TD. A13
Séries

Exercices de cours

1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

a. Calculer les 4 premières sommes partielles de la série de terme général u_n.

b. Établir une conjecture pour exprimer la valeur des sommes partielles en fonction de n, et démontrer cette conjecture.

c. Démontrer que la série de terme général u_n est convergente et donner sa somme.

d. Calculer les restes R_n de cette série.

2 Démontrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leurs sommes.

$$\sum_{n\geqslant 3} \frac{8}{3^{n-1}} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{5^n}{6^n} \qquad \sum_{n\geqslant 1} e^{-n} \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{3^n - 2^{n+1}}{4^n}$$

3 Soit q un réel. Le but de cet exercice est de démontrer que la série de terme général nq^n converge si et seulement si $|q| < 1$, et de calculer sa somme dans ce cas.

a. Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 0} nq^n$ diverge si $|q| \geqslant 1$.

Soit $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1, 1[$.

b. Exprimer $S_n(x)$ sans signe somme.

c. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction S_n est dérivable et donner deux expressions de sa dérivée, avec et sans signe somme.

d. En déduire, pour tout x tel que $|x| < 1$, la limite de $xS_n'(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

e. Conclure.

4 Les séries suivantes sont-elles convergentes ?

a. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\sqrt{n+1}}{(n-1)^2 \ln^2 n}$

c. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}} - \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}}\right)$

b. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)$

d. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}} - \frac{1}{\sqrt[4]{n+\frac{3}{2}}}\right)$

5 Donner un équivalent de $\binom{2n}{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

6 Démontrer que les séries suivantes sont convergentes.

a. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin n}{n^2}$

b. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} e^{(in-1)n}$

Travaux dirigés

1 Pour tout entier $n > 0$ on pose :

$$u_n = \frac{1}{n^2 + 2n}$$

a. Déterminer deux constantes réelles α et β telles que :

$$\forall n \geqslant 1 \quad u_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n+2}$$

b. En déduire que la série $\sum u_n$ converge et donner sa somme.

2 Reproduire l'exercice précédent avec la série de terme général :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \frac{1}{(n+2)(n+5)}$$

3 Démontrer que les séries suivantes sont convergentes et donner leurs valeurs.

a. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{5 + (-1)^n}{4^n}$

b. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{2^n + 1}{3^n}$

c. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\binom{n}{2}}$

d. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{2n+1}{(n^2+n)^2}$

e. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{(n+1)!}$

f. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{e^{i\frac{n\pi}{3}}}{2^n}$

g. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n2^n}{(n-1)!}$

h. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1 + \frac{2}{n^2+3n}\right)$

i. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{3^n}$

j. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{(2t+3)^2}$

k. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$

4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $u_n = \dfrac{1}{2^n} \tan \dfrac{\pi}{2^{n+1}}$

a. Simplifier l'expression : $\dfrac{1}{\tan x} - \dfrac{2}{\tan 2x}$

b. Démontrer que la série de terme général u_n converge et calculer sa somme.

5 Pour tout $n \geqslant 2$ on pose :

$$u_n = -\ln\left(\cos\frac{\pi}{2^n}\right)$$

On note S_n la somme partielle associée à u_n puis :

$$T_n = S_n - \ln\left(\sin\frac{\pi}{2^n}\right)$$

a. Démontrer que la suite (T_n) est arithmétique.

b. En déduire le terme général de S_n.

c. Démontrer que la série de terme général u_n est convergente et calculer sa somme.

6 Les séries suivantes sont-elles convergentes ?

a. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n+3}$ b. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt[4]{n}}$ c. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^n}{\ln n}$

d. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{3^n}{3n^2}$ e. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{3n^2}{3^n}$ f. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln n}{n^3}$

g. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{\cos n}{n!}$ h. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{i^n}{n}$ i. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{\arctan n}{n^2+1}$

j. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^2\ln n}{e^n}$ k. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{2^n}{\operatorname{ch} n}$ l. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}e^{-\sqrt{n}}$

m. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\sin\left(\tfrac{1}{n}\right)-\tan\left(\tfrac{1}{n}\right)\right)$ n. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{e}{n}\right)^n$

o. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(-1)^n\sqrt{n}-1}$ p. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\sin\left((n^2+1)\frac{\pi}{n}\right)$

q. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}\right)$ r. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+1]{n}\right)$

7 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs.

a. On suppose que la série $\sum u_n$ converge. Démontrer que les séries

$$\sum u_n^2 \qquad \sum\frac{u_n}{1+u_n} \qquad \sum\frac{u_n}{1-u_n}$$

convergent.

b. Les réciproques sont-elles vraies ?

8 Les séries suivantes sont-elles convergentes ?

a. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln n}{n^2}$ b. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{\sqrt{n}\ln^2 n}$

c. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n\ln n}$ d. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n\ln^2 n}$

On pourra en comparer certaines avec une intégrale.

9 Démontrer que la série

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln n}{n}$$

diverge et en donner un équivalent en $+\infty$.

10 Donner un équivalent en $+\infty$ du reste de la série :

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$$

11 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs.

On suppose que $(\sqrt[n]{u_n})$ converge vers $a\in[0,1[$.

a. Soit q un réel appartenant à $]a,1[$. Démontrer qu'à partir d'un certain rang : $u_n\leqslant q^n$.

b. En déduire que la série de terme général u_n est convergente.

12 Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on pose :

$$u_n = H_n-\ln n \quad\text{où}\quad H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

a. Écrire u_n comme somme partielle d'une série.

b. En déduire que la suite (u_n) converge.

Sa limite est la *constante d'Euler* γ.

13 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0=1 \quad\text{et}\quad \forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=u_ne^{-u_n}$$

a. Démontrer que la suite (u_n) est positive, puis qu'elle converge et déterminer sa limite.

b. Soit S_n la somme partielle de la série de terme général u_n. Simplifier e^{-S_n} et en déduire la nature de la série de terme général u_n.

14 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On note :

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad P_n=\prod_{k=0}^{n}u_k$$

On dit que le produit infini $\prod u_n$ converge si la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Les produits infinis suivants convergent-ils ?

a. $\displaystyle\prod_{n\geqslant 1}\sqrt[n]{2}$ b. $\displaystyle\prod_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ c. $\displaystyle\prod_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{2}{n^2}\right)$

d. $\displaystyle\prod_{n\geqslant 3}\left(1-\frac{2}{n}\right)$ e. $\displaystyle\prod_{n\geqslant 1}n\operatorname{sh}\frac{1}{n}$ f. $\displaystyle\prod_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^n$

15 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive, et :

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad v_n=\frac{u_n}{(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_n)}$$

a. Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 0}v_n$ converge et que sa somme est inférieure ou égale à 1.

b. Démontrer que sa somme est égale à 1 si et seulement si la série $\sum u_n$ diverge.

16 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $B_n=\sum\limits_{k=0}^{n}b_k$.

a. Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n}a_kb_k=a_nB_n+\sum_{k=0}^{n-1}(a_k-a_{k+1})B_k$$

On suppose que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est réelle, décroissante et qu'elle converge vers 0.

b. Démontrer que la série $\sum(a_n-a_{n+1})$ converge absolument.

c. En déduire que la série $\sum((a_n-a_{n+1})B_n)$ converge absolument.

d. Démontrer que la série $\sum(a_nb_n)$ converge.

e. Application. Soit $x\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$.

Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{e^{inx}}{n^\alpha}$ converge.