Lycée Bellevue – Toulouse **20 juin 2025**
MPSI – Mathématiques

Devoir Surveillé n°9

Durée : 3 heures – Calculatrices non autorisées

- *On rappelle qu'une grande attention est portée à la présentation, l'orthographe, la qualité de la rédaction.*
- *En général les symboles mathématiques ne doivent pas figurer dans une phrase.*
- *Les objets introduits doivent être présentés correctement.*
- *Les références au cours doivent être citées, de même que les questions précédentes si elles sont utilisées.*
- *Il est inutile de recopier l'énoncé.*
- *Les copies doivent être numérotées, leur nombre total indiqué.*
- *Les annotations au crayon ne sont pas prises en compte.*
- *Le barème est indicatif.*
- *Attention : certains passages peuvent choquer la sensibilité des élèves les plus sensibles.*
- *Si un élève est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Problème 1. Transformation d'Abel *(19 points)*

Partie A. Définition et théorème *(9 points)*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes.
On s'intéresse à la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n b_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $\quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$.

1. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer b_k en fonction de deux termes de la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k.$$

Il s'agit de la *transformation d'Abel*.

2. Dans cette question on démontre le *critère d'Abel de convergence des séries.*

> **Théorème.** Avec les notations ci-dessus, on suppose que :
> - La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
> - La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est réelle, décroissante et converge vers 0.
>
> Alors la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n b_n$ converge.

Soit (a_n) et $(b_n$ deux suites vérifiant les hypothèses ci-dessus.

(a) Démontrer que la série de terme général $(a_n - a_{n+1})$ converge absolument.

(b) En déduire que la série de terme général $(a_n - a_{n+1})B_n$ converge absolument.

(c) Conclure.

3. À l'aide du critère d'Abel donner une nouvelle démonstration du critère spécial des séries alternées.

Partie B. Une application *(10 points)*

Dans cette partie on démontre que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\sin nx}{n}$ converge et on calcule sa limite.

1. Soit θ un réel non multiple de 2π.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$ sans signe somme.

(b) Démontrer que pour tout réel α strictement positif la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est convergente.

(c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(nx)}{n}$ converge.

On note dorénavant $f(x)$ la somme de cette série : $\displaystyle f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$

On admet que la fonction f est 2π-périodique et impaire.

On suppose dans la suite que $x \in]0, \pi]$.

2. Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\left(n\frac{x}{2}\right)\cos\left((n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}.$$

3. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2} - \frac{1}{2}\int_x^\pi \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

4. Grâce à une intégration par parties démontrer que :

$$\int_x^\pi \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

En déduire la valeur de $f(x)$.

Problème 2. Alien *(29 points)*

Les parties de ce problème sont indépendantes, mais la partie C utilise le résultat de la partie B.

Partie A. *(4 points)*

Un vaisseau spatial est habité par une créature extraterrestre (un *alien*), qui certains jours attaque un membre de l'équipage de la façon suivante :

- S'il a tué un membre de l'équipage un certain jour alors le lendemain il est repu, il n'attaque pas.
- S'il n'a tué personne un certain jour alors il attaque un membre de l'équipage le lendemain et il le tue avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note A_n l'événement : «l'alien tue un membre de l'équipage le jour n», et $p_n = P(A_n)$.

On suppose que le jour 0 il n'a pas attaqué et donc $p_0 = 0$.

1. Soit n un entier naturel. Exprimer p_{n+1} en fonction p_n.
2. En déduire la valeur de p_n en fonction de n.
3. Vérifier que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.
   Comment interpréter cette limite ?

Partie B. *(11 points)*

Soit m un entier naturel et x un réel tel que $0 \leqslant x < 1$. Le but de cette partie est de démontrer que la série de terme général $\binom{n}{m}x^n$ est convergente, et que sa somme est :

$$\sum_{n=m}^{+\infty} \binom{n}{m} x^n = \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}}.$$

Pour ceci on pose, pour tout $x \in [0,1[$: $\quad f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

On pose aussi $\quad g(x) = x^n \quad$ où n est un entier supérieur ou égal à m.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Donner, sans démonstration, une formule pour $f^{(k)}(x)$ et une formule pour $g^{(k)}(x)$.
2. (a) À l'aide de la formule de Leibniz, démontrer que pour tout $x \in [0,1[$:

$$(fg)^{(m)}(x) = m! \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} h_k(x)$$

   où les h_k sont des fonctions à préciser, dépendant de k, m et n.

   (b) Justifier que pour tout $k \in \{0, \dots, m\}$: $\dfrac{n!}{(n-k)!} \leqslant n^k$.

   (c) Démontrer que pour tout $x \in [0,1[$:

$$\left|(fg)^{(m)}(x)\right| \leqslant \frac{(m+1)!}{(1-x)^{m+1}} n^m x^{n-m}.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant m$ et $x \in [0,1[$ on pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k.$$

(a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1[$: $\quad S_n(x) = f(x) - (fg)(x)$.
Démontrer que :

$$\left| S_n^{(m)}(x) - \frac{m!}{(1-x)^{m+1}} \right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

(b) Conclure cette partie.

Partie C. *(7 points)*

Retrouvons le vaisseau spatial, son équipage et son alien.

Pour simplifier on suppose que la probabilité qu'il tue un membre de l'équipage le jour n est constante égale à $p \in]0,1[$, et qu'elle ne dépend plus des jours précédents. C'est-à-dire que chaque jour l'alien tue un membre de l'équipage avec la probabilité p, indépendamment des autres jours.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de membres de l'équipage tués au cours des n premiers jours.

Soit a le nombre de membres de l'équipage, supposé strictement positif.

On note Z la variable aléatoire égale au nombre de jours au bout desquels l'alien a tué tous les membres de l'équipage.

Il faut au moins a jours pour que tous les membres soient tués donc :

$$Z(\Omega) = \{a, a+1, \ldots\} = [\![a, +\infty[\![.$$

Il s'agit d'une variable aléatoire infinie.

1. Justifier que X_n suit une loi binomiale et donner ses paramètres.
2. Soit k un entier supérieur ou égal à a.
   (a) Justifier que : $\quad (Z = k) = (X_k = a) \cap (X_{k-1} = a-1)$.
   (b) En déduire $P(Z = k)$.
3. Vérifier que l'on a bien obtenu une loi de probabilité de Z, c'est-à-dire que :
   - $\forall k \in Z(\Omega) \quad P(Z = k) \geqslant 0$.
   - La série de terme général est convergente et sa somme est $\displaystyle\sum_{k \in Z(\Omega)} P(Z = k) = 1$.
4. Démontrer que Z admet une espérance, c'est-à-dire que la série de terme général $kP(Z = k)$ est convergente.
   Calculer cette espérance, définie par $E(Z) = \displaystyle\sum_{k \in Z(\Omega)} kP(Z = k)$.
   Que vaut cette espérance si p prend la valeur limite de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ obtenue dans la partie A ?

Partie D. *(7 points)*

Quelque temps plus tard une équipe de mercenaires débarque sur une planète sur laquelle la présence d'un certain nombre d'aliens est soupçonnée.

Elle explore indépendamment les $N+1$ régions de la planète ($N \in \mathbb{N}$).

Le but de cette partie est d'évaluer, en fonction du nombre de régions habitées par les aliens parmi les N premières régions explorées, la probabilité que la dernière région soit occupée.

La probabilité que des aliens soit présents dans chaque région est la même dans toutes les régions, mais elle est inconnue. Elle est modélisée par une variable aléatoire C. On suppose que C suit une loi uniforme sur l'ensemble $E = \left\{ \frac{k}{n} \;\middle|\; 0 \leqslant k \leqslant n \right\}$, où n est un entier naturel non-nul.

On note A_k l'événement $C = \frac{k}{n}$.

Pour tout $i = 1, \ldots, N+1$ on note X_i la variable aléatoire égale à 1 si des aliens sont présents dans la région i, et à 0 sinon.

Ainsi, pour tout $k = 0, \ldots, n$ et $i = 1, \ldots, N+1$, la loi de X_i conditionnée par l'événement A_k est une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{k}{n}$.

Les X_i sont indépendantes pour toutes les probabilités P_{A_k}, mais *a priori* pas pour la probabilité P.

Pour tout $m \in \{1, \ldots, N+1\}$ on pose : $\quad S_m = X_1 + \cdots + X_m$.

Pour les questions 1 à 4 on fixe $m \in \{1, \ldots, N+1\}$.

1. Soit $k \in \{0, \ldots, n\}$. Quelle est loi de S_m conditionnée par l'événement A_k ?
2. Pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$ on note $E_{A_k}(S_m)$ l'espérance de S_m pour la probabilité A_k :

$$E_{A_k}(S_m) = \sum_{i \in S_m(\Omega)} i P_{A_k}(S_m = i).$$

   Démontrer que $E(S_m) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(A_k) E_{A_k}(S_m)$ puis calculer $E(S_m)$ en fonction de m.
3. Soit $s \in S_m(\Omega)$. Démontrer :

$$P(S_m = s) = \frac{1}{n+1} \binom{m}{s} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^s \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-s}.$$

4. En déduire la limite de $P(S_m = m)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
5. Démontrer :

$$P_{S_N = N}(X_{N+1} = 1) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{N+1}{N+2}.$$

6. On admet que pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$:

$$\int_0^1 t^a (1-t)^b \, \mathrm{d}t = \frac{a!b!}{(a+b+1)!}.$$

   Soit $s \in S_m(\Omega)$. Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $P_{S_N = s}(X_{N+1} = 1)$.