équivalence $\ln(1-t) \underset{0}{\sim} -t$ montre que $f(t) \underset{0}{\sim} 1$, donc $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 1 = f(0)$.

   La fonction f est donc continue en 0.

   Finalement f est continue sur $[0,1[$ tout entier.

2. (a) *(1,5 points)* La fonction f est continue, donc le théorème fondamental de l'analyse montre que la fonction Li_2 est bien définie sur $[0,1[$, c'est la primitive de f qui s'annule en 0.

   Ainsi la fonction Li_2 est dérivable de dérivée $\mathrm{Li}_2' = f$.

   Soit $t \in]0,1[$. Alors $0 < 1-t < 1$ donc $\ln(1-t) < 0$ puis $f(t) > 0$.

   De plus $f(0) = 1 > 0$. Donc f est strictement positive et Li_2 est strictement croissante.

(b) *(1 point)* L'inégalité $f(t) \leqslant 1 - \ln(1-t)$ est vraie pour $t = 0$ car $f(0) = 1$.
Pour $t \in]0,1[$ on raisonne par équivalences :

$$\begin{aligned} f(t) \leqslant 1 - \ln(1-t) \quad &\iff \quad -\frac{\ln(1-t)}{t} \leqslant 1 - \ln(1-t) \\ &\iff \quad (t-1)\ln(1-t) \leqslant t \qquad \text{car} \quad t > 0 \\ &\iff \quad \ln(1-t) \geqslant \frac{t}{t-1} \qquad \text{car} \quad t-1 < 0 \end{aligned}$$

Posons $g(t) = \ln(1-t) - \frac{t}{t-1}$. Cette fonction est définie sur $[0,1[$, dérivable par composition, de dérivée $g'(t) = \frac{t}{(1-t)^2}$.
Cette dérivée est positive sur $[0,1[$ donc g est croissante.
Comme $g(0) = 0$ alors g est positive sur $[0,1[$, et donc :

$$\forall t \in]0,1[\qquad f(t) \leqslant 1 - \ln(1-t).$$

Finalement l'inégalité est démontrée pour tout $t \in [0,1[$.

(c) *(1 point)* Soit $x \in [0,1[$. On vient de démontrer :

$$\forall t \in [0,1[\qquad f(t) \leqslant 1 - \ln(1-t).$$

Par croissance de l'intégrale, comme $0 \leqslant x$:

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x (1 - \ln(1-t))\,\mathrm{d}t.$$

Par définition de Li_2 et linéarité de l'intégrale :

$$\mathrm{Li}_2(x) \leqslant x - \int_0^x \ln(1-t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour calculer l'intégrale on pose $u(t) = (t-1)$ et $v(t) = \ln(1-t)$.
Ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivée $u'(t) = 1$ et $v'(t) = -\frac{1}{1-t}$.
Par intégration par parties :

$$\int_0^x \ln(1-t)\,\mathrm{d}t = \Big[(t-1)\ln(1-t)\Big]_0^x - \int_0^x 1\,\mathrm{d}t = (x-1)\ln(1-x) - x.$$

On a donc démontré :

$$\forall x \in [0,1[\qquad \mathrm{Li}_2(x) \leqslant 2x + (1-x)\ln(1-x).$$

(d) *(1 point)* Par croissances comparées : $\lim\limits_{t \to 0} t\ln(t) = 0$.
Ceci donne : $\lim\limits_{x \to 1} (2x - (1-x)\ln(1-x)) = 2$.
La fonction $x \mapsto 2x + (1-x)\ln(1-x)$ admet une limite finie en 1 donc elle est majorée au voisinage de 1.
D'après la question précédente la fonction Li_2 est majorée au voisinage de 1.
Or elle est croissante sur l'intervalle $[0,1[$.
D'après le théorème de la limite monotone, comme Li_2 est croissante majorée au voisinage de 1 alors elle admet une limite finie en 1.

3. (a) *(1 point)* Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0,1[$ on pose :

$$h(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k} + \ln(1-t) + \int_0^t \frac{u^n}{1-u}\,\mathrm{d}u.$$

La fonction $u \mapsto \frac{u^n}{1-u}$ est bien définie sur le segment $[0,t]$ car $t < 1$, et elle est continue.
D'après le théorème fondamental la fonction $t \mapsto \displaystyle\int_0^t \frac{u^n}{1-u}\,\mathrm{d}u$ est dérivable sur $[0,1[$, de dérivée $t \mapsto \frac{t^n}{1-t}$.
Par somme la fonction h est dérivable sur $[0,1[$, de dérivée :

$$h'(t) = \sum_{k=1}^{n} t^{k-1} - \frac{1}{1-t} + \frac{t^n}{1-t}.$$

Comme $t \neq 1$:

$$h'(t) = \frac{1-t^n}{1-t} - \frac{1}{1-t} + \frac{t^n}{1-t} = 0.$$

Comme $[0,1[$ est un intervalle alors h est constante.
Comme $h(0) = 0$ alors h est nulle et donc l'égalité souhaitée est démontrée :

$$\forall t \in [0,1[\qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k} = -\ln(1-t) - \int_0^t \frac{u^n}{1-u}\,\mathrm{d}u.$$

(b) *(1 point)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,1[$. D'après la question précédente :

$$-\ln(1-t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k} = \int_0^t \frac{u^n}{1-u}\,\mathrm{d}u.$$

Pour $u \in [0,t]$, comme $0 \leqslant u \leqslant t < 1$ alors $0 < 1-t \leqslant 1-u \leqslant 1$, ce qui donne :

$$\forall u \in [0,t] \qquad 0 \leqslant \frac{u^n}{1-u} \leqslant \frac{u^n}{1-t}.$$

Par croissance de l'intégrale, sachant que $0 \leqslant t$:

$$0 \leqslant \int_0^t \frac{u^n}{1-u}\,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^t \frac{u^n}{1-t}\,\mathrm{d}u.$$

On calcule :

$$\int_0^t \frac{u^n}{1-t}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{1-t}\left[\frac{u^{n+1}}{n+1}\right]_0^t = \frac{t^{n+1}}{(n+1)(1-t)} \leqslant \frac{t^{n+1}}{1-t}.$$

Ceci donne donc :

$$0 \leqslant -\ln(1-t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k} \leqslant \frac{t^{n+1}}{1-t}.$$

Ce résultat est bien valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,1[$.

(c) *(1 point)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour tout $t \in]0,1[$, comme $t > 0$ l'inégalité précédente donne :

$$0 \leqslant -\frac{\ln(1-t)}{t} - \sum_{k=1}^{n} \frac{t^{k-1}}{k} \leqslant \frac{t^n}{1-t}.$$

Ceci donne :

$$\forall t \in]0,1[\qquad 0 \leqslant f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{t^{k-1}}{k} \leqslant \frac{t^n}{1-t}.$$

Pour $t = 0$, comme $f(0) = 1$ et $\sum_{k=1}^{n} \frac{t^{k-1}}{k} = 1 + \frac{t}{2} + \cdots = 1$, alors l'inégalité ci-dessus est toujours valable.
Soit $x \in [0,1[$. L'inégalité ci-dessus est valable pour tout $t \in [0,x]$, donc par croissance et linéarité de l'intégrale :

$$0 \leqslant \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} \int_0^x \frac{t^{k-1}}{k}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

On calcule :

$$\forall k = 1, \ldots, n-1 \qquad \int_0^x \frac{t^{k-1}}{k}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^k}{k^2}\right]_0^x = \frac{x^k}{k^2}.$$

De plus on a démontré dans la question précédente que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \forall t \in [0,1[\qquad \int_0^t \frac{u^n}{1-u}\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{t^{n+1}}{1-t}.$$

On en déduit que :

$$\forall k = 1, \ldots, n \qquad \forall x \in [0,1[\qquad \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

L'inégalité (1) donne par transitivité :

$$0 \leqslant \mathrm{Li}_2(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k^2} \leqslant \frac{x^{n+1}}{1-x}. \tag{2}$$

Il s'agit bien du résultat attendu, il est valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1[$.

(d) *(2 points)* Soit $x \in [0,1[$. Alors $|x| < 1$ donc $x^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Par théorème d'encadrement l'inégalité (2) montre que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Li}_2(x).$$

Cette limite est valable pour tout $x \in [0,1[$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La partie gauche de l'inégalité (2) montre que :

$$\forall x \in [0,1[\qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k^2} \leqslant \mathrm{Li}_2(x). \tag{3}$$

Par linéarité de la limite :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k^2} \xrightarrow[x \to 1]{} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

De plus la fonction Li_2 admet une limite finie lorsque x tend vers 1, donc par théorème de comparaison l'inégalité (3) donne :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \lim_{x \to 1} \mathrm{Li}_2(x). \tag{4}$$

Cette inégalité est valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(e) *(1 point)* soit $x \in [0,1[$. La partie droite de l'inégalité (2) donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{Li}_2(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{1-x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k^2}.$$

Comme $x \in [0,1[$ alors $0 \leqslant x < 1$ et donc pour tout $k = 1, \ldots, n$: $\quad 0 \leqslant \dfrac{x^k}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k^2}$.
Par somme :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{Li}_2(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{1-x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Comme $x^{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ alors par théorème de comparaison :

$$\mathrm{Li}_2(x) \leqslant \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

D'après le résultat de la partie A :

$$\mathrm{Li}_2(x) \leqslant \frac{\pi^2}{6}.$$

Cette inégalité est valable pour tout $x \in [0,1[$, donc la fonction Li_2 est majorée par $\dfrac{\pi^2}{6}$ sur $[0,1[$.

(f) *(1 point)* L'inégalité (4) donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \lim_{x \to 1} \mathrm{Li}_2(x).$$

Par théorème de comparaison, lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \lim_{x \to 1} \mathrm{Li}_2(x) \qquad \textit{i.e.,} \qquad \frac{\pi^2}{6} \leqslant \lim_{x \to 1} \mathrm{Li}_2(x).$$

D'après la question précédente :

$$\forall x \in [0,1[\qquad \mathrm{Li}_2(x) \leqslant \frac{\pi^2}{6}.$$

Par théorème de comparaison, lorsque x tend vers 1 :

$$\lim_{x\to 1} \mathrm{Li}_2(x) \leqslant \frac{\pi^2}{6}.$$

Par antisymétrie on en déduit :

$$\lim_{x\to 1} \mathrm{Li}_2(x) = \frac{\pi^2}{6}.$$

4. (a) *(1 point)* L'équivalence $\ln(1-x) \underset{(0)}{\sim} -x$ donne :

$$\ln(x)\ln(1-x) \underset{(0)}{\sim} -x\ln x.$$

Par croissances comparées $\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$ donc par équivalence :

$$\ln(x)\ln(1-x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

(b) *(1 point)* Pour tout $x \in]0,1[$ on pose :

$$\varphi(x) = \mathrm{Li}_2(x) + \mathrm{Li}_2(1-x) + \ln(x)\ln(1-x).$$

Si $x \in]0,1[$ alors $(1-x) \in]0,1[$, donc la fonction φ est bien définie sur $]0,1[$.
De plus la fonction Li_2 est dérivable sur $]0,1[$ de dérivée f, donc par composition, produit et somme la fonction φ est dérivable sur $]0,1[$. Sa dérivée est :

$$\forall x \in]0,1[\quad \varphi'(x) = f(x) - f(1-x) + \frac{1}{x}\ln(1-x) - \frac{1}{1-x}\ln(x).$$

On calcule :

$$\varphi'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(x)}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(x)}{1-x} = 0.$$

Comme $]0,1[$ est un intervalle alors φ est constante. Il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]0,1[\qquad \varphi(x) = K.$$

La fonction Li_2 est dérivable sur $[0,1[$ donc continue sur cet intervalle, et ainsi :

$$\lim_{x\to 0} \mathrm{Li}_2(x) = \mathrm{Li}_2(0) = 0.$$

Comme $\lim_{x\to 1} \mathrm{Li}_2(x) = \frac{\pi^2}{6}$ alors par composition :

$$\lim_{x\to 0} \mathrm{Li}_2(1-x) = \frac{\pi^2}{6}.$$

On a justifié que $\lim_{x\to 0} \ln(x)\ln(1-x) = 0$, donc par somme :

$$\lim_{x\to 0} \varphi(x) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Comme φ est constante égale à K sur $]0,1[$ alors $\lim_{x\to 0} \varphi(x) = K$, et donc par unicité de la limite $K = \dfrac{\pi^2}{6}$, ce qui montre bien que :

$$\forall x \in]0,1[\qquad \mathrm{Li}_2(x) + \mathrm{Li}_2(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(x)\ln(1-x).$$

(c) *(1 point)* Pour $x = \frac{1}{2}$, comme $x \in]0,1[$ alors :

$$2\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{6} - \ln^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{6} - \ln^2 2.$$

Dans la question (3d) on a prouvé que :

$$\forall x \in]0,1[\qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Li}_2(x).$$

En particulier pour $x = \frac{1}{2}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k k^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right).$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k k^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\ln^2 2}{2}.$$

Problème 2. Endomorphismes de trace nulle *(29 points)*

Partie A. Généralités *(8 points)*

1. *(1 point)* L'application trace $\operatorname{tr} : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ M & \longmapsto & \operatorname{tr} M \end{array}$ est linéaire.

   Comme son ensemble d'arrivée est $\mathbb{K}$ alors c'est une forme linéaire.

   Il existe au moins une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de trace non-nulle, par exemple la matrice identité dont la trace vaut n. Donc l'application trace est une forme linéaire non-nulle.

   Par définition $\mathcal{H}_n(\mathbb{K})$ est le noyau de cette forme linéaire non-nulle, donc $\mathcal{H}_n(\mathbb{K})$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et *a fortiori* un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

   Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension n^2 alors $\mathcal{H}_n(\mathbb{K})$ est de dimension $n^2 - 1$:

   $$\dim \mathcal{H}_n(\mathbb{K}) = n^2 - 1.$$

   De plus $\operatorname{tr}(I_n) = n$. Comme n est non-nul alors I_n n'appartient pas à $\mathcal{H}_n(\mathbb{K})$.

   Par théorème ceci impose que $\operatorname{Vect}(I_n)$ est un supplémentaire de $\mathcal{H}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

   $$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{H}_n(\mathbb{K}) \oplus \operatorname{Vect}(I_n).$$

2. *(1 point)* La base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la famille des matrices $E_{i,j}$ pour i et j allant de 1 à n.

   On remarque que $\mathcal{G}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des matrices $E_{i,j}$ telles que $i \neq j$:

   $$\mathcal{G}_n(\mathbb{K}) = \operatorname{Vect}(E_{i,j} \mid 1 \leqslant i \neq j \leqslant n).$$

   Ceci justifie que $\mathcal{G}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

   Les matrices $E_{i,j}$ avec $i \neq j$ sont linéairement indépendantes car elles appartiennent à la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, donc elles forment une base de $\mathcal{G}_n(\mathbb{K})$.

   Elles sont au nombre de $n^2 - n$, donc $\mathcal{G}_n(\mathbb{K})$ est de dimension $n^2 - n$.

   $$\dim \mathcal{G}_n(\mathbb{K}) = n^2 - n.$$

3. *(1 point)* L'espace vectoriel $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des matrices $E_{i,i}$ pour i allant de 1 à n.

   La base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, que l'on note $\mathcal{B}_0$, peut donc être séparée de la façon suivante :

   $$\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \qquad \text{avec} \qquad \begin{array}{l} \mathcal{B}_1 = \{E_{i,j} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n \quad \text{et} \quad i \neq j\} \\ \mathcal{B}_2 = \{E_{i,j} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n \quad \text{et} \quad i = j\} \end{array}$$

   Cette union est disjointe.

   De plus $\mathcal{G}_n(\mathbb{K}) = \operatorname{Vect}(\mathcal{B}_1)$ et $\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = \operatorname{Vect}(\mathcal{B}_2)$.

   Par théorème de la base adaptée $\mathcal{G}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

   $$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{G}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$$

4. *(1 point)* La matrice I_n est diagonale et $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donc :
$$\mathrm{Vect}\,(I_n) \subseteq \mathcal{D}_n(\mathbb{K}).$$
On en déduit :
$$\mathcal{H}_n(\mathbb{K}) + \mathrm{Vect}\,(I_n) \subseteq \mathcal{H}_n(\mathbb{K}) + \mathcal{D}_n(\mathbb{K}).$$
On sait que $\mathcal{H}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{Vect}\,(I_n)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $\mathcal{H}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Donc :
$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{H}_n(\mathbb{K}) + \mathrm{Vect}\,(I_n) \subseteq \mathcal{H}_n(\mathbb{K}) + \mathcal{D}_n(\mathbb{K}) \subseteq \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$
Par double inclusion : $\mathcal{H}_n(\mathbb{K}) + \mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
D'après la formule de Grassmann :
$$\dim\left(\mathcal{H}_n(\mathbb{K}) + \mathcal{D}_n(\mathbb{K})\right) = \dim\left(\mathcal{H}_n(\mathbb{K})\right) + \dim\left(\mathcal{D}_n(\mathbb{K})\right) - \dim\left(\mathcal{H}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{D}_n(\mathbb{K})\right).$$
Ceci donne :
$$n^2 = n^2 - 1 + n - \dim\left(\mathcal{H}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{D}_n(\mathbb{K})\right)$$
Donc :
$$\dim\left(\mathcal{H}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{D}_n(\mathbb{K})\right) = n - 1.$$
On aurait aussi pu justifier que la famille $(E_{i,i} - E_{n,n} \mid i = 1, \ldots, n-1)$ est une base de cette intersection.

5. *(1 point)* Comme E est un espace vectoriel de dimension finie alors il admet une base. On en choisit une que l'on appelle $\mathcal{B}$.
On sait que l'application :
$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ f &\longmapsto M_{\mathcal{B}}(f) \end{aligned}$$
est un isomorphisme.
Pour tout endomorphisme f de E, la trace de f est la trace de sa matrice dans la base $\mathcal{B}$, donc :
$$\mathrm{tr}\, f = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{tr}(M_{\mathcal{B}}(f)) = 0.$$
Ceci montre que $\mathcal{H}_n(\mathbb{K})$ est l'image de H_n par l'isomorphisme $M_{\mathcal{B}}$.
Un isomorphisme envoie un sous-espace vectoriel sur un sous-espace vectoriel, et il conserve la dimension.
Donc H_n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $n^2 - 1$.

6. (a) *(2 points)* Soit u un vecteur non-nul de E. Comme la famille $(u, f(u))$ est liée alors il existe deux scalaires α et β non tous les deux nuls tels que :
$$\alpha u + \beta f(u) = 0_E.$$
Si $\beta = 0$ alors $\alpha u = 0_E$, ce qui impose $\alpha = 0$ car u est non-nul. Ceci est absurde car α et β sont supposés non tous les deux nuls. Donc β est non-nul, et en posant $\lambda_u = -\frac{\alpha}{\beta}$ on obtient :
$$\exists \lambda_u \in E \qquad f(u) = \lambda_u u.$$

Ceci est valable pour tout vecteur u non-nul de E, et aussi pour $u = 0_E$ car il suffit de poser $\lambda_0 = 0_{\mathbb{K}}$.
Démontrons que λ_u ne dépend pas de u.
On fixe un vecteur u non-nul de E et on démontre que pour tout $v \in E$: $\lambda_v = \lambda_u$.
Soit v un vecteur de E. Alors $u + v$ est aussi un vecteur de E donc il existe deux scalaires λ_v et λ_{u+v} tels que :

$$f(v) = \lambda_v v \qquad f(u+v) = \lambda_{u+v}(u+v).$$

Supposons d'abord que u et v sont linéairement indépendants. Alors par linéarité de f :

$$f(u+v) = f(u) + f(v) = \lambda_u u + \lambda_v v \qquad \text{et} \qquad f(u+v) = \lambda_{u+v} u + \lambda_{u+v} v.$$

Ceci donne :

$$(\lambda_u - \lambda_{u+v})u + (\lambda_v - \lambda_{u+v})v = 0_E.$$

Comme les vecteurs u et v sont linéairement indépendants alors :

$$\lambda_u - \lambda_{u+v} = \lambda_v - \lambda_{u+v} = 0_{\mathbb{K}}.$$

Ceci montre que $\lambda_v = \lambda_u$.
Supposons maintenant que u et v sont liés. Comme u est non-nul alors il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $v = \alpha u$.
Par linéarité de f :

$$f(v) = \alpha f(u) \qquad \text{donc} \qquad \lambda_v v = \alpha \lambda_u u \qquad \text{puis} \qquad \lambda_v \alpha u = \alpha \lambda_u u$$

Ceci donne $\alpha(\lambda_u - \lambda_u)u = 0_E$, et comme u est non-nul alors $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$ ou $\lambda_v = \lambda_u$.
Si $\alpha = 0$ alors $v = 0_E$, donc on a bien $f(v) = \lambda_u v$.
Sinon on obtient $\lambda_v = \lambda_u$.
On a démontré que pour tout $v \in E$: $\quad f(v) = \lambda_u v$.
Donc f est une homothétie.

(b) *(1 point)* Soit $f \in H_n$, *i.e.,* f est un endomorphisme de E de trace nulle.
On raisonne par contraposée en supposant que pour tout $u \in E$ la famille $(u, f(u))$ est liée.
D'après la question précédente f est une homothétie, *i.e.,* il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda \mathrm{Id}_E$.
La matrice de f dans une base quelconque de E est alors λI_n, donc :

$$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(\lambda I_n) = \lambda n.$$

Comme $\mathrm{tr}(f) = 0$ et n est non-nul ceci implique que $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$, donc f est l'endomorphisme nul de E.
Par contraposée, si f n'est pas l'endomorphisme nul de E alors il existe $u \in E$ tel que la famille $(u, f(u))$ est libre.

Partie B. Première caractérisation *(12 points)*

1. *(1 point)* Si $n = 1$ alors E est de dimension 1.
   Soit f un endomorphisme de E. Alors sa matrice est de taille $(1, 1)$, donc f est une homothétie, *i.e.,* f est de la forme $u \mapsto \lambda u$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
   La trace de f est donc $\operatorname{tr}(f) = \lambda$, donc $f \in H_1$ si et seulement si $\lambda = 0$, ce qui montre que $H_1 = \left\{0_{\mathcal{L}(E)}\right\}$.
2. (a) *(1 point)* Comme f est un élément non-nul de H_2 alors d'après la question (6b) il existe un vecteur u de E tel que la famille $(u, f(u))$ est libre.
   Comme $n = 2$ alors E est de dimension 2 donc la famille $(u, f(u))$ est libre maximale, et par théorème c'est une base de E.
   (b) *(1 point)* Le vecteur $f(f(u))$ appartient à E et la famille $(u, f(u))$ est une base de E donc il existe deux scalaires α et β tels que $f(f(u)) = \alpha u + \beta f(u)$.
   De plus les coordonnées de $f(u)$ dans la base $(u, f(u))$ sont $(0, 1)$, donc la matrice de f dans cette base est :
   $$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}.$$
   La trace d'un endomorphisme ne dépend pas de la base choisie pour le représenter donc :
   $$\operatorname{tr}(f) = \operatorname{tr}(M_{\mathcal{B}}(f)) = \beta.$$
   Comme f est de trace nulle car il appartient à H_2 alors $\beta = 0$, donc :
   $$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Cette matrice appartient bien à $\mathcal{G}_2(\mathbb{K})$ car sa diagonale est nulle.
3. (a) *(1 point)* Comme f est un élément non-nul de H_n alors d'après la question (6b) il existe un vecteur u de E tel que la famille $(u, f(u))$ est libre.
   Par le théorème de la base incomplète il existe des vecteurs $e_3, \ldots, e_n$ tels que la famille $(u, f(u), e_3, \ldots, e_n)$ est une base de E.
   (b) *(1 point)* Les coordonnées de $f(u)$ dans cette base sont $(0, 1, 0, \ldots, 0)$ donc la matrice de f dans cette base est :
   $$M_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & a_{1,2} & \cdots\cdots & a_{1,n} \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$
   où $a_{1,2}, \ldots, a_{1,n}$ sont des scalaires et A' est une matrice de taille $(n-1, n-1)$.
   La trace de f est la trace de cette matrice, donc :
   $$\operatorname{tr} f = 0 + \operatorname{tr}(A')$$
   Comme f appartient à H_n alors $\operatorname{tr}(f) = 0$, donc $\operatorname{tr}(A') = 0$, et ainsi $A' \in \mathcal{H}_{n-1}(\mathbb{K})$.

(c) *(1 point)* On sait que $\mathcal{B} = (u, f(u), e_3, \dots, e_n)$ est une base de E, et on a posé $G = \text{Vect}\,(u)$, $F = \text{Vect}\,(f(u), e_3, \dots, e_n)$.
D'après le théorème de la base adaptée F et G sont supplémentaires dans E, et on peut ajouter que (u) est une base de G, $(f(u), e_3, \dots, e_n)$ est une base de F.

(d) *(2 points)* Comme p est le projecteur de E sur F parallèlement à G alors :

$$\forall v \in G \quad p(v) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall v \in F \quad p(v) = v.$$

Ceci donne :

$$p(u) = 0_E \qquad p(f(u)) = f(u) \qquad \forall i = 3, \dots, n \quad p(e_i) = e_i. \tag{5}$$

Notons $(a_{i,j})_{2 \leqslant i,j \leqslant n}$ les coefficients de A', si bien que :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots\cdots\cdots & a_{1,n} \\ 1 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n,2} & \cdots\cdots\cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Alors par définition de la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} & f(f(u)) = a_{1,2}u + a_{2,2}f(u) + a_{3,2}e_3 + \cdots a_{n,2}e_n \\ \forall i = 3, \dots, n \qquad & f(e_i) = a_{1,i}u + a_{2,i}f(u) + a_{3,i}e_3 + \cdots a_{n,i}e_n \end{aligned}$$

Par linéarité de p et d'après les formules (5) :

$$\begin{aligned} & p \circ f(u) = f(u) \\ & p \circ f(f(u)) = a_{2,2}f(u) + a_{3,2}e_3 + \cdots a_{n,2}e_n \\ \forall i = 3, \dots, n \qquad & p \circ f(e_i) = a_{2,i}f(u) + a_{3,i}e_3 + \cdots a_{n,i}e_n \end{aligned}$$

Ceci montre que la matrice de $p \circ f$ dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$M_{\mathcal{B}}(p \circ f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ 1 & a_{2,2} & \cdots\cdots\cdots & a_{2,n} \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n,2} & \cdots\cdots\cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\ \hline 1 & \\ 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{array}\right).$$

(e) *(1 point)* On rappelle que $F = \text{Vect}\,(f(u), e_3, \ldots, e_n)$.
On a vu dans la question précédente que :

$$\begin{aligned} p \circ f(f(u)) &= a_{2,2} f(u) + a_{3,2} e_3 + \cdots a_{n,2} e_n \\ \forall i = 3, \ldots, n \qquad p \circ f(e_i) &= a_{2,i} f(u) + a_{3,i} e_3 + \cdots a_{n,i} e_n \end{aligned}$$

Ceci montre que :

$$p \circ f(f(u)) \in F \qquad \text{et} \qquad \forall i = 3, \ldots, n \quad p \circ f(e_i) \in F.$$

Comme F est un sous-espace vectoriel de E alors :

$$\text{Vect}\,(p \circ f(f(u)), p \circ f(e_3), \ldots, p \circ f(e_n)) \subseteq F.$$

Ceci donne :

$$p \circ f(\text{Vect}\,(f(u), e_3, \ldots, e_n)) \subseteq F.$$

Et donc $p \circ f(F) \subseteq F$, *i.e.,* F est stable par $p \circ f$.

(f) *(1 point)* On sait que la famille $\mathcal{B}' = (f(u), e_3, \ldots, e_n)$ est une base de F. En effet elle engendre F est elle est libre car extraite de la base $\mathcal{B}$ qui est libre.
Comme g est la restriction de $p \circ f$ à F alors :

$$\begin{aligned} g(f(u)) &= a_{2,2} f(u) + a_{3,2} e_3 + \cdots a_{n,2} e_n \\ \forall i = 3, \ldots, n \qquad g(e_i) &= a_{2,i} f(u) + a_{3,i} e_3 + \cdots a_{n,i} e_n \end{aligned}$$

Ceci montre que la matrice de g dans la base $\mathcal{B}'$ est :

$$M_{\mathcal{B}'}(g) = \begin{pmatrix} a_{2,2} & \cdots\cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,2} & \cdots\cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} = A'.$$

On en déduit que $\text{tr}(g) = \text{tr}(A') = 0$.

4. (a) *(1 point)* On note $\mathcal{P}_n$ la propriété : pour tout endomorphisme de H_n il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est à diagonale nulle.
<u>Initialisation.</u> La propriété $\mathcal{P}_1$ a été démontrée dans la question (1) : si $f \in H_1$ alors f est nulle donc sa matrice dans toute base est nulle, et donc sa diagonale est nulle.
<u>Hérédité.</u> Supposons que pour un certain entier $n \geqslant 2$ la propriété $\mathcal{P}_{n-1}$ est vraie.
Soit f un endomorphisme de H_n.
Si f est nul alors sa matrice dans toute base est nulle, donc sa diagonale est nulle.

Si f n'est pas nul alors on applique le résultat de la question précédente.

- Il existe des vecteurs $u, e_3, \dots, e_n$ tels que la famille $\mathcal{B} = (u, f(u), e_3, \dots, e_n)$ est une base de E.
- Il existe des scalaires $a_{1,2}, \dots, a_{1,n}$, une matrice A' de taille $(n-1, n-1)$ tels que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & a_{1,2} & \cdots\cdots & a_{1,n} \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$

- A' est la matrice d'un endomorphisme g de trace nulle de l'espace vectoriel $F = \text{Vect}\,(f(u), e_3, \dots, e_n)$, qui est de dimension $n-1$.

Par application de la propriété $\mathcal{P}_{n-1}$ il existe une base $\mathcal{B}'_2$ de F dans laquelle la matrice de g est à diagonale nulle. On note C cette matrice.

Notons $\mathcal{B}'_2 = (u_2, \dots, u_n)$ cette base, et $u_1 = u$.

Comme $E = F \oplus G$, $\mathcal{B}'_2$ est une base de F et (u_1) est une base de G alors par théorème de la base adaptée la famille $\mathcal{B}' = (u_1, \dots, u_n)$ est une base de E.

Démontrons que la matrice de f dans cette nouvelle base $\mathcal{B}'$ est de la forme :

$$M_{\mathcal{B}'}(f) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & b_{1,2} & \cdots\cdots & b_{1,n} \\ \hline b_{2,1} & & & \\ \vdots & & C & \\ \vdots & & & \\ b_{n,1} & & & \end{array}\right). \tag{6}$$

Notons $(b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ les coefficients de cette matrice $M_{\mathcal{B}'}(f)$.

Tout d'abord on sait que $f(u_1) = f(u) \in F$ donc $f(u_1)$ est combinaison linéaire de $u_2, \dots, u_n$, ce qui montre que $b_{1,1} = 0$.

Soit $j \in \{2, \dots, n\}$. Par définition de la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ on a :

$$f(u_j) = b_{1,j}u_1 + \cdots + b_{n,j}u_n.$$

Comme $u_1 \in G$ et $u_2, \dots, u_n \in F$ alors $p(u_1) = 0_E$ et $p(u_i) = u_i$ pour $i = 2, \dots, n$. On en déduit par linéarité de p :

$$p \circ f(u_j) = b_{2,j}u_2 + \cdots + b_{n,j}u_n.$$

Comme $u_j \in F$ alors $p \circ f(u_j) = g(u_j)$ donc :

$$g(u_j) = b_{2,j}u_2 + \cdots + b_{n,j}u_n.$$

Notons $(c_{i,j})_{2\leqslant i,j\leqslant n}$ les coefficients de $C = M_{\mathcal{B}'_2}(g)$, en commençant la notation à l'indice 2, si bien que :

$$\forall j = 2, \dots, n \qquad g(u_j) = c_{2,j}u_2 + \cdots + c_{n,j}u_n.$$

Par unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base on obtient :

$$\forall j = 2, \dots, n \qquad \forall i = 2, \dots n \qquad c_{i,j} = b_{i,j}.$$

Ceci montre que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est bien la matrice (6).

Comme C est à diagonale nulle alors cette matrice est à diagonale nulle, et donc la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie.

L'hérédité est démontrée.

<u>Conclusion.</u> Par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) *(1 point)* Soit M une matrice carrée de trace nulle. Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ telle que $M \in \mathcal{H}_n(\mathbb{K})$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M.

D'après la question précédente il existe une base de $\mathbb{K}^n$ dans laquelle la matrice de f est à diagonale nulle. Ainsi M est semblable à cette matrice, et cette matrice est de taille (n, n) à diagonale nulle, donc elle appartient à $\mathcal{G}_n(\mathbb{K})$.

Ainsi toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de $\mathcal{G}_n(\mathbb{K})$.

Partie C. Seconde caractérisation *(9 points)*

1. (a) *(1 point)* La matrice D est de taille (n, n), donc pour toute autre matrice M de taille (n, n) les matrices DM et MD sont définies et de taille (n, n), puis la somme $DM - MD$ est une matrice de taille (n, n).

Ceci montre que l'application Φ est bien définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

De plus, pour toutes matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tout scalaire λ, par propriétés de la multiplication matricielle :

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda M + N) &= D(\lambda M + N) - (\lambda M + N)D \\ &= \lambda DM + DN - \lambda MD - NP \\ &= \lambda(DM - MD) + (DN - ND) = \lambda\Phi(M) + \Phi(N).\end{aligned}$$

L'application Φ est linéaire. C'est donc un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(b) *(1 point)* Notons $(d_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ les coefficients de D, si bien que

$$\forall i, j = 1, \dots, n \qquad d_{i,j} = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par définition de la multiplication matricielle les coefficients $(b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de la matrice DM sont :

$$\forall i, k = 1, \dots, n \qquad b_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} d_{i,j}a_{j,k} = \lambda_i a_{i,k}.$$

Les coefficients $(c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de la matrice MD sont :

$$\forall i,k=1,\dots,n \qquad c_{i,k}=\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}d_{j,k}=\lambda_k a_{i,k}.$$

On en déduit que les coefficients $(e_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de la matrice $\Phi(M)=DM-MD$ sont :

$$\forall i,k=1,\dots,n \qquad e_{i,k}=b_{i,k}-c_{i,k}=(\lambda_i-\lambda_k)a_{i,k}.$$

2. *(2 points)* Soit M une matrice du noyau de Φ, c'est-à-dire une matrice $M=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ telle que $\Phi(M)=0_n$.
D'après la question précédente, comme $\Phi(M)=0_n$ alors :

$$\forall i,k=1,\dots,n \qquad (\lambda_i-\lambda_k)a_{i,k}=0.$$

Si $i\neq k$ alors $(\lambda_i-\lambda_k)\neq 0$ car les λ_i sont tous distincts, donc $a_{i,k}=0$.
Ceci montre que M est diagonale.
Réciproquement si M est diagonale alors les coefficients de $\Phi(M)$ sont tous nuls :

$$\forall i,k=1,\dots,n \qquad (\lambda_i-\lambda_k)a_{i,k}=\begin{cases} 0 & \text{si } i=k \quad \text{car } \lambda_i=\lambda_k \\ 0 & \text{si } i\neq k \quad \text{car } a_{i,k}=0 \\ & \qquad\quad \text{car } A \text{ est diagonale.}\end{cases}$$

Ainsi $\ker\Phi=\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$.
De plus, d'après le théorème du rang, comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie alors :

$$\dim\ker\Phi+\dim\operatorname{im}\Phi=\dim\mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

D'après les résultats de la partie A ceci donne :

$$\dim\operatorname{im}\Phi=n^2-n.$$

D'après la question précédente, pour toute matrice $M=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les coefficients de $\Phi(M)$ sont $e_{i,k}=(\lambda_i-\lambda_k)a_{i,k}$ pour tout $i,k=1,\dots,n$.
Les coefficients diagonaux sont donc $e_{i,i}=0$, et ainsi : $\Phi(M)\in\mathcal{G}_n(\mathbb{K})$.
$\Phi(M)\in\mathcal{G}_n(\mathbb{K})$.
En conséquence $\operatorname{im}\Phi\subseteq\mathcal{G}_n(\mathbb{K})$.
Comme $\dim\operatorname{im}\Phi=n^2-n=\dim\mathcal{G}_n(\mathbb{K})$ alors par théorème $\operatorname{im}\Phi=\mathcal{G}_n(\mathbb{K})$.

3. (a) *(1 point)* Par définition du noyau et de Φ_1 :

$$\ker\Phi_1=\{M\in\mathcal{H}_n(\mathbb{K})\mid \Phi(M)=0_n\}=\mathcal{H}_n(\mathbb{K})\cap\ker\Phi$$

D'après la question (2) ci-dessus :

$$\ker\Phi_1=\mathcal{H}_n(\mathbb{K})\cap\mathcal{D}_n(\mathbb{K}).$$

D'après la question (4) de la partie A :

$$\dim\ker\Phi_1=n-1.$$

(b) *(1 point)* D'après le théorème du rang, comme $\mathcal{H}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie :

$$\dim \ker \Phi_1 + \dim \operatorname{im} \Phi_1 = \dim \mathcal{H}_n(\mathbb{K}).$$

D'après les résultats précédents :

$$\dim \operatorname{im} \Phi_1 = (n^2 - 1) - (n - 1) = n^2 - n.$$

Par définition de Φ_1 : $\operatorname{im} \Phi_1 = \Phi_1(\mathcal{H}_n(\mathbb{K})) = \Phi(\mathcal{H}_n(\mathbb{K}))$.
Comme $\operatorname{im} \Phi = \mathcal{G}_n(\mathbb{K})$ alors $\Phi(\mathcal{H}_n(\mathbb{K})) \subseteq \mathcal{G}_n(\mathbb{K})$.
On sait que $\dim \mathcal{G}_n(\mathbb{K}) = n^2 - n$ donc par égalité des dimensions :

$$\Phi(\mathcal{H}_n(\mathbb{K})) = \mathcal{G}_n(\mathbb{K}).$$

4. (a) *(1,5 points)* Soit A une matrice de trace nulle : $A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{K})$.
D'après le résultat final de la partie précédente A est semblable à une matrice à diagonale nulle, donc il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $N \in \mathcal{G}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PNP^{-1}$.
Comme $N \in \mathcal{G}_n(\mathbb{K})$ et $\Phi(\mathcal{H}_n(\mathbb{K})) = \mathcal{G}_n(\mathbb{K})$ alors il existe une matrice $M \in \mathcal{H}_n(\mathbb{K})$ telle que $\Phi(M) = N$, *i.e.*, $DM - MD = N$. Alors :

$$A = P(DM - MD)P^{-1} = PDMP^{-1} - PMDP^{-1}.$$

Posons $B = PDP^{-1}$ et $C = PMP^{-1}$. Alors :

$$BC - CB = PDP^{-1}PMP^{-1} - PMP^{-1}PDP^{-1} = PDMP^{-1} - PMDP^{-1} = A.$$

Il existe donc bien deux matrices B et C telles que $A = BC - CB$.

(b) *(0,5 point)* Dans la question précédente on a obtenu $C = PMP^{-1}$ où $M \in \mathcal{H}_n(\mathbb{K})$, donc $\operatorname{tr}(M) = 0$.
Alors $\operatorname{tr}(C) = \operatorname{tr}(PMP^{-1}) = \operatorname{tr}(P^{-1}PM) = \operatorname{tr}(M) = 0$.
La matrice A s'écrit donc $A = BC - CB$ avec C de trace nulle.

5. *(1 point)* Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
D'après la question (4a) de la partie B, si $f \in H_n$ alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est à diagonale nulle. Ceci montre *(i)* $\Longrightarrow$ *(ii)*.
Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Alors $\operatorname{tr}(f) = \operatorname{tr}(M_{\mathcal{B}}(f))$. Si $M_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{G}_n(\mathbb{K})$ alors $\operatorname{tr}(M_{\mathcal{B}}(f)) = 0$ car la diagonale de $M_{\mathcal{B}}(f)$ est nulle, donc $\operatorname{tr}(f) = 0$ et $f \in H_n$. Ceci montre *(ii)* $\Longrightarrow$ *(i)*.
Supposons que $f \in H_n$, et soit A sa matrice dans une base $\mathcal{B}$ de E.
Alors $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(f) = 0$. D'après la question précédente il existe deux matrices B et C telles que $A = BC - CB$. Soit g et h les endomorphismes de E dont les matrices dans la base $\mathcal{B}$ sont respectivement B et C.
L'application $M_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un isomorphisme d'anneaux de $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ donc :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = A = BC - CB = M_{\mathcal{B}}(g)M_{\mathcal{B}}(h) - M_{\mathcal{B}}(h)M_{\mathcal{B}}(g) = M_{\mathcal{B}}(g \circ h - h \circ g).$$

L'application $M_{\mathcal{B}}$ est injective donc $f = g \circ f - f \circ g$. L'implication *(i)* $\Longrightarrow$ *(iii)* est démontrée.
Supposons qu'il existe deux endomorphismes g et h de E tels que $f = g \circ h - h \circ g$. Alors par propriétés de la trace $\operatorname{tr}(f) = \operatorname{tr}(g \circ h) - \operatorname{tr}(h \circ g) = 0$. Ceci montre *(iii)* $\Longrightarrow$ *(i)*.
Finalement les trois propositions *(i)*, *(ii)* et *(iii)* sont équivalentes.