Chapitre A12
Séries

I. Généralités

A. Définitions

Définition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

On dit que la série de terme général u_n converge si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Sinon on dit qu'elle diverge.

Exemple 1.

(i) $u_n = n$

(ii) $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{1}{n}$

Notation. La série de terme général u_n est notée $\sum u_n$ ou $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$.

Définitions.

Les scalaires $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ sont appelés sommes partielles de la série de terme général u_n.

Si cette série converge la limite de (S_n) est appelée somme de cette série et notée $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ le scalaire $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est appelé reste de la série de terme général u_n.

Remarque. Les restes R_n ne sont définis que si la série $\sum u_n$ converge.
Dans ce cas, en notant ℓ la somme on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad S_n + R_n = \ell$$

En conséquence la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

▷ **Exercice 1.**

B. Propriétés

Proposition (Linéarité). *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries, et λ un scalaire. Si ces deux séries sont convergentes, de sommes ℓ_1 et ℓ_2, alors la série de terme général $(\lambda u_n + v_n)$ est convergente, de somme $\lambda \ell_1 + \ell_2$.*

Remarque. Autre formulation :
Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors la série $\sum(\lambda u_n + v_n)$ converge et :

Démonstration. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Par linéarité de la somme :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n} (\lambda u_k + v_k) = \lambda S_n + T_n$$

La propriété est conséquence de la linéarité de la limite des suites. □

Proposition. *Si la série de terme général u_n converge, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.*

Démonstration.

Remarque. La réciproque de cette proposition est fausse. Par exemple la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 mais la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge, comme on l'a vu en exemple.

Corollaire. *Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 alors la série de terme général u_n diverge.*

Remarque. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 alors on dit que la série de terme général u_n diverge grossièrement. Ceci permet d'affirmer immédiatement que la série de terme général n diverge, comme on l'a justifié en exemple.

Proposition. *On ne modifie pas la convergence d'une série en lui enlevant un nombre fini de termes. En particulier pour tout $m \in \mathbb{N}$ la série $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ converge si et seulement si la série $\sum_{k\geqslant m} u_k$ converge.*

Remarque. On peut donc écrire que la série $\sum u_k$ converge sans avoir précisé à quelle indice elle débute.

Exemple 2. Série $\sum\limits_{k\geqslant 2} \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

C. Séries géométriques

Définition. Une série géométrique est une série de la forme $\sum \lambda q^n$ où λ et q sont deux réels ou complexes.

Théorème. *La série $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas :*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

Démonstration.

Remarque. Si $|q| < 1$ alors

$$\forall m \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=m}^{+\infty} q^k =$$

Exemple 3. Série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{3^n - 5}{4^n}$

▷ **Exercices 2, 3.**

II. Séries à termes positifs

Remarque. Avec les notations précédentes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad S_n - S_{n-1} =$$

$$R_n - R_{n-1} =$$

En conséquence, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (en supposant qu'elle est définie).

A. Théorèmes

Proposition. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Dans ce cas sa somme est $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n = \operatorname{Sup} S_n$.*

Démonstration. En effet, si la suite (u_n) est positive alors la suite (S_n) est croissante, donc elle converge si et seulement si elle est majorée. □

Théorème de comparaison (TCSTP). *Soit (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose qu'il existe un entier N tel que :*

$$\forall n \geqslant N \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$$

(i) Si la série de terme général v_n converge alors la série de terme général u_n converge et :

$$\sum_{k=N}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=N}^{+\infty} v_k$$

(ii) Si la série le terme général u_n diverge alors la série de terme général v_n diverge.

Démonstration.

Exemple 4. La série de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente.

Corollaire. *Soit (u_n) et (v_n) deux suites à termes strictements positifs.*

(i) Si $u_n = O(v_n)$ alors la convergence de la série $\sum v_n$ implique celle de la série $\sum u_n$, et la divergence de $\sum u_n$ implique celle de $\sum v_n$.

(ii) De même si $u_n = o(v_n)$.

Démonstration.

(i) Si $u_n = O(v_n)$ alors il existe un réel M tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant M v_n$$

Le corollaire est donc bien conséquence du théorème précédent.

(ii) Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = O(v_n)$ donc le point précédent s'applique. □

Théorème d'équivalence (TESTP). *Soit (u_n) et (v_n) deux suites à termes strictement positifs. Si ce deux suites sont équivalentes alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.*

Exemple 5.

(i) La série de terme général $\frac{n}{n^2+1}$ diverge.

(ii) Nous avons vu en exercice que la série de terme général $\frac{1}{n(n+1)}$ converge, donc la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge.

Remarque. Si $u_n \sim v_n$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge, mais les sommes de ces deux séries sont différentes en général.

Démonstration. Ce théorème est conséquence du corollaire précédent, mais on peut aussi le démontrer directement.

B. Comparaison avec une intégrale

Exemple 6. Convergence de $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

Remarque. Si $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, positive et décroissante alors :

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \int_1^{n+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant f(1) + \int_1^n f(t)\,dt$$

C. Séries de Riemann

Définition. Une série de Riemann est une série de la forme $\displaystyle\sum \frac{1}{n^s}$ où s est un réel quelconque.

Théorème. *Soit $s \in \mathbb{R}$. La série $\displaystyle\sum \frac{1}{n^s}$ converge si et seulement si $s > 1$.*

Démonstration. Le cas où $s = 1$ a été vu, la série diverge.

Si $s < 1$ alors :

$$\forall n \geqslant 1 \qquad 0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n^s}$$

D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, comme la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge alors la série $\sum \frac{1}{n^s}$ diverge.

On suppose maintenant que $s > 1$. On applique le résultat de la partie précédente avec $f(t) = \frac{1}{t^s}$, fonction bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$, continue, positive et décroissante :

Exemple. Les séries de termes généraux $\frac{1}{n^2}$ $\frac{1}{n^3}$ $\frac{1}{n^{1,00001}}$ convergent.

Les séries de termes généraux $\frac{1}{n}$ $\frac{1}{\sqrt{n}}$ divergent.

Méthode. Pour les séries à termes positifs on applique le théorème d'équivalence en utilisant les séries géométriques et les séries de Riemann.

Exemple 7.

(i) La série de terme général $\dfrac{n}{n^3+2n+1}$

(ii) La série de terme général $\dfrac{3\sqrt{n}}{2n-5}$

(iii) La série de terme général $\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{2}{n}\right)$

(iv) La série de terme général $\sin\dfrac{1}{n}$

(v) La série de terme général $\arctan\dfrac{1}{n^2+n+1}$

(vi) La série de terme général $\dfrac{1}{n!}$

▷ **Exercice 4.**

D. Développement décimal d'un réel

Notation. Soit $C=\{0,\dots,9\}$ l'ensemble des chiffres.

Proposition. *Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de chiffres, alors la série de terme général $\frac{a_k}{10^k}$ est convergente.*

Démonstration. En effet le terme général de cette série est positif et majoré :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*\qquad 0\leqslant\frac{a_k}{10^k}\leqslant 10\left(\frac{1}{10}\right)^k$$

Comme $\left|\frac{1}{10}\right|<1$ alors la série $\sum\frac{10}{10^k}$ converge, et le théorème de comparaison des séries à termes positifs montre que la série $\sum\frac{a_k}{10^k}$ converge. □

Notation. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de chiffres et a est un entier, alors on note :

$$a,a_1a_2\dots=a+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a_k}{10^k}$$

Définition. L'écriture $x=a,a_1a_2\dots$ est appelée développement décimal de x.
Un développement décimal est dit impropre si tous ses chiffres sont égaux à 9 à partir d'un certain rang, et propre s'il n'est pas impropre, ou de manière équivalente si pour tout $N\in\mathbb{N}$ il existe $n\geqslant N$ tel que $a_n<9$.

Théorème. *Tout réel admet un est un seul développement décimal propre.*

Théorème. *Un réel x est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang.*

Exemple 8.

(i) $\dfrac{1}{3}=$ $\qquad$ $\dfrac{267}{11}=$ $\qquad$ $\dfrac{22}{7}=$

(ii) Si $x=2{,}689\,689\,689\dots$ alors $x=$

E. Formule de Stirling

Proposition Formule de Stirling. *(James* Stirling, Écosse, 1692 – 1770*)*

Corollaire. *La suite* $(\ln(n!))_{n\geqslant 0}$ *admet le développement asymptotique suivant :*

Exercice. On pose, pour tout $n \geqslant 1$: $u_n = \ln(n!) - n\ln n + n - \frac{1}{2}\ln n$

a. Donner un développement asymptotique de $v_n = u_{n+1} - u_n$.
b. En déduire que la série $\sum v_n$ converge, puis que la suite (u_n) converge.
c. On note $A = \lim u_n$. Donner un équivalent de $n!$ dépendant de A.

Les intégrales de Wallis sont, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \,\mathrm{d}t$

On démontre que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$.

On en déduit : $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2}$

d. Déterminer la valeur de A et démontrer la formule de Stirling.

▷ **Exercice 5.**

III. Séries à termes quelconques

A. Séries alternées

Définition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. La série $\sum u_n$ est dite alternée si les signes des u_n alternent, c'est-à-dire la suite $((-1)^n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant.

Théorème. *Soit* $\sum u_n$ *une série alternée. Si la suite* $(|u_n|)_n$ *est décroissante et converge vers* 0 *alors la série* $\sum u_n$ *est convergente.*

Exemple 9. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge.

Proposition. *Avec les hypothèses du théorème précédent, on note* S *la somme de la série* $\sum u_n$ *et* $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ses restes. Alors :*

Démonstration du théorème. Quitte à remplacer (u_n) par $(-u_n)$ on peut supposer que chaque terme u_n est du signe de $(-1)^n$, c'est-à-dire que $u_n = (-1)^n v_n$ où $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive, décroissante, convergeant vers 0.

Démonstration de la propriété. On garde les notations de la démonstration ci-dessus.

La suite (S_{2n}) est décroissante et converge vers S, la suite (S_{2n+1}) est croissante et converge vers S, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n} \qquad \text{et} \qquad S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n+2}$$

Pour $n = 0$ la première inégalité donne $u_0 - u_1 \leqslant S \leqslant u_0$, donc $0 \leqslant S \leqslant u_0$.

De plus en retranchant S_{2n} et S_{2n+1} à ces encadrement on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{2n+1} \leqslant R_{2n} \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant R_{2n+1} \leqslant u_{2n+2}$$

Ceci démontre la propriété. □

B. Convergence absolue

Définition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une série à termes réels ou complexes. On dit que la série $\sum u_n$ converge absolument si la série à termes positifs $\sum |u_n|$ converge.

Théorème. *Si la série $\sum u_n$ converge absolument alors elle converge.*

Démonstration. On suppose d'abord que (u_n) est une suite réelle. Comme $|u_n| = \pm u_n$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant u_n + |u_n| \leqslant 2|u_n|.$$

Si la série $\sum u_n$ converge absolument alors la série $\sum |u_n|$ converge, donc la série $\sum 2|u_n|$ converge également.

La série $\sum(u_n + |u_n|)$ est une série à termes positifs, donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs elle converge.

Par linéarité la série $\sum u_n = \sum(u_n + |u_n|) - \sum |u_n|$ converge.

Dans le cas général (où (u_n) est une suite complexe) on écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \operatorname{Re} u_n + i \operatorname{Im} u_n \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{l} 0 \leqslant |\operatorname{Re} u_n| \leqslant |u_n| \\ 0 \leqslant |\operatorname{Im} u_n| \leqslant |u_n| \end{array}$$

Si la série $\sum |u_n|$ converge, alors d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs les séries $\sum |\operatorname{Re} u_n|$ et $\sum |\operatorname{Im} u_n|$ sont convergentes. Or ce sont des séries à termes réels, donc d'après ce qui précède les séries $\sum \operatorname{Re} u_n$ et $\sum \operatorname{Im} u_n$ convergent, puis par linéarité la série $u_n = \operatorname{Re} u_n + i \operatorname{Im} u_n$ converge. □

Remarque. Démonstration alternative dans le cas réel :

Pour tout nombre réel x on note :

$$x^+ = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad x^- = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Alors $x = x^+ - x^-$ et $|x| = x^+ + x^-$.

Par théorème de comparaison des séries à termes positifs les relations $0 \leqslant u_n^+ \leqslant |u_n|$ et $0 \leqslant u_n^- \leqslant |u_n|$ montrent que si la série $\sum |u_n|$ converge alors les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent.

Dans ce cas par combinaison linéaire la série $\sum u_n = \sum u_n^+ - \sum u_n^-$ converge.

Remarque. La réciproque est fausse.

Exemple 10. Convergence de $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$: la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à la fonction $f(x) = \ln(1+x)$ donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \left| \ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| = \left| \int_0^1 \frac{(-1)^n (1-t)^n}{(1+t)^{n+1}} \, dt \right| \leqslant \int_0^1 (1-t)^n \, dt = \frac{1}{n+1}$$

Ceci montre que la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge. Par contre la série de terme général $|u_n| = \dfrac{1}{n}$ diverge. Ainsi la série $\sum u_n$ converge mais ne converge pas absolument.

Remarque. Pour démontrer que la série $\sum |u_n|$ converge on dispose des théorèmes sur les séries à termes positifs.

Proposition (Inégalité triangulaire). *Si $\sum u_n$ converge absolument alors :*

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$$

Démonstration. L'inégalité triangulaire pour les complexes donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \left| \sum_{k=0}^{n} u_k \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |u_k|$$

Comme la série $\sum u_n$ converge absolument alors les deux suites ci-dessus convergent, et par théorème de comparaison on obtient bien :

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| \qquad \square$$

Proposition. *Soit (u_n) une suite réelle ou complexe et (v_n) une suite à termes réels positifs. Si $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ est convergente alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.*

Démonstration. Par définition, comme $u_n = O(v_n)$ alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée. On choisit un majorant M de la suite $\left(\left|\frac{u_n}{v_n}\right|\right)$. Comme (v_n) est réelle positive alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant |u_n| \leqslant M v_n$$

D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum |u_n|$ converge, donc la série $\sum u_n$ converge absolument. □

Exemple 11. Soit $s \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{C}$ tel que $|q| < 1$. Alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^s q^n$ converge absolument. En effet $(n^s q^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est dominée par $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

▷ **Exercice 6.**

C. Série exponentielle

Proposition. *Soit z un complexe. Alors la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$ converge, de somme :*

Cette série est appelée série exponentielle.

Démonstration. On fixe $z \in \mathbb{C}$ et on définit la fonction $f : \begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{tz}. \end{array}$

Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$, de dérivées : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [0,1] \quad f^{(n)}(t) = z^n f(t)$

La fonction $|f|$ est continue sur le segment $[0,1]$ donc elle admet un majorant M. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $\left|f^{(n+1)}\right|$ est donc majorée par $M|z|^{n+1}$.

L'inégalité de Taylor Lagrange montre que :

$$\forall t \in [0,1] \qquad \left| f(t) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!} \right| \leqslant M|z|^{n+1} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$$

En particulier pour $t = 1$:

$$\left| e^z - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \right| \leqslant M \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ceci est valable pour tout n. On sait par croissances comparées que $|z|^{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} o((n+1)!)$, et M ne dépend pas de n, donc par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

Ceci montre que la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge, de somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$. □

Démonstrations des théorèmes sur le développement décimal

Théorème. *Tout réel admet un et un seul développement décimal propre.*

Démonstration. On démontre tout d'abord l'existence.

Soit x un réel. On pose $a_0 = \lfloor x \rfloor$ puis $x_1 = x - a_0$: alors $a_0 \in \mathbb{N}$ et $x_1 \in [0,1[$.

On construit par récurrence deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que les a_n sont des chiffres (sauf a_0 qui est un entier naturel) et les x_n sont des éléments de $[0,1[$.

L'initialisation a été faite : $a_0 = \lfloor x \rfloor$ et $x_1 = x - a_0$.

Supposons que a_{n-1} et x_n on été définis pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. On pose alors :

$$a_n = \lfloor 10x_n \rfloor \qquad \text{et} \qquad x_{n+1} = 10x_n - a_n$$

Comme $x_n \in [0,1[$ alors $10x_n \in [0,10[$, et donc a_n est un chiffre. Ensuite $x_{n+1} = 10x_n - \lfloor 10x_n \rfloor$ donc x_{n+1} appartient à l'intervalle $[0,1[$.

Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont donc construites par récurrence.

On a démontré que la série de terme général $\frac{a_k}{10^k}$ converge. Démontrons que $x = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$.

Pour ceci on note :

$$\mathcal{P}_n : \qquad x - a_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} = \frac{x_{n+1}}{10^n}$$

On démontre par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Par construction $x - a_0 = x_1$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité. Supposons que la propriété $\mathcal{P}_{n-1}$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$:

$$x - a_0 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{10^k} = \frac{x_n}{10^{n-1}}$$

Par construction $x_{n+1} = 10x_n - a_n$ donc :

$$\frac{x_{n+1}}{10^n} = \frac{x_n}{10^{n-1}} - \frac{a_n}{10^n} = x - a_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k}$$

La propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie. Ceci prouve l'hérédité.

Conclusion. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Comme tous les termes x_n sont dans l'intervalle $[0,1[$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant x - a_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} \leqslant 10^{-n}$$

Par théorème d'encadrement on obtient $x = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$, et donc x admet le développement décimal $x = a,\overline{a_1 a_2 \ldots}$.

On démontre par l'absurde que ce développement décimal est propre.

S'il est impropre alors à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$ tous les a_k valent 9, ce qui donne :

$$x = a_0 + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{a_k}{10^k} + \sum_{k=N}^{+\infty} \frac{9}{10^k}$$

D'après la propriété $\mathcal{P}_{N-1}$:

$$\frac{x_N}{10^{N-1}} = \sum_{k=N}^{+\infty} \frac{9}{10^k}$$

On calcule que $\sum\limits_{k=N}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{1}{10^{N-1}}$, donc $x_N = 1$. Or par construction : $x_N \in [0, 1[$.

Cette contradiction montre que le développement décimal obtenu est propre.

Il reste à démontrer l'unicité. On raisonne par l'absurde, en supposant que x admet deux développements décimaux propres distincts :

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_k}{10^k}$$

Ces deux développements décimaux propres étant distincts, il existe un entier n tel que $a_n \neq b_n$. Soit N le plus petit de ces entiers. Alors : $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, …, $a_{N-1} = b_{N-1}$ mais $a_N \neq b_N$. Par soustraction :

$$\frac{a_N - b_N}{10^N} = \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{b_k - a_k}{10^k}$$

Comme les a_k et les b_k sont des chiffres alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad -9 \leqslant b_k - a_k \leqslant 9$$

Par somme :

$$\forall n \geqslant N+1 \qquad -9 \sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{10^k} \leqslant \sum_{k=N+1}^{n} \frac{b_k - a_k}{10^k} \leqslant 9 \sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{10^k}$$

Par théorème de comparaison :

$$-9 \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{10^k} \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{b_k - a_k}{10^k} \leqslant 9 \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{10^k} \tag{1}$$

Ceci donne :

$$-1 \leqslant a_N - b_N \leqslant 1$$

Démontrons que ces deux inégalités sont strictes. Supposons que $a_N - b_N = 1$. La seconde partie de l'équation (1) donne :

$$\sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{9 - b_k + a_k}{10^k} = 0$$

Tous les termes de cette série sont positifs, donc :

$$\forall n \geqslant N+1 \qquad \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{9-b_k+a_k}{10^k} \geqslant \frac{9-b_n+a_n}{10^n}$$

Ceci implique que $b_n = 9 + a_n$, donc $a_n = 0$ et $b_n = 9$. Or les développements décimaux sont propres donc b_n ne peut être égal à 9 à partir du rang $N+1$. Cette contradiction montre que $a_N - b_N < 1$.

De même on prouve que $-1 < a_N - b_N$, et ainsi finalement $-1 < a_N - b_N < 1$.

Or a_N et b_N sont entiers, donc $a_N - b_N = 0$, puis $a_N = b_N$. Ceci contredit le fait qu'ils soient distincts.

On aboutit à une contradiction, donc le développement décimal propre de x est uniquement déterminé. □

Théorème. *Un réel x est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang.*

Démonstration. Supposons que le développement décimal $a_0, \overline{a_1 a_2 \ldots}$ de x est périodique de période $T \geqslant 1$ à partir du rang N. Alors :

$$\forall n \geqslant N \qquad a_{n+T} = a_n$$

Par définition du développement décimal :

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{10^k} + \sum_{k=N}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$$

Ceci donne

$$10^T x = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{10^{k-T}} + \sum_{k=N}^{+\infty} \frac{a_k}{10^{k-T}}$$

Par changement de variable dans l'écriture de x :

$$x = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{10^k} + \sum_{k=N+T}^{+\infty} \frac{a_{k-T}}{10^{k-T}} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{10^k} + \sum_{k=N+T}^{+\infty} \frac{a_k}{10^{k-T}}$$

Par soustraction

$$\begin{aligned}(10^T-1)x &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{10^{k-T}} - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{10^k} + \sum_{k=N}^{N+T-1} \frac{a_k}{10^{k-T}} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{10^{k-T}} - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{10^k} + \sum_{k=0}^{T-1} \frac{a_{k+N}}{10^{k-T+N}}\end{aligned}$$

Le membre de droite est rationnel car c'est une somme de sommes finies de rationnels. Comme $10^T - 1$ est entier non-nul, donc x est rationnel.

La réciproque est admise. On peut la comprendre en remarquant que lors de la division de p par q, les restes successifs sont des entiers compris entre 0 et $q-1$. On retrouve donc au bout d'un certain nombre d'étapes un reste déjà vu, et alors le développement décimal est réitéré de façon cyclique. □