





**Proposition**

On ne modifie pas la convergence d'une série en lui enlevant un nombre fini de termes. En particulier la série  $\sum_{k \geq 0} u_k$  converge si et seulement si pour tout  $m \in \mathbb{N}$  la série  $\sum_{k \geq m} u_k$  converge.

**Remarque.** On peut donc écrire que la série  $\sum u_k$  converge sans avoir précisé à quelle indice elle débute.

**Exemple 2.** Série  $\sum_{k \geq 2} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ .

**C. Séries géométriques****Définition**

Une *série géométrique* est une série de la forme  $\sum \lambda q^n$  où  $\lambda$  et  $q$  sont deux scalaires (réels ou complexes).

**Théorème**

La série  $\sum q^n$  converge si et seulement si  $|q| < 1$ . Dans ce cas :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

Démonstration.

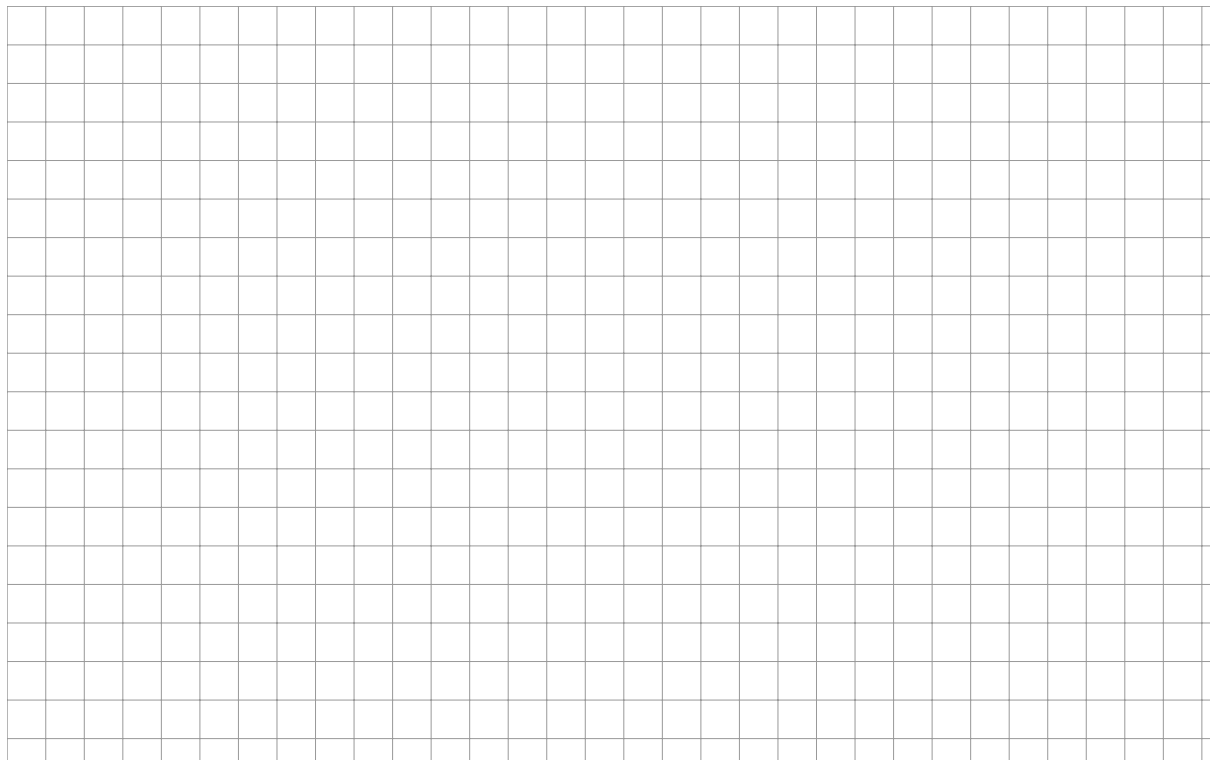
**Remarque.** Si  $|q| < 1$  alors

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=m}^{+\infty} q^k =$$

**Exemple 3.** Série  $\sum_{n \geq 1} \frac{3^n - 5}{4^n}$

► **Exercices 2, 3.**





**Exemple 4.** La série de terme général  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  est divergente.

#### Corollaire

Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites à termes strictement positifs.

- Si  $u_n = O(v_n)$  alors la convergence de la série  $\sum v_n$  implique celle de la série  $\sum u_n$ , et la divergence de  $\sum u_n$  implique celle de  $\sum v_n$ .
- De même si  $u_n = o(v_n)$ .

Démonstration.

- Si  $u_n = O(v_n)$  alors il existe un réel  $M$  tel qu'à partir d'un certain rang :

$$0 \leq u_n \leq Mv_n$$

Le corollaire est donc bien conséquence du théorème précédent.

- Si  $u_n = o(v_n)$  alors  $u_n = O(v_n)$  donc le point précédent s'applique.  $\square$

#### Théorème d'équivalence (TESTP)

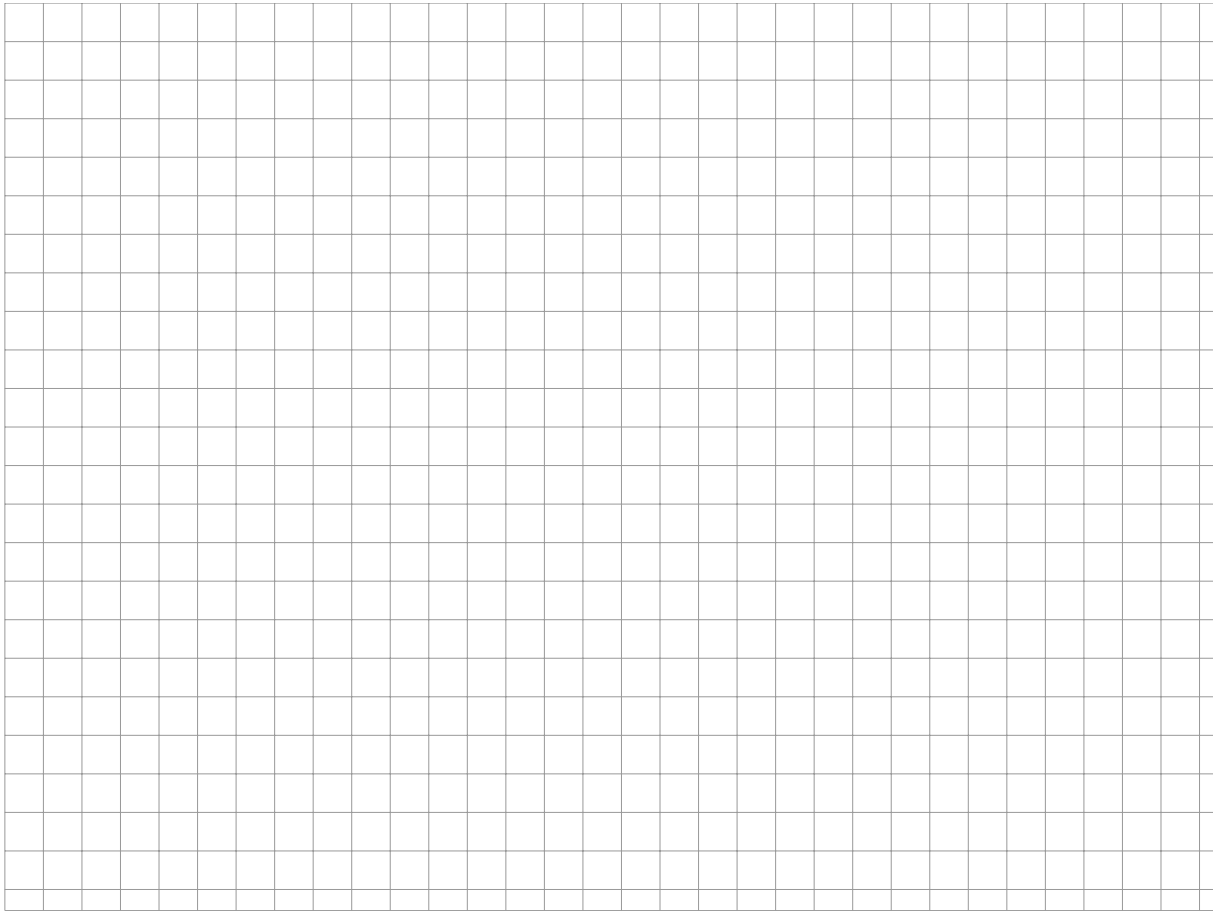
Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites à termes strictement positifs. Si ces deux suites sont équivalentes alors les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature.

**Exemple 5.**

- (i) La série de terme général  $\frac{n}{n^2+1}$  diverge.
- (ii) Nous avons vu en exercice que la série de terme général  $\frac{1}{n(n+1)}$  converge, donc la série de terme général  $\frac{1}{n^2}$  converge.

**Remarque.** Si  $u_n \sim v_n$  et  $\sum v_n$  converge alors  $\sum u_n$  converge, mais les sommes de ces deux séries sont différentes en général.

Démonstration. Ce théorème est conséquence du corollaire précédent, mais on peut aussi le démontrer directement.



## B. Comparaison avec une intégrale

**Exemple 6.** Convergence de  $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ .

On compare  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k\sqrt{k}}$  avec  $\int_1^n \frac{dt}{t\sqrt{t}}$ .

### Méthode

Il faut savoir retrouver la propriété suivante.

Si  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue, positive et décroissante alors :

$$\forall n \geq 1 \quad \int_1^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(t) dt$$

## C. Séries de Riemann

### Définition

Une *série de Riemann* est une série de la forme  $\sum \frac{1}{n^s}$  où  $s$  est un réel quelconque.

### Théorème

Soit  $s \in \mathbb{R}$ . La série  $\sum \frac{1}{n^s}$  converge si et seulement si  $s > 1$ .

**Exemple.** Les séries de termes généraux  $\frac{1}{n^2}$ ,  $\frac{1}{n^3}$ ,  $\frac{1}{n^{1,00001}}$  convergent.

Les séries de termes généraux  $\frac{1}{n}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  divergent.

Démonstration. Le cas où  $s = 1$  a été vu, la série diverge.

Si  $s < 1$  alors :

$$\forall n \geq 1 \quad 0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^s}$$

D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, comme la série  $\sum \frac{1}{n}$  diverge alors la série  $\sum \frac{1}{n^s}$  diverge.

Supposons maintenant que  $s > 1$ . On applique le résultat de la partie précédente avec  $f(t) = \frac{1}{t^s}$ , fonction bien définie sur  $\mathbb{R}_+$ , continue, positive et décroissante :



**Méthode**

Pour les séries à termes positifs on applique le théorème d'équivalence en utilisant les séries géométriques et les séries de Riemann.

**Exemples.**

• La série de terme général	$\frac{n}{n^3 + 2n + 1}$
• La série de terme général	$\frac{3\sqrt{n}}{2n - 5}$
• La série de terme général	$\left(\frac{1}{2^n} + \frac{2}{n}\right)$
• La série de terme général	$\sin \frac{1}{n}$
• La série de terme général	$\arctan \frac{1}{n^2 + n + 1}$
• La série de terme général	$\frac{1}{n!}$

► **Exercice 4.****D. Développement décimal d'un réel****Notation**

Soit  $C = \{0, \dots, 9\}$  l'ensemble des chiffres.

**Proposition**

Si  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de chiffres, alors la série de terme général  $\frac{a_n}{10^n}$  converge.

Démonstration. En effet le terme général de cette série est positif et majoré :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq \frac{a_n}{10^n} \leq 9 \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

Comme  $|\frac{1}{10}| < 1$  alors la série  $\sum \frac{9}{10^n}$  converge, et le théorème de comparaison des séries à termes positifs montre que la série  $\sum \frac{a_n}{10^n}$  converge.  $\square$

**Théorème**

Pour tout réel  $x$  il existe un entier  $a_0$  et une suite de chiffres  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  tels que :

$$x = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

**Notation et définition**

Si  $a_0$  est un entier et  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de chiffres alors on note :

$$a_0, a_1 a_2 \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

L'écriture  $x = a_0, a_1 a_2 \dots$  est appelée *développement décimal* de  $x$ .

Démonstration. Soit  $x$  un réel. On pose  $a_0 = \lfloor x \rfloor$ , puis  $x_1 = x - a_0$ .

On construit par récurrence la suite  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  en posant, pour tout  $k \geq 1$  :

$$a_k = \lfloor 10x_k \rfloor \quad \text{et} \quad x_{k+1} = 10x_k - \lfloor 10x_k \rfloor$$

On vérifie que pour tout  $x \in \mathbb{N}^*$  :  $x_k \in [0, 1[$  et  $a_k \in C$

On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{10^k}$ .

On démontre par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $x - S_n = \frac{x_{n+1}}{10^n}$ .

Ainsi la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $x$ . □

**Définition**

Un développement décimal est dit *impropre* si tous ses chiffres sont égaux à 9 à partir d'un certain rang, et *propre* s'il n'est pas impropre, ou de manière équivalente si pour tout  $N \in \mathbb{N}$  il existe  $n \geq N$  tel que  $a_n < 9$ .

**Théorème**

Tout réel admet un et un seul développement décimal propre.

Démonstration. On reprend les notations de la démonstration de l'existence.

On démontre par l'absurde que le développement décimal obtenu n'est pas impropre.

En effet s'il est impropre alors il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que

$$x = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{a_k}{10^k} + \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = S_{m-1} + \frac{1}{10^{m-1}}$$

Or  $x - S_{m-1} = \frac{x_m}{10^{m-1}}$ , ce qui contredit le fait que  $x_m \in [0, 1[$ .

Pour l'unicité on considère deux développements décimaux propres  $x = a_0, a_1 a_2 \dots = b_0, b_1 b_2 \dots$ , différents à partir d'un rang  $m$ , si bien que  $a_m \neq b_m$  et :

$$x = S_{m-1} + \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k} = S_{m-1} + \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{b_k}{10^k}$$

On en déduit :

$$\frac{1}{10^m} \leq \frac{|a_m - b_m|}{10^m} = \left| \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{a_k - b_k}{10^k} \right| \leq \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{|a_k - b_k|}{10^k} \leq \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{1}{10^m}$$

Les inégalités sont donc des égalités. La deuxième implique que les  $(a_k - b_k)_{k \geq m+1}$  sont tous de même signe, et la troisième qu'ils valent tous 9 ou tous -9. Ceci contredit le fait que les développements décimaux sont propres, et prouve donc l'unicité. □

**Théorème**

Un réel  $x$  est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang.

**Exemples.**

$\frac{1}{3} =$	$\frac{267}{11} =$	$\frac{22}{7} =$
Si $x = 2,689\ 689\ 689\dots$ alors $x =$		

Démonstration. Admise.

**E. Formule de Stirling**

**Théorème - Formule de Stirling**

(James STIRLING, ÉCOSSE, 1692 – 1770)


**Corollaire**

La suite  $(\ln(n!))_{n \geq 0}$  admet le développement asymptotique suivant :


Démonstration du corollaire. L'équivalence donne :

$$\frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1 + o_{n \rightarrow +\infty}(1)$$

On applique le logarithme. Comme  $\ln(1 + o(1)) = o(1)$  ceci prouve le corollaire. □

**Exercice.** On pose, pour tout  $n \geq 1$  :  $u_n = \ln(n!) - n \ln n + n - \frac{1}{2} \ln n$

- a. Donner un développement asymptotique à l'ordre 2 de  $v_n = u_{n+1} - u_n$ .
- b. En déduire que la série  $\sum v_n$  converge, puis que la suite  $(u_n)$  converge.
- c. On note  $A = \lim u_n$ . Donner un équivalent de  $n!$  dépendant de  $A$ .

Les intégrales de Wallis sont, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt$

On démontre que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $(n + 2)I_{n+2} = (n + 1)I_n$ .

On en déduit :  $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}$

- d. Déterminer la valeur de  $A$  et démontrer la formule de Stirling.

► **Exercice 5.**

## III. Séries à termes quelconques

### A. Séries alternées

#### Définition

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels. La série  $\sum u_n$  est dite *alternée* si les signes des  $u_n$  alternent, c'est-à-dire la suite  $((-1)^n u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de signe constant.

#### Théorème - Critère spécial des séries alternées (CSSA)

Soit  $\sum u_n$  une série alternée. Si la suite  $(|u_n|)_n$  est décroissante et converge vers 0 alors la série  $\sum u_n$  est convergente.

**Exemple 7.** La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  converge.

#### Théorème (suite)

Avec les hypothèses du théorème précédent, on note  $S$  la somme de la série  $\sum u_n$  et  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ses restes. Alors :

$$0 \leq |S| \leq |u_0| \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{array}{l} \bullet \quad R_n \text{ est du signe de } u_{n+1} \\ \bullet \quad |R_n| \leq |u_{n+1}| \end{array}$$

Démonstration du critère spécial. Quitte à remplacer  $(u_n)$  par  $(-u_n)$  on peut supposer que chaque terme  $u_n$  est du signe de  $(-1)^n$ , c'est-à-dire que  $u_n = (-1)^n v_n$  où  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite positive, décroissante, convergeant vers 0.



Démonstration de la suite. On garde les notations de la démonstration ci-dessus.

La suite  $(S_{2n})$  est décroissante et converge vers  $S$ , la suite  $(S_{2n+1})$  est croissante et converge vers  $S$ , donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n} \quad \text{et} \quad S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2}$$

Pour  $n = 0$  la première inégalité donne  $v_0 - v_1 \leq S \leq v_0$ , donc  $0 \leq S \leq v_0$ .

De plus en retranchant  $S_{2n}$  et  $S_{2n+1}$  à ces encadrement on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{2n+1} \leq R_{2n} \leq 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq R_{2n+1} \leq v_{2n+2}$$

Ceci démontre la propriété. □

## B. Convergence absolue

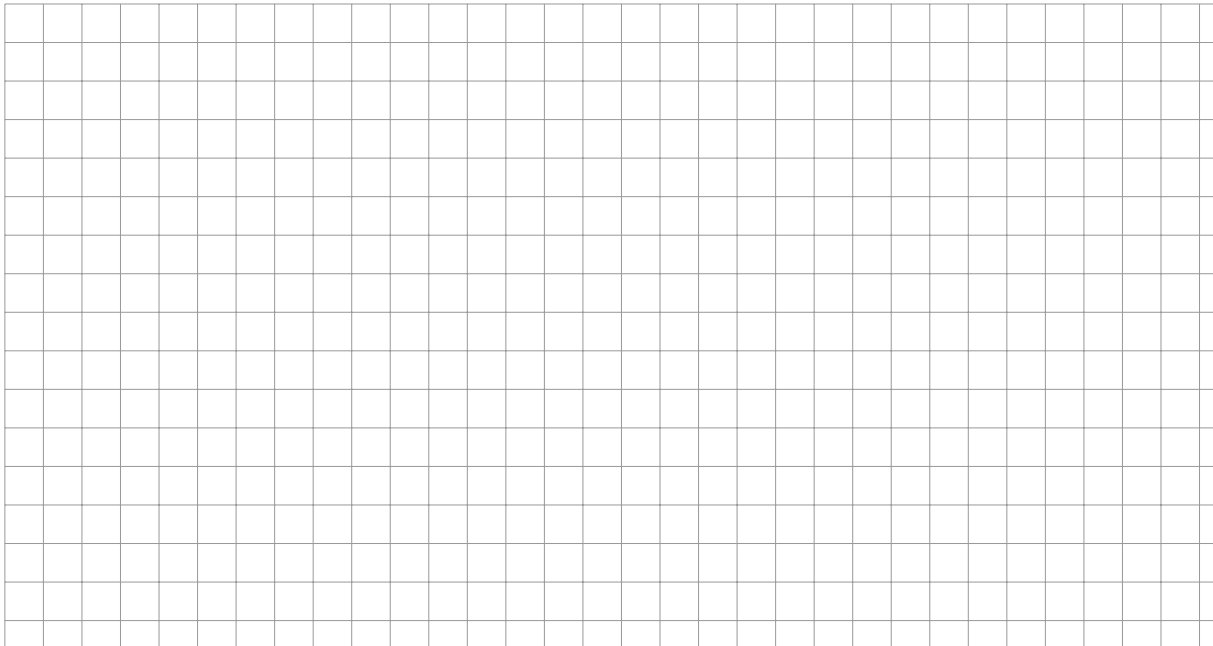
### Définition

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une série à termes réels ou complexes. On dit que la série  $\sum u_n$  converge absolument si la série à termes positifs  $\sum |u_n|$  converge.

### Théorème

Si la série  $\sum u_n$  converge absolument alors elle converge.

Démonstration. On suppose d'abord que  $(u_n)$  est une suite réelle.



Dans le cas général (où  $(u_n)$  est une suite complexe) on écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \operatorname{Re} u_n + i \operatorname{Im} u_n \quad \text{et} \quad \begin{aligned} 0 &\leq |\operatorname{Re} u_n| \leq |u_n| \\ 0 &\leq |\operatorname{Im} u_n| \leq |u_n| \end{aligned}$$

Si la série  $\sum |u_n|$  converge, alors d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs les séries  $\sum |\operatorname{Re} u_n|$  et  $\sum |\operatorname{Im} u_n|$  sont convergentes. Or ce sont des séries à termes réels, donc d'après ce qui précède les séries  $\sum \operatorname{Re} u_n$  et  $\sum \operatorname{Im} u_n$  convergent, puis par linéarité la série  $u_n = \operatorname{Re} u_n + i \operatorname{Im} u_n$  converge. □

**Attention**

La réciproque est fausse.

Par exemple La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  converge alors que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  diverge.

**Définition**

Une série qui converge mais qui ne converge pas absolument est dite *semi-convergente*.

**Méthode**

Pour démontrer que la série  $\sum |u_n|$  converge on dispose des théorèmes sur les séries à termes positifs.

**Proposition - Inégalité triangulaire pour les séries**

Si  $\sum u_n$  converge absolument alors :

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$$

Démonstration. L'inégalité triangulaire pour les complexes donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq \sum_{k=0}^n |u_k|$$

Comme la série  $\sum u_n$  converge absolument alors les deux suites ci-dessus convergent, et par théorème de comparaison on obtient bien :

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| \quad \square$$

**Proposition**

Soit  $(u_n)$  une suite réelle ou complexe et  $(v_n)$  une suite à termes réels positifs.

Si  $u_n = O(v_n)$  et  $\sum v_n$  est convergente alors la série  $\sum u_n$  est absolument convergente, donc convergente.

Démonstration. Par définition, comme  $u_n = O(v_n)$  alors il existe un réel  $M$  et un entier  $N$  tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \implies 0 \leq |u_n| \leq Mv_n$$

D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série  $\sum |u_n|$  converge, donc la série  $\sum u_n$  converge absolument.  $\square$

**Exemple 8.** Soit  $s \in \mathbb{R}$  et  $q \in \mathbb{C}$  tel que  $|q| < 1$ . Alors la série  $\sum_{n \geq 1} n^s q^n$  converge absolument. En effet  $(n^s q^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est dominée par  $(\frac{1}{n^2})_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

► **Exercice 6.**

