Corrigé du T. D. B11
Matrices et applications linéaires

1 Soit n et p deux entiers naturels non-nuls.
Soit $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$, $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K})$.
Justifier que ${}^tXAY$ et ${}^tY\,{}^tAX$ sont bien définies et égales.

Les matrices ${}^tX$, A, Y sont de tailles respectives $(1, n)$, (n, p) et $(p, 1)$, donc leur produit est bien défini, c'est une matrice de taille $(1, 1)$.
De même les matrices ${}^tY$, ${}^tA$, X sont de tailles respectives $(1, p)$, (p, n) et $(n, 1)$, donc leur produit est bien défini, c'est une matrice de taille $(1, 1)$.
Ces matrice sont donc symétriques, ce qui donne :

$$ {}^tXAY = {}^t\left({}^tXAY\right) = {}^tY\,{}^tAX $$

2 On définit l'application linéaire

$$ f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (y + 3z, x - 2y + 2z) \end{array} $$

et on note : $\mathcal{B} = ((1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1))$ $\mathcal{B}' = ((1, 1), (1, -1))$

a. Démontrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
b. Donner la matrice de f dans les bases canoniques, puis dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

On note u_1, u_2, u_3 les trois vecteurs de la famille $\mathcal{B}$, et v_1, v_2 ceux de la famille $\mathcal{B}'$.

a. Deux méthodes sont proposées. La première est la méthode classique, la seconde utilise les résultats de la fin du chapitre.
Méthode 1. On démontre que les familles $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont libres maximales.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Alors :

$$ \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} $$

La somme des trois lignes donne $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, et en retirant chacune des lignes on obtient $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
On a donc prouvé que la famille $\mathcal{B}$ est libre.

Elle contient trois vecteurs, et $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, donc c'est une famille libre maximale. En conséquence c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

Les vecteurs $v_1 = (1,1)$ et $v_2 = (1,-1)$ ne sont pas colinéaires. La famille $\mathcal{B}'$ est donc libre, elle est libre maximale car elle contient deux vecteurs et $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2, donc elle est une base de $\mathbb{R}^2$.

Méthode 2. On calcule le rang des familles $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
Par propriété le rang d'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est le rang de la matrice obtenue en plaçant ses vecteurs en colonnes. Ainsi on calcule par opérations élémentaires :

$$\operatorname{rg}\mathcal{B} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&1&1\end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&0&2\end{pmatrix} = 3$$

$$\operatorname{rg}\mathcal{B}' = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&1\\0&-2\end{pmatrix} = 2$$

De plus, une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est une base de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si elle est de rang n. On en déduit que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

b. On note e_1, e_2, e_3 les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et e_1', e_2' ceux de la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Comme :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (0,1) &&= 0e_1' + 1e_2' \\ f(e_2) &= (1,-2) &&= 1e_1' - 2e_2' \\ f(e_3) &= (3,2) &&= 3e_1' + 2e_2' \end{aligned}$$

Alors la matrice de f dans les bases canoniques est :

$$M_{\mathcal{B}_3\mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix}0&1&3\\1&-2&2\end{pmatrix}$$

On rappelle que les colonnes de cette matrice sont les réprésentations matricielles des vecteurs $f(e_j)$ dans la base (e_1', e_2').
D'autre part la matrice d'une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ se lit naturellement si on exprime les vecteurs en colonne :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix}y+3z\\x-2y+2z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1&3\\1&-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \end{array}$$

On calcule ensuite :

$$\begin{aligned} f(u_1) &= f(1,1,0) = (1,-1) &&= 0v_1 + 1v_2 \\ f(u_2) &= f(1,0,1) = (3,3) &&= 3v_1 + 0v_2 \\ f(u_3) &= f(0,1,1) = (4,0) &&= 2v_1 + 2v_2 \end{aligned}$$

On en déduit la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$:

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix}0&3&2\\1&0&2\end{pmatrix}$$

3 Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P & \longmapsto & (P(1), P'(-1)) \end{array}$

puis : $P_1 = X - 1 \qquad P_2 = X + 1 \qquad P_3 = (X+1)^2$

a. Justifier que f est linéaire.

b. Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

c. Donner la matrice A de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et de $\mathbb{R}^2$.

d. Donner la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_2$ ($\mathcal{B}_2$ étant la base canonique de $\mathbb{R}^2$).

a. La spécialisation des polynômes en un point est linéaire donc l'application $P \mapsto P(1)$ est linéaire.

La dérivation des polynômes est linéaire donc l'application $P \mapsto P'$ est linéaire, puis par composition avec la spécialisation en -1 l'application $P \mapsto P'(-1)$ est linéaire.

Les deux composantes de f sont linéaires donc f est linéaire.

b. Méthode 1.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$.

Par équivalences successives :

$$\begin{array}{rl}
 & \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\
\iff & \lambda_1(X-1) + \lambda_2(X+1) + \lambda_3(X^2+2X+1) = 0 \\
\iff & \lambda_3 X^2 + (\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3)X + (-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) = 0 \\
\iff & \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \\
\iff & \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_2 + 3\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \\
\iff & \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0
\end{array}$$

Ceci montre que la famille $\mathcal{B}$ est libre.

Elle contient trois vecteurs, et $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension 3, donc c'est une famille libre maximale. En conséquence c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Méthode 2.

On calcule le rang de la famille $\mathcal{B}$. Par propriété il est égal au rang de la matrice dont les colonnes sont les représentations matricielles des vecteurs de $\mathcal{B}$ dans la base canonique (dans n'importe quelle base en fait).

La représentation matricielle de la famille $\mathcal{B}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est :

$$M_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule par opérations élémentaires le rang de cette matrice, qui est donc le rang de la famille $\mathcal{B}$:

$$\operatorname{rg} \mathcal{B} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

La famille $\mathcal{B}$ est une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$ qui est de dimension 3, elle est de rang 3 donc par propriété c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

c. On calcule :

$$\begin{array}{llllll} f(1) & = (1,0) & \text{car si} & P = 1 & \text{alors} & P' = 0 \\ f(X) & = (1,1) & \text{car si} & P = X & \text{alors} & P' = 1 \\ f(X^2) & = (1,-2) & \text{car si} & P = X^2 & \text{alors} & P' = 2X. \end{array}$$

La matrice de f dans les bases canoniques est donc :

$$M_{\mathcal{B}_c\mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

d. On calcule :

$$\begin{array}{llllll} f(P_1) = (0,1) & \text{car} & P_1 = X - 1 & \text{et} & P_1' = 1 \\ f(P_2) = (2,1) & \text{car} & P_2 = X + 1 & \text{et} & P_2' = 1 \\ f(P_3) = (4,0) & \text{car} & P_3 = (X+1)^2 & \text{et} & P_3' = 2(X+1). \end{array}$$

La matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_2$ est donc :

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et p un projecteur de E.
Donner la matrice de p dans une base adaptée à la somme directe $E = \operatorname{im} p \oplus \ker p$.

Soit $F = \operatorname{im} p$ et $G = \ker p$. Par théorème F et G sont supplémentaires dans E.

Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de F, $(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ une base de G. Comme $E = F \oplus G$ alors d'après le théorème de la base adaptée la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.

Pour tout $i = 1, \ldots, r$, comme $e_i \in \operatorname{im} p$ alors $p(e_i) = e_i$.

Pour tout $i = r+1, \ldots, n$, comme $e_i \in \ker p$ alors $p(e_i) = 0_E$.

On en déduit que la matrice de p dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ est :

$$A = \left(\begin{array}{c:c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right)$$

r r n n

5 Soit $E = \mathbb{R}^2$, puis $u_1 = (2, 1)$ et $u_2 = (2, -1)$.
La famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
Donner les matrices de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ et de la base $\mathcal{B}$ à la base canonique.

La matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ est la matrice dont les colonnes sont les représentations matricielles des vecteurs de $\mathcal{B}$ dans la base canonique :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base canonique est la matrice inverse de P.
D'après la formule $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$:

$$P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

On peut aussi répondre en exprimant les vecteurs de la base canonique en fonction de ceux de la base $\mathcal{B}$.
Ici on constate que $u_1 + u_2 = (4, 0) = 4e_1$ et $u_1 - u_2 = (0, 2) = 2e_2$, donc $e_1 = \frac{1}{4}u_1 + \frac{1}{4}u_2$ et $e_2 = \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2$. Ainsi la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base canonique est :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

6 Reproduire l'exercice précédent pour $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ avec $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,1,0)$, $u_3 = (1,0,0)$.

La matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ est la matrice dont les colonnes sont les représentations matricielles des vecteurs de $\mathcal{B}$ dans la base canonique, on place donc u_1, u_2 et u_3 en colonnes :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour le passage dans l'autre sens les deux méthodes sont efficaces.

Méthode 1.

La matrice P est inversible car c'est une matrice de passage.

De plus, comme P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ alors sa matrice inverse est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base canonique.

On applique l'algorithme du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned}
PP^{-1} = I_3 \quad &\iff \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} (L_3 \leftarrow L_3 - L_2) \\ (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \end{matrix} \\
&\iff \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} (L_1 \leftarrow L_1 + L_2) \\ (L_1 \leftarrow L_1 + L_3) \\ (L_2 \leftrightarrow L_3) \end{matrix} \\
&\iff \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} (L_2 \leftarrow -L_2) \\ (L_3 \leftarrow -L_3) \end{matrix} \\
&\iff \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base canonique est donc :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Méthode 2.

On rappelle que :

$$u_1 = (1,1,1) \qquad u_2 = (1,1,0) \qquad u_3 = (1,0,0)$$

On remarque que :

$$e_1 = u_3 \qquad e_2 = u_2 - u_3 \qquad e_3 = u_1 - u_2$$

Il s'agit des expressions des vecteurs de la base canonique en fonction de ceux de la base $\mathcal{B}$. On les place en colonnes pour obtenir la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base canonique :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les schémas suivants expliquent les constructions précédentes :

$$P = P_{\mathcal{B}_c\mathcal{B}} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \end{array} \qquad P^{-1} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}_c} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{matrix} \end{array}$$

On vérifie que $PP^{-1} = I_3$ et $P^{-1}P = I_3$.

> 7 (Suite des deux exercices précédents.)
> Dans les deux cas suivants donner la matrice de f dans la base canonique, puis dans la base $\mathcal{B}$.
> Vérifier ensuite le théorème reliant toutes les matrices calculées.
> a. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-2y, 2x+2y) \end{array}$ b. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x, x-z, x-y) \end{array}$

a. La matrice dans la base canonique est :

$$M_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ on calcule :

$$f(u_1) = f(2,1) = (0,6) \qquad \text{et} \qquad f(u_2) = f(2,-1) = (4,2)$$

Il faut exprimer ces vecteurs dans la base $\mathcal{B}$:

$$f(u_1) = 3u_1 - 3u_2 \qquad \text{et} \qquad f(u_2) = 2u_1$$

On en déduit :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Les schémas suivants expliquent ces deux constructions :

$$M_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \end{matrix} \end{array} \qquad M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} f(u_1) & f(u_2) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix} \end{array}$$

On note $A = M_{\mathcal{B}_c}(f)$, $A' = M_{\mathcal{B}}(f)$, et P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$. Alors par propriété :

$$A = PA'P^{-1}$$

On vérifie effectivement que :

$$PA'P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} = A$$

b. La matrice dans la base canonique est :

$$M_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ on calcule :

$$f(u_1) = f(1,1,1) = (1,0,0) = u_3$$

$$f(u_2) = f(1,1,0) = (1,1,0) = u_2$$

$$f(u_3) = f(1,0,0) = (1,1,1) = u_1$$

On en déduit :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les schémas suivants expliquent ces deux constructions :

$$M_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \qquad M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array}$$

On note de nouveau $A = M_{\mathcal{B}_c}(f)$, $A' = M_{\mathcal{B}}(f)$, et P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$. Alors par propriété :

$$A = PA'P^{-1}$$

On vérifie par le calcul :

$$\begin{aligned} PA'P^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = A \end{aligned}$$

(8) On définit les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Déterminer le noyau et l'image de A.

b. Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A est B.

c. En déduire que A et B sont semblables.

a. L'équivalence par ligne

$$\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

montre que le noyau de A est l'ensemble des vecteurs (x, y) tels que $2x - 3y = 0$. On en déduit que $\ker A = \mathrm{Vect}\left((3, 2)\right)$.

L'équivalence par colonnes

$$\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

montre que l'image de A est le sous-espace vectoriel engendré par $(3, 2)$, *i.e.*, $\mathrm{im}\, A = \mathrm{Vect}\left((3, 2)\right)$.

b. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.

Si une base $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ est telle que B est la matrice de f dans cette base alors $f(u_1) = 0$ et $f(u_2) = u_1$.

Ceci impose que u_1 est dans le noyau de f, et u_2 est un antécédent de u_1 par f.

On remarque que $f(e_1) = (6, 4) = 2(3, 2)$. On peut donc poser $u_2 = e_1$ et $u_1 = (6, 4)$. Alors la famille (u_1, u_2) est bien une base de $\mathbb{R}^2$ car ses vecteurs ne sont pas colinéaires. Comme $f(u_1) = 0$ et $f(u_2) = u_1$ alors la matrice de f dans cette base est B.

c. Comme A et B représentent l'endomorphisme f dans des bases différentes alors A et B sont semblables.

Plus précisément on a $A = PBP^{-1}$ où P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$.

Dans notre cas $P = \left(\begin{smallmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. On peut calculer que $P^{-1} = \frac{1}{6}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -6 \end{smallmatrix}\right)$, puis vérifier que $PBP^{-1} = A$.

9 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et p un projecteur de E. Démontrer que $\operatorname{tr} p = \operatorname{rg} p$.

Soit p un projecteur et r son rang. Alors r est la dimension de $\operatorname{im} p$. Nous avons vu dans l'exercice 5 ci-dessus que la matrice dans une base adaptée à la somme directe $E = \operatorname{im} p \oplus \ker p$ est :

$$A = \left(\begin{array}{c:c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right)$$

avec le bloc identité de taille r et A de taille n.

Par propriété la traice de p est la trace de sa matrice dans toute base de E, donc $\operatorname{tr} p = \operatorname{tr} A$. Or $\operatorname{tr} A = r$, donc $\operatorname{tr} p = \operatorname{rg} p$.

10 Calculer le rang des objets suivants.

$\mathcal{F}_1 = ((6,9),(-2,-3))$

$$S : \begin{cases} x - 2y = -1 \\ 7x + 3y = 10 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases}$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{F}_2 = ((i, 1+2i),(2+3i, 1+i))$

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^5 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (y+z, x+t, 0, y+z, z+t) \end{array}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

On obtient :

$$\operatorname{rg} \mathcal{F}_1 = 1 \qquad \operatorname{rg} S = 2 \qquad \operatorname{rg} M_1 = 4 \qquad \operatorname{rg} \mathcal{F}_2 = 2 \qquad \operatorname{rg} M_2 = 2 \qquad \operatorname{rg} f = 3$$

- La famille $\mathcal{F}_1$ est une famille de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Son rang est :

$$\operatorname{rg} \mathcal{F}_1 = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$$

  Les opérations élémentaires sur les lignes $(L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1)$, $(L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2)$ et $(L_2 \leftarrow L_2 - L_1)$ donnent :

$$\operatorname{rg} \mathcal{F}_1 = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

  .

- Le système S est un système de trois équations à deux inconnues. Son rang est :

$$\operatorname{rg} S = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 7 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Par opérations élémentaires on obtient :

$$\operatorname{rg} S = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 17 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = 2$$

- Le rang de la matrice M_1 est :

$$\operatorname{rg} M_1 = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

On utilise la ligne 2 pour pivot :

$$\operatorname{rg} M_1 = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -8 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On intervertit les lignes 1 et 2 puis on utilise la ligne 4 pour pivot :

$$\operatorname{rg} M_1 = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -8 \\ 0 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \end{pmatrix}$$

Finalement par soustraction ($L_3 \leftarrow L_3 - L_4$) :

$$\operatorname{rg} M_1 = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 4$$

On peut en déduire que la matrice M_1 est inversible.

- La famille $\mathcal{F}_2$ est une famille de deux vecteurs de $\mathbb{C}^2$. Son rang est :

$$\operatorname{rg} \mathcal{F}_2 = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} i & 2+3i \\ 1+2i & 1+i \end{pmatrix}$$

On applique les opérations élémentaires ($L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$), ($L_1 \leftarrow iL_1$), ($L_2 \leftarrow L_2 - L_1$) :

$$\operatorname{rg} \mathcal{F}_2 = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} i & 2+3i \\ 1+2i & 1+i \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} i & 2+3i \\ 1 & -3-5i \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} i & 2+3i \\ i & 5-3i \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} i & 2+3i \\ 0 & 3-6i \end{pmatrix} = 2$$

On peut en déduire que la famille $\mathcal{F}_2$ est une base de $\mathbb{C}^2$.

- Le rang de la matrice M_2 est :

$$\operatorname{rg} M_2 = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Par opérations élémentaires on obtient :

$$\operatorname{rg} M_2 = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Une autre méthode aurait été de remarquer que $C_1 = \frac{1}{2}(C_2+C_3)$, et comme les colonnes C_1 et C_2 ne sont pas colinéaires alors $\operatorname{rg} M_2 = 2$.

- Le rang de l'application linéaire f est le rang de sa matrice dans la base canonique :

$$\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Par opérations élémentaires on obtient :

$$\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

On aurait aussi pu calculer le noyau de f :

$$\ker f = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x = -y = z = -t \right\} = \operatorname{Vect}\left((-1,1,-1,1)\right)$$

Comme ce noyau est de dimension 1 alors d'après le théorème du rang f est de rang 3.

1 Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Soit u_1, u_2 et u_3 les vecteurs de coordonnées respectives $(2, 1, -1)$, $(2, -1, 1)$ et $(0, 2, 2)$.

a. Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b. Calculer $f(u_3) + 5u_2$, puis exprimer la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}$.

c. Déterminer le rang de f ainsi qu'une base de son noyau.

d. Démontrer que $f^3 = 0$.

a. Pour démontrer que la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ on calcule le rang de sa matrice dans la base canonique.

En effet, il s'agit d'une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, donc elle est une base si et seulement si elle est de rang 3. Et le rang d'une famille de vecteurs est le rang de la matrice dont ils constituent les colonnes :

$$\operatorname{rg} \mathcal{B} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On commence par les opérations $(L_3 \leftarrow L_3 + L_2)$ et $(L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1)$ puis on applique l'algorithme habituel du pivot de Gauss :

$$\operatorname{rg} \mathcal{B} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 3$$

Comme $\mathcal{B}$ est une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ de rang 3 alors $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b. Pour calculer $f(u_3)$ on procède de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad f(u_3) = (-4, 8, -8)$$

On obtient

$$f(u_3) + 5u_2 = (-4, 8, -8) + (10, -5, 5) = (6, 3, -3) = 3u_1$$

On peut même écrire :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

donc $\qquad f(u_3) + 5u_2 = 3u_1$

Pour déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ on exprime $f(u_1)$, $f(u_2)$, $f(u_3)$ en fonction de u_1, u_2 et u_3. On calcule :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$f(u_1) = 0_{\mathbb{R}^3} \qquad \text{et} \qquad f(u_2) = 4u_1$$

On a obtenu :

$$\begin{aligned} f(u_1) &= 0_{\mathbb{R}^3} \\ f(u_2) &= 4u_1 \\ f(u_3) &= 3u_1 - 5u_2 \end{aligned}$$

On en déduit la matrice de f dans a base $\mathcal{B}$:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le schéma suivant explique cette construction :

$$A' = M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array}$$

c. Par propriété le rang de f est le rang de sa matrice *dans n'importe quelle base*. Or la matrice A' ci-dessus est de rang 2, donc f de rang 2.
D'après le théorème du rang, comme f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ alors :

$$\dim\ker f + \operatorname{rg} f = \dim \mathbb{R}^3 = 3$$

Le noyau de f est donc de dimension 1.
On sait que u_1 appartient à ce noyau (car $f(u_1) = 0$). Comme il est non-nul il forme une famille libre, donc une famille libre maximale, et ainsi une base de $\ker f$.

$$\ker f = \operatorname{Vect}(u_1) = \operatorname{Vect}((2,1,-1))$$

d. On calcule A'^3 :

$$A'^2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{puis} \qquad A'^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$$

Comme A' est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ alors A'^3 est la matrice de $f \circ f \circ f$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$(M_{\mathcal{B}}(f))^3 = M_{\mathcal{B}}(f \circ f \circ f)$$

La matrice de $f \circ f \circ f$ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice nulle donc $f \circ f \circ f$ est l'application nulle de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

2 On note :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a. Justifier que P est la matrice de passage de la base canonique à une base $\mathcal{B}$ et calculer la matrice de passage dans l'autre sens.

b. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f(x, y, z) = (2x + 2y + z, -2x - y, x + y - z)$$

Donner la matrice de f dans la base canonique, puis dans la base $\mathcal{B}$.

Démontrer que : $f \circ f \circ f = -3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$

a. Pour justifier que la matrice P est une matrice de passage il suffit de montrer qu'elle est inversible, et pour ceci il suffit de montrer qu'elle est de rang 3.

Les opérations élémentaires sur les lignes en suivant l'algorithme du pivot de Gauss donnent :

$$\operatorname{rg} P = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3$$

La matrice P est de taille $(3, 3)$ et de rang 3, donc elle est inversible.

Elle est donc la matrice de passage de la base canonique à la base formée par ses colonnes, à savoir la base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ avec :

$$u_1 = (-1, 1, 1) \qquad u_2 = (1, -1, 1) \qquad u_3 = (1, 1, -1)$$

On a récupéré les colonnes de P. Le fait que P est inversible implique que cette famille est une base, inutile de le démontrer autrement.

La matrice de passage dans l'autre sens est la matrice inverse P^{-1}. On peut la calculer par l'algorithme du pivot de Gauss, ou alors l'obtenir directement par définition d'une matrice de passage. En effet on remarque que :

$$u_1 + u_2 = (0, 0, 2) = 2e_3 \qquad u_1 + u_3 = (0, 2, 0) = 2e_2 \qquad u_2 + u_3 = (2, 0, 0) = 2e_1$$

On en déduit :

$$e_1 = \tfrac{1}{2}u_2 + \tfrac{1}{2}u_3 \qquad e_2 = \tfrac{1}{2}u_1 + \tfrac{1}{2}u_3 \qquad e_3 = \tfrac{1}{2}u_1 + \tfrac{1}{2}u_2$$

La matrice de passage de la base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ à la base canonique $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ est donc :

$$Q = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}_c} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que $PQ = I_3$ ou que $QP = I_3$, donc que Q est bien la matrice inverse P^{-1}.

b. On peut représenter matriciellement f de la façon suivante :

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + 2y + z \\ -2x - y \\ x + y - z \end{pmatrix}$$

On lit alors la matrice de f dans la base canonique :

$$A = M_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ on exprime $f(u_1)$, $f(u_2)$, $f(u_3)$ dans la base (u_1, u_2, u_3). On calcule :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad f(u_1) = (1, 1, -1) = u_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad f(u_2) = (1, -1, -1) = -u_1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad f(u_3) = (3, -3, 3) = 3u_2$$

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est donc :

$$B = M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de $f \circ f \circ f$ est A^3 dans la base canonique et B^3 dans la base $\mathcal{B}$.
Il est plus rapide de calculer B^3 :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{puis} \qquad B^3 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = -3I_3$$

Ainsi la matrice de $f \circ f \circ f$ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice de $-3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ dans cette même base (car $M_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = I_3$, ceci quelle que soit la base $\mathcal{B}$), donc $f \circ f \circ f = -3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

3 On note :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} u_1 &= (5,2) \\ u_2 &= (2,1) \end{aligned}$$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont A est la matrice dans la base canonique.

a. Démontrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Donner la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ et sa matrice inverse.

b. Exprimer la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}$.

c. Calculer B^n pour tout entier n.

d. En déduire A^n pour tout entier n.

On peut calculer en préambule :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -11 & 30 \\ -6 & 16 \end{pmatrix}$$

On vérifiera à la fin de l'exercice que la formule obtenue pour A^n convient pour $n = 2$.

a. On calcule le rang de la famille $\mathcal{B}$ grâce à l'opération $(C_1 \leftarrow C_1 - 2C_2)$:

$$\operatorname{rg} \mathcal{B} = \operatorname{rg}(u_1, u_2) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Comme $\mathcal{B}$ est une famille de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ de rang 2 alors $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. La matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de $\mathcal{B}$, on la note P :

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base canonique est la matrice inverse de P :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

b. On calcule $f(u_1)$ et $f(u_2)$ grâce aux multiplications matricielles :

$$\begin{pmatrix} 3 & -10 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$f(u_1) = (-5, -2) = -u_1 \qquad f(u_2) = (-4, -2) = -2u_2$$

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est donc :

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

c. Comme la matrice B est diagonale alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad B^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$$

d. Comme :
- A est la matrice de f dans la base canonique.
- B est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
- P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$.

Alors :

$$A = PBP^{-1}$$

On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = (PBP^{-1})^n = PBP^{-1}PBP^{-1} \cdots PBP^{-1} = PB^nP^{-1}$$

On peut aussi remarquer que si A est la matrice de f dans la base canonique alors A^n est la matrice de $f \circ f \circ \cdots \circ f = f^n$, et de même dans la base $\mathcal{B}$, donc :
- A^n est la matrice de f^n dans la base canonique.
- B^n est la matrice de f^n dans la base $\mathcal{B}$.
- P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$.

Ceci implique :

$$A^n = PB^nP^{-1}$$

On calcule :

$$\begin{aligned} A^n = PB^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & -2(-1)^n \\ -2(-2)^n & 5(-2)^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5(-1)^n - 4(-2)^n & -10(-1)^n + 10(-2)^n \\ 2(-1)^n - 2(-2)^n & -4(-1)^n + 5(-2)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Une écriture plus concise est :

$$A^n = (-1)^n \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} + (-2)^n \begin{pmatrix} -4 & 10 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

On vérifie cette formule pour $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$:

$$\begin{aligned} A^0 &= \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 10 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \\ A^1 &= -\begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -4 & 10 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} = A \\ A^2 &= \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} -4 & 10 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 30 \\ -6 & 16 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La formule semble convenir.

4 Reproduire l'exercice précédent avec :

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -25 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}$$

On obtient $f(u_1) = u_1$ et $f(u_2) = (-3, -1) = u_2 - u_1$, cette dernière égalité demandant peut-être un calcul. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est donc :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On démontre par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad B^n = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad A^n = \begin{pmatrix} 1+10n & -25n \\ 4n & 1-10n \end{pmatrix} = I_2 + n \begin{pmatrix} 10 & -25 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}$$

5 Déterminer une base du noyau et de l'image de chacune des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 8 & 10 & 7 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

- Pour $M_1 = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

  L'image de M_1 est engendrée par ses colonnes C_1 et C_2. Comme $C_2 = 2C_1$ alors l'image est engendrée par la colonne C_1 :

  $$\operatorname{im} M_1 = \operatorname{Vect}\left((4, 2)\right)$$

  Pour le noyau on résout :

  $$M_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 4x + 8y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = -2y$$

  On en déduit :

  $$\ker M_1 = \{(-2y, y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}\left((-2, 1)\right)$$

  Le noyau et l'image de M_1 sont de dimension 1, ce qui confirme le théorème du rang : la somme de leurs dimensions est la dimension de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire le nombre de colonnes de M_1.

- Pour $M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

L'image de M_2 est engendrée par ses colonnes. Elle est invariante par opération sur les colonnes :

$$M_2 \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix} \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$\operatorname{im} M_2 = \operatorname{Vect}\left((1,0),(0,1),(0,0)\right) = \operatorname{Vect}\left((1,0),(0,1)\right) = \mathbb{R}^2$$

Remarque. Étant donnée une famille génératrice d'un espace vectoriel, on peut :

- ajouter à un vecteur un multiple d'un autre : $\operatorname{Vect}(u_1,u_2) = \operatorname{Vect}(u_1+\alpha u_2, u_2)$ où $\alpha \in \mathbb{K}$
- multiplier un vecteur par un scalaire non nul : $\operatorname{Vect}(u_1) = \operatorname{Vect}(\lambda u_1)$ où $\lambda \in \mathbb{K}^*$
- intervertir deux vecteurs : $\operatorname{Vect}(u_1,u_2) = \operatorname{Vect}(u_2,u_1)$

Ceci justifie que l'on peut appliquer les opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice pour déterminer une famille génératrice de son image.

Pour le noyau on résout, en appliquant le pivot de Gauss :

$$\begin{aligned}
M_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad & \iff \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \iff \quad \begin{pmatrix} 1 & -7 & -2 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \iff \quad \begin{pmatrix} 1 & -7 & -2 \\ 0 & 21 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \iff \quad \begin{pmatrix} 1 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \iff \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \iff \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{3}z \\ y = -\frac{1}{3}z \end{cases}
\end{aligned}$$

Remarques.

(i) On aurait pu agir directement sur la matrice M_2, sans écrire le système $M_2X = 0$.

(ii) Ainsi pour le noyau on applique des opérations élémentaires sur les lignes, alors que pour l'image on applique des opérations élémentaires sur les colonnes.

On déduit du calcul ci-dessus :

$$\ker M_2 = \left\{ \left(-\tfrac{1}{3}z, -\tfrac{1}{3}z, z\right) \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left((1,1,-3)\right)$$

On vérifie bien d'ailleurs que :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finalement $\operatorname{im} M_2$ est de dimension 2, $\ker M_2$ est de dimension 1, et M_2 a 3 colonnes donc le théorème du rang est bien vérifié : $2 + 1 = 3$.

- Pour $M_3 = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

  Par opérations élémentaires : (on commence par $(C_1 \leftarrow C_1 - 2C_2)$)

$$M_4 \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_4 \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  On en déduit :

$$\operatorname{im} M_4 = \operatorname{Vect}\left((-3,1,0),(0,0,1)\right) \qquad \ker M_4 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x = y = 0 \right\} = \{0_{\mathbb{R}_2}\}$$

  L'image est de dimension 2, le noyau de dimension nulle, la matrice M_4 a deux colonnes donc le théorème du rang est vérifié.

- Pour $M_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

  On obtient :

$$M_3 \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M_3 \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Ceci donne :

$$\operatorname{im} M_3 = \operatorname{Vect}\left((1,-1,1)\right) \qquad \text{et} \qquad \ker M_3 = \{ (x,y,z) \mid x - y + z = 0\}$$

  Pour le noyau on obtient :

$$\ker M_3 = \left\{ (y-z,y,z) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{Vect}\left((1,1,0),(-1,0,1)\right)$$

  L'image est de dimension 1, le noyau est de dimension 2, la matrice ayant 3 colonnes le théorème du rang est vérifié :

$$\dim \operatorname{im} M_3 + \dim \ker M_3 = 1 + 2 = 3$$

- Pour $M_5 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

  Par opérations élémentaires, en commençant par $(C_1 \leftarrow C_1 - C_2)$:

$$M_5 \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inutile d'aller plus loin. On constate que M_5 est de rang 3, or elle est de taille $(3,3)$, elle est donc inversible. Ceci montre que :

$$\operatorname{im} M_5 = \mathbb{R}^3 \qquad \ker M_5 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$$

- Pour $M_6 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 8 & 10 & 7 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

  On applique l'algorithme du pivot de Gauss sur les colonnes :

$$M_6 \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -2 & 10 & 7 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 13 & 13 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 12 & 13 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

  Ceci montre que :

$$\operatorname{im} M_6 = \operatorname{Vect}\left((1,12,0),(0,13,-1)\right)$$

  On pourrait aussi justifier que :

$$\operatorname{im} M_6 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 12x - y - 13z = 0 \right\}$$

  On vérifie d'ailleurs que les colonnes de M_6 (qui sont dans l'image de M_6) satisfont bien cette équation.

  Pour le calcul du noyau :

$$M_6 \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 10 & 7 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Ainsi :

$$\ker M_6 = \left\{ \left(-\tfrac{3}{2}z, \tfrac{1}{2}z, z\right) \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left((-3,1,2)\right)$$

  Le théorème du rang est satisfait, car la matrice M_6 à 3 colonnes, son image est de dimension 2, son noyau est de dimension 1, et par définition $3 = 2 + 1$.

6 Calculer le rang des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & -7 & 3 \\ 2 & 1 & -6 & 6 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 10 \\ 17 & 8 & 9 \\ -13 & 5 & 9 \\ 5 & 11 & 15 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & 5 & 2 \\ 5 & 6 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 35 & 15 & 5 & 1 \\ 20 & 10 & 4 & 1 \\ 10 & 6 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour calculer le rang d'une matrice on peut utiliser toutes les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes, elles ne changent pas le rang.
On obtient finalement :

$$\operatorname{rg} A = 3 \qquad \operatorname{rg} B = 3 \qquad \operatorname{rg} C = 2 \qquad \operatorname{rg} D = 3 \qquad \operatorname{rg} E = 3 \qquad \operatorname{rg} F = 4$$

Pour la matrice A on utilise l'algorithme classique du pivot de Gauss sur les lignes, en commençant par $(L_1 \leftarrow L_1 - L_3)$:

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix} = 3$$

De même pour la matrice B :

$$\operatorname{rg} B = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 8 \\ 0 & -7 & -28 & -21 \\ 0 & -5 & -20 & -10 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Pour la matrice C on commence par les opérations $(C_3 \leftarrow C_3 - C_2)$ puis $(C_2 \leftarrow C_2 - 2C_3)$ et $(C_3 \leftarrow C_3 - 3C_2)$:

$$\operatorname{rg} C = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 7 & 3 \\ 17 & 8 & 1 \\ -13 & 5 & 4 \\ 5 & 11 & 4 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 17 & 6 & 1 \\ -13 & -3 & 4 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 17 & 6 & -17 \\ -13 & -3 & 13 \\ 5 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Donc finalement :

$$\operatorname{rg} C = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 17 & 0 \\ -3 & -13 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Pour la matrice D on commence par intervertir les colonnes 1 et 3 puis on agit sur les lignes :

$$\operatorname{rg} D = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & -10 & -22 & 2 \\ 0 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

On applique les opérations ($L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$), ($L_4 \leftarrow L_4 - L_2$), puis ($L_2 \leftrightarrow L_4$) etc :

$$\operatorname{rg} D = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -14 & 14 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Pour la matrice E on agit sur les colonnes : ($C_1 \leftarrow C_1 - C_3$), ($C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1$), puis ($C_3 \leftarrow C_3 - 4C_2$) :

$$\operatorname{rg} E = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \\ -4 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -9 \end{pmatrix} = 3$$

Enfin pour la matrice F on commence par intervertir toutes les lignes et les colonnes, puis on applique les opérations successives ($L_5 \leftarrow L_5 - L_4$), ($L_4 \leftarrow L_4 - L_3$), ($L_3 \leftarrow L_3 - L_2$), ($L_2 \leftarrow L_2 - L_1$), et on continue :

$$\operatorname{rg} F = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 5 & 15 & 35 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 5 & 15 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4$$

7 On définit les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 12 & -8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}$$

Démontrer que l'une est la matrice d'un projecteur et l'autre d'une symétrie.

Déterminer leurs éléments caractéristiques.

A est la matrice du projecteur sur $\operatorname{Vect}((3,4))$ parallèlement à $\operatorname{Vect}((2,3))$.

B est la matrice de la symétrie par rapport à $\operatorname{Vect}((1,1))$ parallèlement à $\operatorname{Vect}((5,7))$.

8 Soit P la matrice :

$$P = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ -1 & 6 & -5 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a. Déterminer le noyau et l'image de P.

b. Démontrer que l'endomorphisme canoniquement associé à P est un projecteur et donner ses éléments caractéristiques.

On obtient $\ker P = \mathrm{Vect}\left((1,1,1)\right)$ et $\mathrm{im}\, P = \mathrm{Vect}\left((2,1,0),(5,0,-1)\right)$

On vérifie $p \circ p = p$ sur la base de $\mathrm{im}\, P$, on en déduit que P est la projection sur $\mathrm{im}\, P$ parallèlement à $\ker P$.

9 Démontrer que la matrice

$$S = \begin{pmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 6 & 7 & 6 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

est la matrice d'une symétrie et en préciser les éléments caractéristiques.

Soit s l'application linéaire canoniquement associée à la matrice S.

Comme S est une matrice de taille $(3,3)$ alors s est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. On notera $E = \mathbb{R}^3$ ci-dessous.

Un endomorphisme s est une symétrie si et seulement si $s \circ s = \mathrm{Id}_E$. On calcule donc S^2 :

$$S^2 = \begin{pmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 6 & 7 & 6 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Comme $S^2 = I_3$ alors $s^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ et donc par théorème s est une symétrie.

Plus précisément s est la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à F parallèlement à G où :

$$F = \{u \in E \mid s(u) = u\} \qquad \text{et} \qquad G = \{u \in E \mid s(u) = -u\}$$

Pour tout vecteur $u = (x,y,z)$ de E on note X sa représentation matricielle. On résout :

$$\begin{aligned} SX = X \quad &\iff \quad \begin{pmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 6 & 7 & 6 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\iff \quad \begin{pmatrix} -6 & -6 & -6 \\ 6 & 6 & 6 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \quad x+y+z=0 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$F = \left\{(-y-z,y,z) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathrm{Vect}\left((-1,1,0),(-1,0,1)\right)$$

De même :

$$\begin{aligned}
SX=-X \quad &\iff \quad \begin{pmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 6 & 7 & 6 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\iff \quad \begin{pmatrix} -4 & -6 & -6 \\ 6 & 8 & 6 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$G = \{(3z,-3z,z) \mid z\in\mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\left((3,-3,1)\right)$$

On a donc montré que S est la matrice de la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à $F = \mathrm{Vect}\left((1,0,-1),(0,1,-1)\right)$ parallèlement à $G=\mathrm{Vect}\left((3,-3,1)\right)$.

Une autre méthode pour déterminer les éléments caractéristiques F et G est d'utiliser le projecteur associé. En effet, comme $p=\frac{1}{2}(s+\mathrm{id}_E)$ alors sa matrice est :

$$P=\frac{1}{2}(S+I_3)=\begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \\ 3 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

De plus F est l'image de p (donc de P) et G est son noyau :

$$F=\operatorname{im} p \qquad \text{et} \qquad G=\ker p$$

On opère sur les colonnes pour l'image et sur les lignes pour le noyau :

$$P \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $F=\operatorname{im} P=\mathrm{Vect}\left((1,-1,0),(0,1,-1)\right)$. Puis :

$$P \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $G=\ker P=\{(3z,-3z,z) \mid z\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}\left((3,-3,1)\right)$.

10 Soit $E = \mathbb{R}^3$, F le sous-espace vectoriel de E d'équation $x + y + 2z = 0$, et G le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $(1, 0, 1)$.

a. Démontrer que $E = F \oplus G$ et donner une base $\mathcal{B}$ adaptée à cette somme directe.

b. Donner les matrices de passage de la base canonique $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$ et de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_c$.

On note p le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur F parallèlement à G et s la symétrie associée.

c. Déterminer la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$.

d. Déterminer la matrice de p puis celle de s dans la base canonique.

a. Commençons par chercher une base de F :

$$\begin{aligned} F = \{(x,y,z) \in E \mid x = -y - 2z\} &= \left\{(-y-2z, y, z) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left((-1,1,0), (-2,0,1)\right) \end{aligned}$$

On note $u_1 = (-1, 1, 0)$ et $u_2 = (-2, 0, 1)$: La famille (u_1, u_2) est génératrice de F.
On note $u_3 = (1, 0, 1)$: ce vecteur engendre G.
On calcule le rang de la famille (u_1, u_2, u_3), par opérations élémentaires sur les lignes :

$$\mathrm{rg}\,(u_1, u_2, u_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3$$

La famille (u_1, u_2, u_3) est une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, elle est de rang 3 donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
Comme $F = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2)$ et $G = \mathrm{Vect}\,(u_3)$ alors par théorème de la base adaptée F et G sont supplémentaires dans E (*i.e.*, $E = F \oplus G$), (u_1, u_2) est une base de F, (u_3) est une base de G, et donc la base (u_1, u_2, u_3) est adaptée à la somme directe $E = F \oplus G$.
On note $\mathcal{B}$ cette base : $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$

b. Par définition la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}$ dans la base canonique :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Par propriété la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base canonique est la matrice inverse P^{-1}.
On pourrait aussi obtenir cette matrice en exprimant les vecteurs de la base canonique en fonction des vecteurs u_1, u_2, u_3.
Mais ici on inverse plutôt la matrice P en utilisant l'algorithme du pivot de Gauss.
Les premières opérations utilisées sont $(L_1 \leftrightarrow L_2)$, $(L_2 \leftrightarrow L_3)$, puis $(L_3 \leftarrow L_3 + L_1)$ et

$(L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1)$:

$$\begin{aligned}
PP^{-1} = I_3 \quad &\iff \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\iff \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&\iff \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&\iff \quad P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

c. L'application p est le projecteur de E sur F parallèlement à G.
Comme u_1 et u_2 appartiennent à F alors $p(u_1) = u_1$ et $p(u_2) = u_2$.
Comme u_3 appartient à G alors $p(u_3) = 0_E$.
On en déduit la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d. Notons A la matrice de p dans la base canonique.
Comme B est la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$ et P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ alors :

$$A = PBP^{-1}$$

On calcule donc :

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On peut vérifier que les images de u_1 et de u_2 sont bien u_1 et u_2, et que l'image de u_3

est bien nulle, ceci de la façon suivante :

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad p(u_1) = u_1$$
$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad p(u_2) = u_2$$
$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad p(u_3) = 0_E$$

L'application s est la symétrie associée à p, donc la symétrie de E par rapport à F parallèlement à G.
Deux méthodes sont possibles pour déterminer la matrice de s dans la base canonique, la seconde étant plus rapide.
<u>Méthode 1</u>.
L'application s est la symétrie de E par rapport à F parallèlement à G.
Comme u_1 et u_2 appartiennent à F alors $s(u_1) = u_1$ et $s(u_2) = u_2$.
Comme u_3 appartient à G alors $s(u_3) = -u_3$.
On en déduit la matrice de s dans la base $\mathcal{B}$:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice de s dans la base canonique est alors :

$$C = PDP^{-1}$$

Il reste à calculer ce produit.

<u>Méthode 2</u>.
Comme s est la symétrie associée à p alors $s = 2p - \mathrm{Id}_E$.
Soit C la matrice de s dans la base canonique. Comme A est la matrice de p dans la base canonique et I_3 est la matrice de Id_E dans la base canonique alors :

$$C = 2A - I_3$$

On peut vérifier d'ailleurs la même propriété avec la base $\mathcal{B}$: $D = 2B - I_3$.
On calcule donc :

$$C = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

On vérifie comme précédemment :

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad s(u_1) = u_1$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad s(u_2) = u_2$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad s(u_3) = -u_3$$

11 Soit $E = \mathbb{R}^4$. On souhaite donner la matrice de p, le projecteur de E sur F le sous-espace vectoriel d'équation $x + y + z + t = 0$, parallèlement à G le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $v_1 = (1, 1, 1, 1)$.

a. Démontrer que $E = F \oplus G$, donner une base adaptée à cette somme directe.

b. Donner les matrices de passages de la base canonique à cette base, et réciproquement.

c. Déterminer la matrice de $q = \mathrm{Id}_E - p$ dans la base adaptée choisie ci-dessus.

d. En déduire la matrice de q dans la base canonique, puis celle de p.

a. On détermine une famille génératrice de F :

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z, t) \in E \mid x + y + z + t = 0\} \\ &= \left\{(x, y, z, -x-y-z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &= \mathrm{Vect}\,((1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1)) \end{aligned}$$

On note :

$$u_1 = (1, 0, 0, -1) \quad u_2 = (0, 1, 0, -1) \quad u_3 = (0, 0, 1, -1) \quad u_4 = v_1 = (1, 1, 1, 1)$$

Ainsi la famille (u_1, u_2, u_3) est génératrice de F et la famille (u_4) est génératrice de G.
La rang de la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est, en additionnant les trois premières lignes à la dernière :

$$\mathrm{rg}\,(u_1, u_2, u_3, u_4) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4$$

La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est une famille de quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$, elle est de rang 4 donc c'est une base de $\mathbb{R}^4$.
Or $F = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2, u_3)$ et $G = \mathrm{Vect}\,(u_4)$, donc par théorème de la base adaptée F et G sont supplémentaires dans E, la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de F et la famille (u_4) est une base de G.
On note dans la suite $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$.

b. Par définition la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}$ dans la base canonique :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base canonique est la matrice inverse de P. On calcule cette matrice inverse grâce à l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{aligned}
PP^{-1} = I_4 \quad &\iff \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} && \begin{matrix} (L_4 \leftarrow L_4 + L_1) \\ (L_4 \leftarrow L_4 + L_2) \\ (L_4 \leftarrow L_4 + L_3) \end{matrix} \\
&\iff \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} && (L_4 \leftarrow \tfrac{1}{4} L_4) \\
&\iff \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} && \begin{matrix} (L_1 \leftarrow L_1 - L_4) \\ (L_2 \leftarrow L_2 - L_4) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - L_4) \end{matrix} \\
&\iff \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base canonique est donc :

$$P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c. On rappelle que u_1, u_2, u_3 appartiennent à F, et u_4 appartient à G. Comme p est le projecteur sur F parallèlement à G alors :

$$p(u_1) = u_1 \qquad p(u_2) = u_2 \qquad p(u_3) = u_3 \qquad p(u_4) = 0_E$$

Comme $q = \mathrm{Id}_E - p$ alors $q(u) = u - p(u)$ pour tout $u \in E$ donc en particulier :

$$q(u_1) = 0 \qquad q(u_2) = 0 \qquad q(u_3) = 0 \qquad q(u_4) = u_4 \tag{$\star$}$$

On peut remarquer que q est le projecteur de E sur G parallèlement à F.
La matrice de q dans la base $\mathcal{B}$ est d'après ($\star$) :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d. Notons A et B les matrices respectives de p et de q dans la base canonique. Comme :
- B est la matrice de q dans la base canonique,
- Q est la matrice de q dans la base $\mathcal{B}$,
- P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$,

alors :

$$B = PQP^{-1}$$

On calcule donc :

$$\begin{aligned}
B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Comme $q = \mathrm{Id}_E - p$ alors $p = \mathrm{Id}_E - q$, donc

$$M_{\mathcal{B}_c}(p) = M_{\mathcal{B}_c}(\mathrm{Id}_E - q) = M_{\mathcal{B}_c}(\mathrm{Id}_E) - M_{\mathcal{B}_c}(q)$$

Ceci donne $A = I_4 - B$, donc la matrice de p dans la base canonique de E est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

12 Soit f l'application linéaire définie par

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (y+z, x-z, x-y). \end{array}$$

On pose $F = \ker(f - \mathrm{Id})$, $G = \ker(f + 2\mathrm{Id})$.

a. Donner les matrices de $f - \mathrm{Id}$ et de $f + 2\mathrm{Id}$.

b. Déterminer une base de F puis de G.

c. Démontrer que F et G sont supplémentaires.

d. Donner la matrice de f dans une base adaptée à la somme directe $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

e. Simplifier $f \circ f + f$.
En déduire que f est bijective et donner son application réciproque.

a. Sans plus de précision, la matrice de f désigne la matrice de f dans la base canonique. On peut donc noter $M(f)$ pour $M_{\mathcal{B}_c}(f)$.
On note A cette matrice. Alors :

$$A = M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ensuite, par linéarité de l'application $f \mapsto M(f)$:

$$M(f - \mathrm{Id}) = M(f) - M(\mathrm{Id}) = A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \qquad M(f + 2\mathrm{Id}) = M(f) + 2M(\mathrm{Id}) = A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

b. On note A_1 et A_2 les deux matrices obtenues dans la question précédente. On cherche donc leurs noyaux. Pour ceci on opère sur les lignes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les éléments du noyau de A_1 sont donc les triplets (x, y, z) tels que $-x + y + z = 0$:

$$F = \ker A_1 = \left\{ (y+z, y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left((1,1,0), (1,0,1)\right)$$

Les deux vecteurs $u_1 = (1, 1, 0)$ et $u_2 = (1, 0, 1)$ ne sont pas colinéaires, il forment donc une famille libre. Celle-ci est génératrice de F, donc c'est une base de$F$.
De même :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour tout $u = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$:

$$u \in G \iff u \in \ker A_2 \iff \begin{cases} x \quad + z = 0 \\ \quad y - z = 0 \end{cases}$$

On en déduit :

$$G = \{(-z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\,((-1, 1, 1))$$

Le vecteur $u_3 = (-1, 1, 1)$ est non-nul donc il forme une famille libre. Cette famille est aussi génératrice de G donc c'est une base de G.

c. On a noté :

$$u_1 = (1, 1, 0) \qquad u_2 = (1, 0, 1) \qquad u_3 = (-1, 1, 1)$$

Le rang de la famille (u_1, u_2, u_3) est :

$$\mathrm{rg}\,(u_1, u_2, u_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3$$

La famille (u_1, u_2, u_3) est une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, elle est de rang 3 donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

Or $F = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2)$ et $G = \mathrm{Vect}\,(u_3)$, donc d'après le théorème de la base adaptée $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

d. Pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^3$, comme $F = \ker(f - \mathrm{Id})$ alors :

$$u \in F \iff (f - \mathrm{Id})(u) = 0 \iff f(u) - u = 0 \iff f(u) = u$$

De même, comme $G = \ker(f + 2\mathrm{Id})$:

$$u \in G \iff (f + 2\mathrm{Id})(u) = 0 \iff f(u) + 2u = 0 \iff f(u) = -2u$$

Ainsi, comme u_1 et u_2 appartiennent à F et u_3 appartient à G alors :

$$f(u_1) = u_1 \qquad f(u_2) = u_2 \qquad f(u_3) = -2u_3$$

La matrice de f dans la base (u_1, u_2, u_3) est donc :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

e. On note $\mathcal{B}$ la base (u_1, u_2, u_3). La matrice de $f \circ f + f$ dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$M_{\mathcal{B}}(f \circ f + f) = M_{\mathcal{B}}(f \circ f) + M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f) \times M_{\mathcal{B}}(f) + M_{\mathcal{B}}(f) = B^2 + B$$

On calcule donc :

$$B^2 + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3$$

Comme $f \circ f + f$ et $2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ ont la même matrice dans la base $\mathcal{B}$ alors ils sont égaux : $f \circ f + f = 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$

13 Soit f l'application définie par

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a,b,c) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^2 \frac{ax^2+bx+c}{(x+1)(x-3)}\,dx \end{array}$$

a. Démontrer que f est linéaire.

Soit $u_1 = (0,1,1)$, $u_2 = (0,1,-3)$, $u_3 = (1,-2,-3)$.

b. Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

c. Calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$.

d. Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base canonique. En déduire la valeur de $f(a,b,c)$ pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

a. Par linéarité de l'intégrale on peut écrire :

$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

$$f(a,b,c) = a\int_0^2 \frac{x^2}{(x+1)(x-3)}\,dx + b\int_0^2 \frac{x}{(x+1)(x-3)}\,dx + c\int_0^2 \frac{1}{(x+1)(x-3)}\,dx$$

On pose alors :

$$\alpha = \int_0^2 \frac{x^2}{(x+1)(x-3)}\,dx \qquad \beta = \int_0^2 \frac{x}{(x+1)(x-3)}\,dx \qquad \gamma = \int_0^2 \frac{1}{(x+1)(x-3)}\,dx$$

Ce qui donne :

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \qquad f(a,b,c) = a\alpha + b\beta + c\gamma$$

Ceci montre que f est une forme linéaire, donc *a fortiori* f est linéaire.
On peut ajouter que sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}$ est :

$$M_{\mathcal{B}_3\mathcal{B}_1}(f) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

b. On calcule le rang de la famille $\mathcal{B}$:

$$\operatorname{rg}\mathcal{B} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Les opérations élémentaires $(L_2 \leftarrow L_2 - L_3)$ puis $(L_1 \leftrightarrow L_3)$ donnent :

$$\operatorname{rg}\mathcal{B} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

La famille $\mathcal{B}$ est une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, elle est de rang 3 donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

c. On calcule :

$$f(u_1) = \int_0^2 \frac{x+1}{(x+1)(x-3)}\,dx = \int_0^2 \frac{1}{x-3}\,dx = \Big[\ln|x-3|\Big]_0^2 = -\ln 3$$

$$f(u_2) = \int_0^2 \frac{x-3}{(x+1)(x-3)}\,dx = \int_0^2 \frac{1}{x+1}\,dx = \Big[\ln|x+1|\Big]_0^2 = \ln 3$$

$$f(u_3) = \int_0^2 \frac{x-2x-3}{(x+1)(x-3)}\,dx = \int_0^2 1\,x = 2$$

d. Par définition la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ est la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Par propriété la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base canonique est la matrice inverse P^{-1}.

On applique l'algorithme du pivot de Gauss, en commençant de nouveau par les opérations élémentaires $(L_2 \leftarrow L_2 - L_3)$ puis $(L_1 \leftrightarrow L_3)$:

$$\begin{aligned}
PP^{-1} = I_3 \quad &\iff \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\iff \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 12 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On a donc obtenu :

$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $u = (a, b, c)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. On note X sa représentation matricielle dans la base canonique et X' celle dans la base $\mathcal{B}$. Alors par propriété :

$$X = PX'$$

De façon équivalente
$$X' = P^{-1}X$$
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$. Alors :
$$X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad X' = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$
On peut donc calculer les λ_i :
$$X' = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 9a + 3b + c \\ -a + \ b - c \\ 4a \end{pmatrix}$$
On connaît donc les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$:
$$u = \frac{9a+3b+c}{4}u_1 + \frac{-a+b-c}{4}u_2 + au_3$$
Par linéarité de f :
$$f(u) = \frac{9a+3b+c}{4}f(u_1) + \frac{-a+b-c}{4}f(u_2) + af(u_3)$$
Dans la question précédente on a calculé les $f(u_i)$:
$$\begin{aligned} f(u) &= -\frac{9a+3b+c}{4}\ln 3 + \frac{-a+b-c}{4}\ln 3 + 2a \\ &= 2a - (5a+b+c)\frac{\ln 3}{2} \end{aligned}$$
On a donc démontré que :
$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \qquad \int_0^2 \frac{ax^2+bx+c}{(x+1)(x-3)}\,dx = 2a - (5a+b+c)\frac{\ln 3}{2}$$

14 Dans $E = \mathbb{R}^3$ on définit :
$$u_1 = (1,1,0) \qquad u_2 = (1,2,2) \qquad u_3 = (2,3,1)$$
a. Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de E. Donner la matrice de passage de la base canonique de E à cette base puis inverser cette matrice.

b. Pour $i = 1,2,3$ on note u_i^* la forme linéaire de E qui à un vecteur associe sa i-ème coordonnée dans la base $\mathcal{B}$. Donner les matrices des u_i^* dans les bases canoniques de E et de $\mathbb{R}$.

a. On obtient $P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

b. Les matrices des u_i^* dans les bases $\mathcal{B}$ (de E) et canonique (de $\mathbb{K}$) sont $(1\ 0\ 0)$, $(0\ 1\ 0)$ et $(0\ 0\ 1)$. La matrice de l'identité de E dans les bases $\mathcal{B}_c$ et $\mathcal{B}$ est P^{-1}.
On en déduit que la matrice de chaque u_i^* dans la base canonique est la ligne i de P^{-1}.

15 Soit f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^2$ défini par :

$$\forall (x,y) \in E \qquad f(x,y) = (4x - y \ , 9x - 2y)$$

Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Donner une telle base.

Supposons qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est B.
Notons $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ cette base.
Comme B est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ alors $f(u_1) = u_1$ et $f(u_2) = u_1 + u_2$:

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} f(u_1) & f(u_2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array} \end{array}$$

On résout l'équation $f(u_1) = u_1$:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = (x,y) \iff \begin{cases} 4x - y = x \\ 9x - 2y = y \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 3x - y = 0 \\ 9x - 3y = 0 \end{cases} \iff y = 3x$$

On pose par exemple $u_1 = (1,3)$. On aurait aussi pu choisir $u_1 = (2,6)$, ou $u_1 = (-5,-15)$, etc.
Le vecteur u_2 doit vérifier $f(u_2) = u_1 + u_2$. On résout donc :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = u_1 + (x,y)r \iff \begin{cases} 4x - y = 1 + x \\ 9x - 2y = 3 + y \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 3x - y = 1 \\ 9x - 3y = 3 \end{cases} \iff y = 3x - 1$$

On doit donc avoir $u_2 = (x, 3x-1)$. On pose $u_2 = (0,-1)$, mais on aurait aussi pu choisir $u_2 = (1,2)$, $u_2 = (5,14)$, etc.
Finalement on a choisi $u_1 = (1,3)$ et $u_2 = (0,-1)$.

Vérifions, en phase de synthèse, que ces deux vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^2$ et que la matrice de f dans cette base est B.
Les vecteurs u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, ils forment donc une famille de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ de rang 2, donc une base de $\mathbb{R}^2$.
De plus on calcule que $f(u_1) = f(1,3) = (1,3) = u_1$ et $f(u_2) = f(0,-1) = (1,2) = u_1 + u_2$ donc la matrice de f dans la base (u_1, u_2) est bien $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

16 Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$.
Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est :
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On choisir un vecteur e_3 de E tel que $f^2(e_3) \neq 0$, puis on pose $e_2 = f(e_3)$, $e_1 = f(e_2)$.
On démontre que la famille (e_1, e_2, e_3) est libre.
La matrice de f dans cette base est B.

17 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E tel que $\ker f \oplus \operatorname{im} f = E$. On note r le rang de f.

a. Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est la matrice par blocs $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où C est une matrice inversible de taille (r, r).

b. Déterminer une telle base et la matrice B pour l'endomorphisme f canoniquement associé à la matrice :
$$A = \begin{pmatrix} -a & -a-4 & 4-a & 3a \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ a & a & a & -3a \end{pmatrix}$$

a. Notons n la dimension de E et p celle du noyau de f.
Le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme f montre que : $n = p + r$
Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une base du noyau de f et $(v_1, \ldots, v_r)$ une base de l'image de f.
Comme $E = \ker f \oplus \operatorname{im} f$ alors par théorème la famille $(u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_r)$ est une base de E.
Soit B la matrice de f dans cette base. Les colonnes de B contiennent les coordonnées des vecteurs $f(u_1), \ldots, f(u_p), f(v_1), \ldots, f(v_r)$ dans la base $(u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_r)$.
Pour tout $i = 1, \ldots, p$, comme u_i appartient au noyau de f alors $f(u_i) = 0$.
Pour tout $i = 1, \ldots, r$, comme $f(v_i)$ appartient à l'image de f alors il est combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \ldots, v_r$, puisque ceux-ci engendrent $\operatorname{im} f$. En d'autre termes, pour tout $i = 1, \ldots, r$ il existe des scalaires $c_{1i}, \ldots, c_{ri}$ tels que $f(v_i) = c_{1i}v_1 + \cdots + c_{ri}v_r$.
On en déduit que la matrice de f dans la base $(u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_r)$ est :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & c_{11} & \cdots & c_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_{r1} & \cdots & c_{rr} \end{pmatrix}$$

Cette matrice peut être définie par bloc. Pour tout couple d'entiers (a,b) on note 0_{ab} la matrice nulle de taille (a,b), et C la matrice des c_{ij} : $C=(c_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant r}$. Alors :

$$B=\begin{pmatrix}0_{pp} & 0_{pr}\\ 0_{rp} & C\end{pmatrix}$$

Le rang d'une matrice ne change pas si on lui ajoute ou enlève les lignes ou des colonnes nulles, donc les matrices B et C ont même rang.

Comme B est la matrice de f, alors B est de rang $\operatorname{rg} f = r$.

Ainsi C est une matrice carrée de taille (r,r) et de rang r, donc par théorème elle est inversible.

b. Vérifions tout d'abord que le noyau et l'image de f sont bien supplémentaires dans E.

Pour calculer le noyau de f on effectue des opérations élémentaires sur ses lignes, on obtient :

$$A\underset{L}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-2&1\\0&1&-1&0\\0&0&a&-a\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Pour calculer l'image de f on effectue des opérations élémentaires sur les colonnes. On obtient

$$A\underset{C}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&-1&-a&0\\0&0&a&0\end{pmatrix}$$

<u>Supposons que a est non-nul</u>. On poursuit les opérations, ce qui donne :

$$A\underset{L}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad A\underset{C}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-1&-1&-1&0\end{pmatrix}$$

On en déduit que le noyau de f est engendré par le vecteur $u_1=(1,1,1,1)$, et l'image de f est engendrée par les vecteurs $u_2=(1,0,0,-1)$, $u_3=(0,1,0,-1)$, $u_4=(0,0,1,-1)$.

Le rang de la famille (u_1,u_2,u_3,u_4), que l'on note $\mathcal{B}$, est :

$$\operatorname{rg}\mathcal{B}=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\\1&-1&-1&-1\end{pmatrix}$$

Par interversions des colonnes puis ajout des lignes L_1, L_2 et L_3 à la ligne L_4 :

$$\operatorname{rg}\mathcal{B}=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&4\end{pmatrix}=4$$

La famille $\mathcal{B}$ est donc une base de $\mathbb{R}^4$.
Par théorème de la base adaptée ceci montre que la famille (u_1) est une base de $\ker f$, la famille (u_2, u_3, u_4) est une base de $\operatorname{im} f$, et que $\ker f$ et $\operatorname{im} f$ sont supplémentaires dans E.
Déterminons la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. On calcule :

$$\begin{pmatrix} -a & -a-4 & 4-a & 3a \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ a & a & a & -3a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \quad f(u_1) = 0_{\mathbb{R}^4}$$

$$\begin{pmatrix} -a & -a-4 & 4-a & 3a \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ a & a & a & -3a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4a \\ 0 \\ 0 \\ 4a \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \quad f(u_2) = -4au_2$$

$$\begin{pmatrix} -a & -a-4 & 4-a & 3a \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ a & a & a & -3a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4a-4 \\ 4 \\ 0 \\ 4a \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \quad f(u_3) = (-4a-4)u_2 + 4u_3$$

$$\begin{pmatrix} -a & -a-4 & 4-a & 3a \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ a & a & a & -3a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-4a \\ 0 \\ -4 \\ 4a \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \quad f(u_4) = (4-4a)u_2 - 4u_4$$

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est donc :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4a & -4a-4 & 4-4a \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

La matrice C est bien inversible :

$$C = \begin{pmatrix} -4a & -4a-4 & 4-4a \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

En effet, comme a est non-nul alors elle est de rang 3 et donc elle est inversible.
<u>Supposons maintenant que a est nul</u>. On obtient :

$$A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas $\ker f$ est engendré par les vecteurs $u_1 = (1, 1, 1, 1)$ et $u_2 = (1, 0, 0, -1)$, puis $\operatorname{im} f$ est engendré par les vecteurs $u_3 = (1, 0, -1, 0)$, $u_4 = (0, 1, -1, 0)$.
Comme précédemment on démontre que $\ker f$ est $\operatorname{im} f$ sont supplémentaires dans E et que la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de E adaptée à cette somme directe.

On calcule ensuite la matrice de f dans cette base. On obtient :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

La matrice C est bien inversible : $C = \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Remarque. Il est possible en fait d'obtenir une base de E dans laquelle la matrice de f a la forme par bloc voulue indépendamment de la nullité de a. Pour ceci on choisit :

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, 1, 1, 1) \\ u_2 &= (1, 0, 0, -1) \\ u_3 &= (1, 0, -1, 0) \\ u_4 &= (1, -1, 0, 0) \end{aligned}$$

Alors la matrice de f dans cette base est :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

18 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E tel que $\ker f = \operatorname{im} f$.

Démontrer que dans une certaine base de E la matrice de f est la matrice par bloc $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où l'entier r est à déterminer.

Soit r la dimension de $\operatorname{im} f$ et de $\ker f$.

D'après le théorème du rang $\dim E = 2r$.

On choisit une base $e_1, \ldots, e_r$ de $\operatorname{im} f$. Pour tout $i = 1, \ldots, r$ on choisit un antécédent e_{r+i} de e_i par f.

On démontre que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre, puis qu'elle est une base E, et enfin que la matrice de f dans cette base est la matrice voulue.

19 Dans chacun des cas ci-dessous démontrer que les matrices A et B sont semblables.

a. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

c. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

a. $P = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ donne $A = PBP^{-1}$.

b. $P = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donne $A = PBP^{-1}$.

c. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ donne $A = PBP^{-1}$.

d. Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A.
S'il existe une base (u_1, u_2, u_3) dans laquelle la matrice de f est B alors les trois vecteurs de cette base vérifient :

$$f(u_1) = u_1 \qquad f(u_2) = u_1 + u_2 \qquad f(u_3) = u_1 + u_2 + u_3 \tag{1}$$

On note $g = f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Les égalités ci-dessus deviennent :

$$g(u_1) = 0_{\mathbb{R}^3} \qquad g(u_2) = u_1 \qquad g(u_3) = u_1 + u_2$$

La matrice de g est dans la base canonique est $A - I_3$:

$$M_{\mathcal{B}_c}(g) = A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

On utilise cette matrice pour résoudre l'équation $g(u_1) = 0_{\mathbb{R}^3}$, on obtient $u_1 = (\alpha, 0, \alpha)$ où α est un réel. On résout ensuite l'équation $g(u_2) = u_1$ avec $u_1 = (\alpha, 0, \alpha)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

On obtient $u_2 = (2\alpha+\beta, \alpha, \beta)$, où β est un réel. Enfin on résout l'équation $g(u_3) = u_1 + u_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha+\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

On obtient $u_3 = (3\alpha+2\beta+\gamma, 2\alpha+\beta, \gamma)$ où γ est un réel.

Par opérations élémentaires sur les lignes, on calcule le rang de la famille (u_1, u_2, u_3) :

$$\operatorname{rg}(u_1, u_2, u_3) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha+\beta & 3\alpha+2\beta+\gamma \\ 0 & \alpha & 2\alpha+\beta \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha+\beta & 3\alpha+2\beta+\gamma \\ 0 & \alpha & 2\alpha+\beta \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Ce rang est égal à 3 si et seulement si α est non-nul.

On peut choisir par exemple $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$, ce qui donne :

$$u_1 = (1,0,1) \qquad u_2 = (2,1,0) \qquad u_3 = (3,2,0)$$

La famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base car c'est une famille de 3 vecteurs d'un espace vectoriel de rang 3 et elle est de rang 3.

Par construction ses trois vecteurs vérifient les relations (1), donc la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est B.

D'autres choix sont possibles, comme par exemple :

$$\begin{array}{lllll} & u_1 = (1,0,1) & u_2 = (0,1,-2) & u_3 = (0,0,-1) & \\ \text{ou} & u_1 = (1,0,1) & u_2 = (1,1,-1) & u_3 = (1,1,-2) & \\ \text{ou} & u_1 = (3,0,3) & u_2 = (11,3,5) & u_3 = (29,11,4) & \text{etc.} \end{array}$$

e. $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donne $A = PBP^{-1}$.

20 Soit A et B deux matrices de taille (n, n).

On suppose que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \qquad \operatorname{tr}(AM) = \operatorname{tr}(BM)$$

Démontrer que $A = B$.

On note $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$.

Pour $M = E_{k\ell}$ on obtient $\operatorname{tr}(AM) = a_{\ell k}$.

On en déduit $A = B$.

21 Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E de rang 1.

a. Démontrer qu'il existe un scalaire λ tel que $f \circ f = \lambda f$.

On suppose dorénavant que E est de dimension finie.

b. Démontrer qu'une matrice A de taille (n, p) et de rang 1 si et seulement si il existe deux matrices colonnes U et V non-nulles telles que $A = U\,{}^tV$.

c. En déduire une autre justification du résultat de la première question.

d. En considérant une base judicieuse démontrer que si de plus $\operatorname{tr} f = 1$ alors f est un projecteur.

a. Soit v un vecteur engendrant $\operatorname{im} f$. Comme $f(v) \in \operatorname{im} f$ alors il existre un scalaire λ tel que $f(v) = \lambda v$.
Pour tout $u \in E$, comme $f(u) \in \operatorname{im} f$ alors il existe $\alpha_u \in \mathbb{K}$ tel que $f(u) = \alpha_u v$.
Alors $f \circ f(u) = \lambda f(u)$. Ceci étant vrai pour tout $u \in E$, on a bien $f \circ f = \lambda f$.

b. Comme A est de rang 1 alors toutes ses colonnes sont colinéaires, donc de la forme αU où U est un vecteur colonne non-nul. On note, pour tout $i = 1, \ldots, p$, α_i le scalaire tel que $C_i = \alpha_i U$. Soit ensuite ${}^tV = (\alpha_1 \ldots \alpha_p)$. On a bien $A = U\,{}^tV$, et V est non-nul car l'un des α_i est non-nul.
Soit $A = U\,{}^tV$ avec U et V deux matrices colonnes non-nulles. Par opérations élémentaires sur les colonnes, comme l'un de coefficients de V est non-nul alors A est équivalente par colonnes à la matrice $(U\ 0 \cdots 0)$, laquelle est de rang 1 car U est non-nul.

c. Soit A la matrice de f dans une base de E.
Alors A est carrée, donc U et V sont de même taille. Puis $A^2 = \lambda A$ où $\lambda = {}^tVU$.

d. On considère une base $e_2, \ldots, e_n$ de $\ker f$ que l'on complète avec e_1. Alors seule la première colonne de A est non-nulle. Si $\operatorname{tr} A = 1$ alors sa première coordonnée vaut 1 puis $A^2 = A$.

22 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

On définit l'application $f : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & AM. \end{array}$

a. Justifier que f est un endomorphisme de E, inversible si et seulement si A est inversible.

b. Donner la matrice de f dans la base canonique de E.

c. Exprimer la trace de f en fonction de celle de A, puis le rang de f en fonction de celui de A.

a. Si A est un inversible alors f est inversible d'inverse $M \mapsto A^{-1}M$.
Si f est inversible alors I_2 admet un antécédent M. Comme $AM = I_2$ alors A est inversible d'inverse M.

b. On obtient : $\quad M_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$

c. $\operatorname{tr} f = 2 \operatorname{tr} A$ et $\operatorname{rg} f = 2 \operatorname{rg} A$, ce qui se voit en permutant les lignes et les colonnes.

23 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
Pour tout $i = 1, \ldots, n$ on note e_i^* la forme linéaire coordonnée associée à e_i, c'est-à-dire la forme linéaire qui à un vecteur de E associe sa i-ème coordonnée dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$.

a. Soit f un endomorphisme de E. Démontrer que :

$$\operatorname{tr} f = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(f(e_i))$$

b. Application : déterminer la trace de l'endomorphisme de transposition de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a. Soit A la matrice de f dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$, et soit (a_{ij}) ses coefficients. Alors par définition de A :

$$\forall j = 1, \ldots, n \qquad f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$$

En particulier pour tout $i = 1, \ldots, n$: $\quad e_i^*(f(e_j)) = a_{ij}$

Par définition $\operatorname{tr} f = \operatorname{tr} A$, donc :

$$\operatorname{tr} f = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(f(e_i))$$

b. On utilise la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\mathcal{B}_c = (\, E_{ij} \mid i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, n)$$

Pour tout couple (i, j), comme ${}^tE_{ij} = E_{ji}$ alors :

$$E_{ij}^*({}^tE_{ij}) = E_{ij}^*(E_{ji}) \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

D'après la question précédente, en notant $T : M \mapsto {}^tM$ l'application de transposition :

$$\mathrm{tr}(T) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E_{ij}^*({}^tE_{ij}) = n$$

24 Soit α, β, γ trois réels distincts et :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ P &\longmapsto (P(\alpha), P(\beta), P(\gamma)) \end{aligned}$$

a. Justifier que f est linéaire et donner sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^3$. On note A cette matrice.

b. Démontrer que A est inversible.

c. Déterminer l'image réciproque par f de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

d. Démontrer que la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ à la base de la question précédente est la matrice inverse de A.

a. La spécialisation est linéaire donc les trois composantes de f sont linéaires, et donc f est linéaire.
La base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $(1, X, X^2)$. On calcule :

$$f(1) = (1,1,1) \qquad f(X) = (\alpha, \beta, \gamma) \qquad f(X^2) = \left(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2\right)$$

La matrice de f dans les bases canoniques est donc :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{pmatrix}$$

b. Les opérations élémentaires $(L_2 \leftarrow L_2 - L_1)$ et $(L_3 \leftarrow L_3 - L_1)$ donnent :

$$A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & \beta-\alpha & \beta^2-\alpha^2 \\ 0 & \gamma-\alpha & \gamma^2-\alpha^2 \end{pmatrix}$$

Comme α, β, γ sont distincts alors on peut appliquer les opérations élémentaires $(L_2 \leftarrow \frac{1}{\beta-\alpha}L_2)$ et $(L_3 \leftarrow \frac{1}{\gamma-\alpha}L_3)$:

$$A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & 1 & \beta+\alpha \\ 0 & 1 & \gamma+\alpha \end{pmatrix}$$

Enfin l'opération $(L_3 \leftarrow L_3 - L_2)$ donne :

$$A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & 1 & \beta+\alpha \\ 0 & 0 & \gamma-\beta \end{pmatrix}$$

Comme β et γ sont distincts alors A est de rang 3.
Or A est carrée de taille $(3,3)$, donc elle est inversible.
Comme A est la matrice de f selon certaines bases alors f est un isomorphisme.
Remarque. On aurait aussi pu démontrer que f est injective, puis utiliser le théorème du rang.

c. Notons P_1, P_2, P_3 les antécédents par f de e_1, e_2, e_3.
Ainsi $f(P_1) = e_1$, ce qui donne $P_1(\alpha) = 1$, et $P_1(\beta) = P_1(\gamma) = 0$.
Le polynôme P_1 est de degré au plus 2 et il admet β et γ pour racines, donc il est de la forme $P_1 = \lambda(X-\beta)(X-\gamma)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
Comme $P_1(\alpha) = 1$ alors $\lambda = \frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$.
On obtient finalement :

$$P_1 = \frac{(X-\beta)(X-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} \qquad P_2 = \frac{(X-\alpha)(X-\gamma)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} \qquad P_3 = \frac{(X-\alpha)(X-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

d. Notons $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, puis $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$ la base obtenue dans la question précédente (qui est bien une base car image d'une base par f^{-1}, qui est un isomorphisme), et enfin $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Alors la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_0$ est l'identité I_3, donc :

$$A = M_{\mathcal{B}_c\mathcal{B}_0}(f) \qquad P_{\mathcal{B}_c\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}_c}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}) \qquad I_3 = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}_0}(f)$$

Comme $f = f \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}$ alors $I_3 = AP_{\mathcal{B}_c\mathcal{B}}$ ce qui montre que A^{-1} est la matrice dont les colonnes sont les expressions de P_1, P_2, P_3 dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

25 Soit n un entier naturel et $E = \mathbb{R}_n[X]$.
Soit f l'application définie par :

$$f : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & P(X+1) \end{array}$$

a. Démontrer que f est bijective en explicitant sa réciproque.

b. Justifier que f est linéaire, et donner sa matrice dans la base canonique de E.

c. Donner la matrice inverse de la précédente.

a. On pose $g : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & P(X-1) \end{array}$
Alors :

$$\begin{aligned} \forall P \in E \qquad & g \circ f(P) = g(P(X+1)) = P(X-1+1) = P \\ \text{et} \quad & f \circ g(P) = f(P(X-1)) = P(X+1-1) = P \end{aligned}$$

Ainsi $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_E$. Ceci montre que f est bijective, de réciproque g.

b. Pour tous P et Q dans E et λ dans $\mathbb{R}$ on écrit :

$$f(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(X+1) = \lambda P(X+1) + Q(X+1) = \lambda f(P) + f(Q)$$

Ceci montre que f est linéaire.
Soit $k \in \{0, \ldots, n\}$ un entier. L'image de X^k est alors

$$f(X^k) = (X+1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i$$

On peut en déduire la matrice de f dans la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & & n \\ \vdots & \ddots & 1 & 3 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut aussi écrire que A est la matrice $(a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1}$ avec :

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n+1\}^2 \qquad a_{ij} = \begin{cases} \dbinom{j-1}{i-1} & \text{si } j \geqslant i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

c. Comme A est la matrice de f dans la base canonique alors A^{-1} est la matrice de f^{-1}. Or on a vu que :

$$\forall P \in E \qquad f^{-1}(P) = P(X-1)$$

On en déduit :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\} \qquad f^{-1}(X^k) = (X-1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} X^i$$

La matrice de f^{-1} dans la base canonique est donc :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots & (-1)^n \\ 0 & 1 & -2 & 3 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & -3 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice s'écrit $A^{-1} = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1}$ avec :

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n+1\}^2 \qquad b_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$$

26 Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ engendré par les fonctions cosinus et sinus.

a. Justifier que $\mathcal{B} = (\cos, \sin)$ est une base de E.

b. Justifier que $\Phi : f \mapsto f' - f$ est un endomorphisme de E. Donner sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.

c. Démontrer que Φ est un automorphisme.
Quels éléments f de E vérifient $f' - f = \cos$?

a. Par définition, comme les fonctions cos et sin sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ alors $E = \text{Vect}(\cos, \sin)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, donc un espace vectoriel. De plus la famille $\mathcal{B} = (\cos, \sin)$ est génératrice de E.

Démontrons qu'elle est libre. Soit α et β deux scalaires tels que $\alpha \cos + \beta \sin = 0_E$. Alors :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \alpha \cos t + \beta \sin t = 0_\mathbb{R}$$

En particulier pour $t = 0$ on obtient $\alpha = 0$ et pour $t = \frac{\pi}{2}$ on obtient $\beta = 0$. On a démontré :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \qquad \alpha \cos + \beta \sin = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta = 0$$

La famille $\mathcal{B}$ est donc libre.

Comme elle est génératrice de E alors c'est une base de E.

On peut ajouter que E est de dimension 2.

b. L'application Φ est définie pour toute fonction f dérivable, donc elle est bien définie sur E.

Elle est combinaison linéaire des applications $f \mapsto f'$ et $f \mapsto f$ qui sont linéaires (ce sont respectivement la dérivation et l'identité) donc elle est linéaire.

Soit f une fonction de E. Comme $E = \text{Vect}(\cos, \sin)$ alors il existe deux scalaires α et β tels que $f = \alpha \cos + \beta \sin$. En conséquence :

$$f' - f = -\alpha \sin + \beta \cos - \alpha \cos - \beta \sin = (-\alpha + \beta) \cos - (\alpha + \beta) \sin$$

Comme $E = \text{Vect}(\cos, \sin)$ alors cette fonction appartient à E.

On a donc montré que l'espace vectoriel E est stable par l'application $f \mapsto f' - f$:

$$\forall f \in E \qquad f' - f \in E$$

Ceci justifie que Φ est à valeurs dans E, donc Φ est une application linéaire de E dans E, donc un endomorphisme de E.

On a vu que :

$$\Phi(\cos) = -\sin - \cos \qquad \Phi(\sin) = \cos - \sin$$

La matrice de Φ dans la base $\mathcal{B} = (\cos, \sin)$ de E est donc :

$$A = M_\mathcal{B}(\Phi) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

c. Le déterminant de A est $\det A = 2$, il est non-nul donc f est un automorphisme.
La matrice de f^{-1} est :

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

L'élément cos de E a pour coordonnées $(1, 0)$ dans la base $\mathcal{B}$. On calcule :

$$A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Ceci montre que :

$$\Phi^{-1}(\cos) = \frac{1}{2}(\sin - \cos)$$

Il s'agit d'une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y' - y = \cos t$$

$\boxed{27}$ Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et φ l'application linéaire définie par :

$$\begin{array}{rrcl} \varphi : & E & \longrightarrow & E \\ & f & \longmapsto & f'' + 9f \end{array}$$

a. Déterminer le noyau de φ et donner sa dimension.

Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\mathcal{B} = (\cos, \cos^3)$.

b. Démontrer que $\mathcal{B}$ est une base de F.

c. Démontrer que F est stable par φ.

d. Soit $\psi : F \to F$ la restriction de φ à F. Donner la matrice Ψ de ψ dans la base $\mathcal{B}$.

e. Donner une base du noyau de Ψ et en déduire une base de celui de ψ.

f. Démontrer que $\ker\psi \subseteq \ker\varphi$. En déduire la formule donnant $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$.

a. Le noyau de φ est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène :

$$y'' + 9y = 0$$

L'équation caractéristique associée est $\lambda^2 + 9 = 0$, ses solutions sont $\pm 3i$, donc les solutions de l'équation différentielle sont :

$$y_0(t) = \alpha\cos(3t) + \beta\sin(3t) \qquad \text{avec} \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

Il s'agit des combinaisons linéaires des fonctions :

$$y_1 : t \mapsto \cos(3t) \qquad\qquad y_2 : t \mapsto \sin(3t)$$

Donc le noyau de φ est : $\ker\varphi = \mathrm{Vect}\,(y_1, y_2)$

Montrons que la famille (y_1, y_2) est libre.

Soit α et β deux scalaires tels que $\alpha y_1 + \beta y_2 = 0_E$. Alors :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \alpha\cos(3t) + \beta\sin(3t) = 0_{\mathbb{R}}$$

En particulier pour $t = 0$ on obtient $\alpha = 0$ et pour $t = \frac{\pi}{6}$ on obtient $\beta = 0$. On a démontré :

$$\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \qquad \alpha y_1 + \beta y_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta = 0$$

La famille (y_1, y_2) est donc libre.

Comme elle est génératrice de $\ker\varphi$ alors c'est une base de $\ker\varphi$.

Ainsi $\ker\varphi$ est de dimension 2.

b. Soit α et β deux scalaires tels que $\alpha\cos + \beta\cos^3 = 0_E$. Alors :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \alpha\cos t + \beta\cos^3 t = 0_{\mathbb{R}}$$

Pour $t = 0$ on obtient $\alpha + \beta = 0$ et pour $t = \frac{\pi}{3}$ on obtient $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{8}\beta = 0$, soit $4\alpha + \beta = 0$:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 4\beta = 0 \end{cases}$$

L'unique solution de ce système est $(\alpha, \beta) = (0, 0)$. Ainsi :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \qquad \alpha \cos + \beta \cos^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta = 0$$

La famille $\mathcal{B} = (\cos, \cos^3)$ est donc libre.
Elle est génératrice de F car $F = \mathrm{Vect}\,(\cos, \cos^3)$ donc c'est une base de F, et ainsi F est de dimension 2.

c. On calcule :

$$\varphi(\cos) = \cos'' + 9\cos = -\cos + 9\cos = 8\cos$$

Pour la fonction $\cos^3$, on commence par :

$$(\cos^3)' = -3\sin\cos^2 \qquad \text{puis} \qquad \begin{aligned}(\cos^3)'' &= -3(\cos^3 - 2\sin^2\cos) \\ &= -3\cos^3 + 6(1 - \cos^2)\cos \\ &= 6\cos - 9\cos^3\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\varphi(\cos^3) = (\cos^3)'' + 9\cos^3 = 6\cos$$

Ainsi $\varphi(\cos)$ et $\varphi(\cos^3)$ sont combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{B}$, donc ils appartiennent à $F = \mathrm{Vect}\,(\mathcal{B})$.
L'image par φ des vecteurs de $\mathcal{B}$ est incluse dans F. Comme φ est linéaire (par composition et combinaison linéaire, car la dérivation et l'identité sont linéaires), alors l'image par φ de toute combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$ appartient à F.
Plus précisément, si f est élément de F alors il existe un couple de scalaires (α, β) tel que $f = \alpha\cos + \beta\cos^3$. Par linéarité de φ :

$$\varphi(f) = \alpha\varphi(\cos) + \beta\varphi(\cos^3)$$

Or $\varphi(\cos)$ et $\varphi(\cos^3)$ appartiennent à F, qui est un sous-espace vectoriel, donc $\varphi(f)$ appartient à F.
On a justifié que :

$$\forall f \in F \qquad \varphi(f) \in F$$

Ceci signifie que F est stable par φ.

d. Comme ψ est la restriction de φ à F alors :

$$\forall f \in F \qquad \psi(f) = \varphi(f)$$

On déduit donc des calculs de la question précédente :

$$\psi(\cos) = 8\cos \qquad \text{et} \qquad \psi(\cos^3) = 6\cos$$

La matrice de ψ dans la base $\mathcal{B} = (\cos, \cos^3)$ est donc :

$$\Psi = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e. On calcule le noyau de Ψ :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \Psi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff 8x + 6y = 0$$

$$\iff x = -\frac{3}{4} y$$

On en déduit :

$$\ker \Psi = \left\{ \left(-\frac{3}{4} y, y \right) \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\left(-\frac{3}{4}, 1 \right) \right) = \text{Vect}\left((3, -4) \right)$$

Comme Ψ est la matrice de ψ dans la base $\mathcal{B}$, alors le noyau de ψ est engendré par le vecteur dont les coordonnées sont $(3, -4)$ dans la base $\mathcal{B} = (\cos, \cos^3)$:

$$\ker \psi = \text{Vect}\left(3 \cos - 4 \cos^3 \right)$$

f. Par définition :

$$\ker \psi = \{ f \in F \mid \psi(f) = 0 \}$$

Comme ψ est la restriction de φ à F :

$$\forall f \in F \qquad \psi(f) = \varphi(f)$$

On en déduit :

$$\ker \psi = \{ f \in F \mid \varphi(f) = 0 \}$$

Comme $F \subseteq E$:

$$\ker \psi \subseteq \{ f \in E \mid \varphi(f) = 0 \}$$

Par définition :

$$\ker \varphi = \{ f \in E \mid \varphi(f) = 0 \}$$

Ceci justifie l'inclusion $\ker \psi \subseteq \ker \varphi$. On a vu dans la question précédente que :

$$3 \cos - 4 \cos^3 \in \ker \psi$$

On en déduit que cette fonction appartient au noyau de φ. Or on a démontré dans la première question que ce noyau est engendré par les fonctions y_1 et y_2 définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y_1(t) = \cos(3t) \qquad y_2(t) = \sin(3t)$$

Il existe donc deux scalaires α et β tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad 3 \cos t - 4 \cos^3 t = \alpha \cos(3t) + \beta \sin(3t)$$

En spécialisant en $t = \frac{\pi}{2}$ on montre que $\beta = 0$.
En spécialisant en $t = 0$ on obtient $\alpha = -1$.
Ceci prouve la formule :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \cos(3t) = 4 \cos^3 t - 3 \cos t$$

28 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A\,{}^tAA = I_n$.

a. Démontrer que pour tout matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\operatorname{tr}({}^tMM) \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad (\operatorname{tr}({}^tMM) = 0 \iff M = 0_n)$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A\,{}^tAA = I_n$.

b. Démontrer que A est inversible et symétrique.

c. Soit $a = \operatorname{tr} A$ et $b = \operatorname{tr} A^2$. Justifier que les matrices $(A - I_n)^2$, $(A^2 - I_n)^2$ et $(A^2 - A)^2$ sont symétriques et exprimer leurs traces en fonction de a, b, n.

d. En utilisant la question (a) démontrer que $a = b = n$. En déduire que $A = I_n$.

a. Notons $M = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
Le coefficient (i,k) de ${}^tMM$ est alors $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ji}a_{jk}$. Donc $\operatorname{tr}({}^tMM) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ji}^2$.
Cette trace est positive, elle est nulle si et seulement si tous les a_{ij} sont nuls.

b. Comme A est carrée et $(A\,{}^tA)A = I_n$ alors A est inversible d'inverse $A\,{}^tA$.
De plus ${}^t(A\,{}^tA) = A\,{}^tA$, donc A^{-1} est symétrique, puis A est symétrique.

c. Comme ${}^t(A^2) = {}^tA\,{}^tA = A^2$ alors A^2 est symétrique.
Comme ${}^tA = A$ alors l'égalité $A\,{}^tAA = I_n$ donne $A^3 = I_n$, puis on développe :

$$(A - I_n)^2 = A^2 - 2A + I_n \qquad (A^2 - I_n)^2 = A - 2A^2 + I_n \qquad (A^2 - A)^2 = A - 2I_n + A^2$$

Une combinaison linéaire de matrices symétriques est symétrique, donc ces trois matrices sont symétriques.
Par linéarité de la trace :

$$\operatorname{tr}(A - I_n)^2 = b - 2a + n \qquad \operatorname{tr}(A^2 - I_n)^2 = a - 2b + n \qquad \operatorname{tr}(A^2 - A)^2 = a - 2n + b$$

On obtient $b - 2a + n$, $a - 2b + n$ et $a - 2n + b$.

d. Commes les trois matrices $(A - I_n)^2$, $(A^2 - I_n)^2$ et $(A^2 - A)^2$ sont symétriques alors leurs traces sont positives. Or la somme de ces trois traces est nulle, donc elles sont toutes les trois nulles.
La question (a) montre que si une matrice M est symétrique alors :

$$\operatorname{tr}(M^2) = 0 \qquad \iff \qquad M = 0_n$$

On en déduit que $A = I_n$, car $A - I_n$ est symétrique et $\operatorname{tr}((A - I_n)^2) = 0$.
Finalement la seule matrice vérifiant $A\,{}^tAA = I_n$ est la matrice identité.