Chapitre A12
Séries

I. Généralités

A. Définitions

Définition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

On dit que la série de terme général u_n converge si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Sinon on dit qu'elle diverge.

Exemple 1.
(i) $u_n = n$
(ii) $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$
(iii) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{1}{n}$

Notation. La série de terme général u_n est notée $\sum u_n$ ou $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$.

Définitions. Les scalaires $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ sont appelés sommes partielles de la série de terme général u_n.

Si cette série converge la limite de (S_n) est appelée somme de cette série et notée $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ le scalaire $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est appelé reste de la série de terme général u_n.

Remarque. Les restes R_n ne sont définis que si la série $\sum u_n$ converge.
Dans ce cas, en notant ℓ la somme on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad S_n + R_n = \ell$$

En conséquence la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

▷ **Exercice 1.**

B. Propriétés

Proposition (Linéarité). *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries, et λ un scalaire. Si ces deux séries sont convergentes, de sommes ℓ_1 et ℓ_2, alors la série de terme général $(\lambda u_n + v_n)$ est convergente, de somme $\lambda\ell_1 + \ell_2$.*

Remarque. Autre formulation :
Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors la série $\sum(\lambda u_n + v_n)$ converge et :

Démonstration. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Par linéarité de la somme :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n}(\lambda u_k + v_k) = \lambda S_n + T_n$$

La propriété est conséquence de la linéarité de la limite des suites. □

Proposition. *Si la série de terme général u_n converge, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.*

Démonstration.

Remarque. La réciproque de cette proposition est fausse. Par exemple la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 mais la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge, comme on l'a vu en exemple.

Corollaire. *Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 alors la série de terme général u_n diverge.*

Remarque. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 alors on dit que la série de terme général u_n diverge grossièrement. Ceci permet d'affirmer immédiatement que la série de terme général n diverge, comme on l'a justifié en exemple.

Proposition. *On ne modifie pas la convergence d'une série en lui enlevant un nombre fini de termes. En particulier la série $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ converge si et seulement si pour tout $m \in \mathbb{N}$ la série $\sum_{k\geqslant m} u_k$ converge.*

Remarque. On peut donc écrire que la série $\sum u_k$ converge sans avoir précisé à quelle indice elle débute.

Exemple 2. Série $\sum_{k\geqslant 2} \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

C. Séries géométriques

Définition. Une série géométrique est une série de la forme $\sum \lambda q^n$ où λ et q sont deux réels ou complexes.

Théorème. *La série $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas :*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

Démonstration.

Remarque. Si $|q| < 1$ alors

$$\forall m \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=m}^{+\infty} q^k =$$

Exemple 3. Série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{3^n - 5}{4^n}$

▷ **Exercices 2, 3.**

II. Séries à termes positifs

Remarque. Avec les notations précédentes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad S_n - S_{n-1} =$$

$$R_n - R_{n-1} =$$

En conséquence, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (en supposant qu'elle est définie).

A. Théorèmes

Proposition. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Dans ce cas sa somme est $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n = \operatorname{Sup} S_n$.*

Démonstration. En effet, si la suite (u_n) est positive alors la suite (S_n) est croissante, donc elle converge si et seulement si elle est majorée. □

Théorème de comparaison (TCSTP). *Soit (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose qu'il existe un entier N tel que :*

$$\forall n \geqslant N \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$$

(i) Si la série de terme général v_n converge alors la série de terme général u_n converge et :

$$\sum_{k=N}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=N}^{+\infty} v_k$$

(ii) Si la série le terme général u_n diverge alors la série de terme général v_n diverge.

Démonstration.

Exemple 4. La série de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente.

Corollaire. *Soit (u_n) et (v_n) deux suites à termes strictements positifs.*

(i) Si $u_n = O(v_n)$ alors la convergence de la série $\sum v_n$ implique celle de la série $\sum u_n$, et la divergence de $\sum u_n$ implique celle de $\sum v_n$.

(ii) De même si $u_n = o(v_n)$.

Démonstration.

(i) Si $u_n = O(v_n)$ alors il existe un réel M tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant M v_n$$

Le corollaire est donc bien conséquence du théorème précédent.

(ii) Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = O(v_n)$ donc le point précédent s'applique. □

Théorème d'équivalence (TESTP). *Soit (u_n) et (v_n) deux suites à termes strictement positifs. Si ce deux suites sont équivalentes alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.*

Exemple 5.

(i) La série de terme général $\frac{n}{n^2+1}$ diverge.

(ii) Nous avons vu en exercice que la série de terme général $\frac{1}{n(n+1)}$ converge, donc la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge.

Remarque. Si $u_n \sim v_n$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge, mais les sommes de ces deux séries sont différentes en général.

Démonstration. Ce théorème est conséquence du corollaire précédent, mais on peut aussi le démontrer directement.

Remarque : nouvelles définitions des relations de comparaison.

Soit u et v deux suites, la suite v pouvant s'annuler. Alors :

- u est négligeable devant v s'il existe une suite ε telle que :
- u est équivalente à v s'il existe une suite h telle que :
- u est dominée par v s'il existe une constante M telle que :

Dans le cas où la suite v ne s'annule pas, ces définitions sont équivalentes aux définitions habituelles.

Ces définitions s'adaptent pour les relations de comparaison entre les fonctions.

B. Comparaison avec une intégrale

Exemple 6. Convergence de $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

On compare $\quad S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}} \quad$ avec $\quad \displaystyle\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t}}$.

Remarque. Si $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, positive et décroissante alors :

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \int_1^{n+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant f(1) + \int_1^n f(t)\,dt$$

C. Séries de Riemann

Définition. Une série de Riemann est une série de la forme $\displaystyle\sum \frac{1}{n^s}$ où s est un réel quelconque.

Théorème. *Soit $s \in \mathbb{R}$. La série $\displaystyle\sum \frac{1}{n^s}$ converge si et seulement si $s > 1$.*

Exemple. Les séries de termes généraux $\frac{1}{n^2}$ $\frac{1}{n^3}$ $\frac{1}{n^{1,00001}}$ convergent.
Les séries de termes généraux $\frac{1}{n}$ $\frac{1}{\sqrt{n}}$ divergent.

Démonstration. Le cas où $s = 1$ a été vu, la série diverge.

Si $s < 1$ alors :

$$\forall n \geqslant 1 \qquad 0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n^s}$$

D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, comme la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge alors la série $\sum \frac{1}{n^s}$ diverge.

Supposons maintenant que $s > 1$. On applique le résultat de la partie précédente avec $f(t) = \frac{1}{t^s}$, fonction bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$, continue, positive et décroissante :

Méthode. Pour les séries à termes positifs on applique le théorème d'équivalence en utilisant les séries géométriques et les séries de Riemann.

Exemple 7.

(i) La série de terme général $\dfrac{n}{n^3 + 2n + 1}$

(ii) La série de terme général $\dfrac{3\sqrt{n}}{2n - 5}$

(iii) La série de terme général $\left(\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{2}{n}\right)$

(iv) La série de terme général $\sin \dfrac{1}{n}$

(v) La série de terme général $\arctan \dfrac{1}{n^2 + n + 1}$

(vi) La série de terme général $\dfrac{1}{n!}$

▷ **Exercice 4.**

D. Développement décimal d'un réel

Notation. Soit $C = \{0, \dots, 9\}$ l'ensemble des chiffres.

Proposition. *Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de chiffres, alors la série de terme général $\frac{a_k}{10^k}$ est convergente.*

Démonstration. En effet le terme général de cette série est positif et majoré :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad 0 \leqslant \frac{a_k}{10^k} \leqslant 10\left(\frac{1}{10}\right)^k$$

Comme $\left|\frac{1}{10}\right| < 1$ alors la série $\sum \frac{10}{10^k}$ converge, et le théorème de comparaison des séries à termes positifs montre que la série $\sum \frac{a_k}{10^k}$ converge. □

Notation. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de chiffres et a est un entier, alors on note :

$$a, a_1 a_2 \dots = a + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$$

Définition. L'écriture $x = a, a_1 a_2 \dots$ est appelée développement décimal de x.

Un développement décimal est dit impropre si tous ses chiffres sont égaux à 9 à partir d'un certain rang, et propre s'il n'est pas impropre, ou de manière équivalente si pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $n \geqslant N$ tel que $a_n < 9$.

Théorème. *Tout réel admet un est un seul développement décimal propre.*

Théorème. *Un réel x est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang.*

Exemple 8.

(i) $\frac{1}{3} =$ $\qquad$ $\frac{267}{11} =$ $\qquad$ $\frac{22}{7} =$

(ii) Si $x = 2{,}689\,689\,689\dots$ alors $x =$

E. Formule de Stirling

Proposition Formule de Stirling. *(James* Stirling, Écosse, 1692 – 1770*)*

Corollaire. *La suite* $(\ln(n!))_{n\geqslant 0}$ *admet le développement asymptotique suivant :*

Exercice. On pose, pour tout $n \geqslant 1$: $u_n = \ln(n!) - n\ln n + n - \frac{1}{2}\ln n$

a. Donner un développement asymptotique à l'ordre 2 de $v_n = u_{n+1} - u_n$.

b. En déduire que la série $\sum v_n$ converge, puis que la suite (u_n) converge.

c. On note $A = \lim u_n$. Donner un équivalent de $n!$ dépendant de A.

Les intégrales de Wallis sont, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \,\mathrm{d}t$

On démontre que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$.

On en déduit : $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2}$

d. Déterminer la valeur de A et démontrer la formule de Stirling.

▷ **Exercice 5.**

III. Séries à termes quelconques

A. Séries alternées

Définition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. La série $\sum u_n$ est dite alternée si les signes des u_n alternent, c'est-à-dire la suite $((-1)^n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant.

Théorème. *Soit $\sum u_n$ une série alternée. Si la suite $(|u_n|)_n$ est décroissante et converge vers 0 alors la série $\sum u_n$ est convergente.*

Exemple 9. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge.

Proposition. *Avec les hypothèses du théorème précédent, on note S la somme de la série $\sum u_n$ et $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ses restes. Alors :*

Démonstration du théorème. Quitte à remplacer (u_n) par $(-u_n)$ on peut supposer que chaque terme u_n est du signe de $(-1)^n$, c'est-à-dire que $u_n = (-1)^n v_n$ où $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive, décroissante, convergeant vers 0.

Démonstration de la propriété. On garde les notations de la démonstration ci-dessus.

La suite (S_{2n}) est décroissante et converge vers S, la suite (S_{2n+1}) est croissante et converge vers S, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n} \qquad \text{et} \qquad S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n+2}$$

Pour $n = 0$ la première inégalité donne $v_0 - v_1 \leqslant S \leqslant v_0$, donc $0 \leqslant S \leqslant v_0$.

De plus en retranchant S_{2n} et S_{2n+1} à ces encadrement on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_{2n+1} \leqslant R_{2n} \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant R_{2n+1} \leqslant v_{2n+2}$$

Ceci démontre la propriété. □

B. Convergence absolue

Définition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une série à termes réels ou complexes. On dit que la série $\sum u_n$ converge absolument si la série à termes positifs $\sum |u_n|$ converge.

Théorème. *Si la série $\sum u_n$ converge absolument alors elle converge.*

Démonstration.

Dans le cas général (où (u_n) est une suite complexe) on écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \operatorname{Re} u_n + i \operatorname{Im} u_n \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{l} 0 \leqslant |\operatorname{Re} u_n| \leqslant |u_n| \\ 0 \leqslant |\operatorname{Im} u_n| \leqslant |u_n| \end{array}$$

Si la série $\sum |u_n|$ converge, alors d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs les séries $\sum |\operatorname{Re} u_n|$ et $\sum |\operatorname{Im} u_n|$ sont convergentes. Or ce sont des séries à termes réels, donc d'après ce qui précède les séries $\sum \operatorname{Re} u_n$ et $\sum \operatorname{Im} u_n$ convergent, puis par linéarité la série $u_n = \operatorname{Re} u_n + i \operatorname{Im} u_n$ converge. □

Remarque. Démonstration alternative dans le cas réel :
Pour tout nombre réel x on note :

$$x^+ = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad x^- = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Alors $x = x^+ - x^-$ et $|x| = x^+ + x^-$.
Par théorème de comparaison des séries à termes positifs les relations $0 \leqslant u_n^+ \leqslant |u_n|$ et $0 \leqslant u_n^- \leqslant |u_n|$ montrent que si la série $\sum |u_n|$ converge alors les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent.
Dans ce cas par combinaison linéaire la série $\sum u_n = \sum u_n^+ - \sum u_n^-$ converge.

Remarque. La réciproque est fausse.

Exemple 10. Convergence de $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$: la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à la fonction $f(x) = \ln(1+x)$ donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \left| \ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| = \left| \int_0^1 \frac{(-1)^n (1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\, dt \right| \leqslant \int_0^1 (1-t)^n\, dt = \frac{1}{n+1}$$

Ceci montre que la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge. Par contre la série de terme général $|u_n| = \dfrac{1}{n}$ diverge. Ainsi la série $\sum u_n$ converge mais ne converge pas absolument.

Remarque. Pour démontrer que la série $\sum |u_n|$ converge on dispose des théorèmes sur les séries à termes positifs.

Proposition (Inégalité triangulaire). *Si $\sum u_n$ converge absolument alors :*

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$$

<u>Démonstration</u>. L'inégalité triangulaire pour les complexes donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \left| \sum_{k=0}^{n} u_k \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |u_k|$$

Comme la série $\sum u_n$ converge absolument alors les deux suites ci-dessus convergent, et par théorème de comparaison on obtient bien :

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| \qquad \square$$

Proposition. *Soit (u_n) une suite réelle ou complexe et (v_n) une suite à termes réels positifs. Si $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ est convergente alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.*

Démonstration. Par définition, comme $u_n = O(v_n)$ alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée. On choisit un majorant M de la suite $\left(\left|\frac{u_n}{v_n}\right|\right)$. Comme (v_n) est réelle positive alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant |u_n| \leqslant M v_n$$

D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum |u_n|$ converge, donc la série $\sum u_n$ converge absolument. □

Exemple 11. Soit $s \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{C}$ tel que $|q| < 1$. Alors la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} n^s q^n$ converge absolument. En effet $(n^s q^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est dominée par $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

▷ **Exercice 6.**

C. Série exponentielle

Proposition. *Soit z un complexe. Alors la série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$ converge, de somme :*

Cette série est appelée série exponentielle.

Démonstration. On fixe $z \in \mathbb{C}$ et on définit la fonction $f : \begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{tz}. \end{array}$

Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$, de dérivées : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [0,1] \quad f^{(n)}(t) = z^n f(t)$

La fonction $|f|$ est continue sur le segment $[0,1]$ donc elle admet un majorant M. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $\left|f^{(n+1)}\right|$ est donc majorée par $M|z|^{n+1}$.

L'inégalité de Taylor Lagrange montre que :

$$\forall t \in [0,1] \qquad \left| f(t) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!} \right| \leqslant M|z|^{n+1} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$$

En particulier pour $t = 1$:

$$\left| e^z - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \right| \leqslant M \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ceci est valable pour tout n. On sait par croissances comparées que $|z|^{n+1} \underset{n \to +\infty}{=} o((n+1)!)$, et M ne dépend pas de n, donc par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

Ceci montre que la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge, de somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$. □