

Devoir Surveillé n°9

Durée : 4 heures – Calculatrices non autorisées.

Consigne : se rappeler des consignes.

Problème 1. Séries

(20 points)

1. Décrire les variations de la fonction $f : t \mapsto \frac{\ln t}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad u_n = H_n - \ln n$$

- (a) Donner un équivalent de $u_n - u_{n-1}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- (b) Justifier que la série de terme général $u_n - u_{n-1}$ est convergente.
- (c) Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

On notera dans la suite $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

3. (a) Démontrer que la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ n'est pas absolument convergente.
- (b) Démontrer qu'elle est convergente.

Comment est appelé ce type de convergence ?

On notera dans la suite $S = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$.

4. Pour tout $n \geq 1$ on note :

$$T_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} \quad \text{et} \quad a_n = T_n - \frac{(\ln n)^2}{2}$$

- (a) Soit $n \geq 3$. Comparer les réels $f(n)$, $f(n+1)$, $\int_n^{n+1} f(t) dt$ et expliciter ce dernier.
 - (b) En déduire que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.
 - (c) Déduire également de la question (4a) une minoration de a_n pour $n \geq 3$.
 - (d) Justifier que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ converge.
5. Pour tout $n \geq 1$ on note :

$$S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{\ln k}{k}$$

- (a) Pour tout $n \geq 1$, donner une expression de $S_{2n} + T_{2n}$ en fonction de T_n et H_n .
- (b) En déduire une expression de S_{2n} en fonction de a_{2n} , a_n et u_n .
- (c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n}$ et en déduire la valeur de S .

On donnera cette limite en fonction de $\ln 2$ et γ .

Problème 2. Pseudo-inverse

(20 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *pseudo-inversible* s'il existe une matrice B telle que :

$$(i) \quad ABA = A \quad (ii) \quad BAB = B \quad (iii) \quad AB = BA$$

On dit alors que B est une matrice *pseudo-inverse* de A .

Partie A.

1. Démontrer que si A est inversible alors elle est pseudo-inversible, et en donner une matrice pseudo-inverse.
2. Soit A une matrice pseudo-inversible, B une matrice pseudo-inverse de A , P une matrice inversible, et $A' = P^{-1}AP$. Justifier que A' est pseudo-inversible et en donner une matrice pseudo-inverse.
3. (a) Soit A une matrice pseudo-inversible, B et B' deux matrices pseudo-inverses de A . En considérant la matrice $ABAB'$, montrer que $AB' = BA$.
(b) En déduire que si A est pseudo-inversible alors elle admet une unique matrice pseudo-inverse.

Partie B.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A .

1. Démontrer que A est de rang 2 et donner une base (u_1, u_2) de son image avec $u_1 = (1, 0, \alpha)$, $u_2 = (0, 1, \beta)$, où α et β sont deux réels à préciser.
2. Déterminer un vecteur u_3 engendrant $\ker A$.
3. Soit $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$. Démontrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, que l'on note A' .
5. Vérifier qu'il existe une sous-matrice A_1 de A' de taille $(2, 2)$ inversible, et inverser celle-ci.
6. Construire à l'aide de la matrice A_1^{-1} une matrice pseudo-inverse de A' .
7. En déduire que A est pseudo-inversible et donner une égalité matricielle permettant de calculer sa matrice pseudo-inverse B . On ne demande pas d'explicitier cette matrice pseudo-inverse.

Partie C.

1. Soit A une matrice pseudo-inversible, B sa matrice pseudo-inverse. Soit f et g les endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associés respectivement à A et B .
(a) Démontrer que $\operatorname{im} f = \operatorname{im}(f \circ g)$ et $\ker f = \ker(f \circ g)$.
(b) Démontrer que $f \circ g$ est un projecteur et en déduire que $\operatorname{im} f$ et $\ker f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}^n$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A . On suppose que $\ker f \cap \operatorname{im} f = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ et on note $r = \operatorname{rg} f$.
(a) Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{K}^n$ dans laquelle la matrice de f est une matrice par blocs $\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où M est une matrice carrée de taille (r, r) .
(b) Démontrer que M est inversible.
(c) Démontrer que A est pseudo-inversible.
3. Justifier qu'une matrice A est pseudo-inversible si et seulement si $\ker A \cap \operatorname{im} A = \{0\}$.

Problème 3. Tir à l'arc

(20 points)

Un archer tire n flèches ($n \in \mathbb{N}^*$) vers une cible, il gagne un point à chaque fois qu'il touche celle-ci.

Il a droit à une seconde chance pour tous les tirs ratés, c'est-à-dire qu'il tire une nouvelle flèche pour chacun d'entre eux.

On suppose que la probabilité qu'il touche la cible est p ($p \in]0, 1[$) à chaque tir, indépendamment des autres. On note $q = 1 - p$.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de points remportés lors des n premiers tirs, Y celle égale au nombre de points remportés lors de la seconde phase, et $Z = X + Y$. Ainsi Z est son score final.

Partie A.

1. Donner la loi de X , son espérance et sa variance.
2. (a) Soit $k \in X(\Omega)$. Justifier que Y sachant $X = k$ suit une loi binomiale de paramètres $n - k$ et p .
(b) En déduire la loi conjointe du couple (X, Y) .
(c) Calculer la loi de Y . Vérifier qu'il s'agit d'une loi binomiale de paramètres n et pq .
3. Calculer la loi de Z , vérifier qu'il s'agit d'une loi binomiale de paramètres n et $1 - q^2$.
4. Déterminer la covariance du couple (X, Y) , puis celle du couple (X, Z) . Commenter leurs signes.

Partie B.

On suppose que la variable aléatoire Z suit une loi quelconque, telle que $Z(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.

Lorsqu'il note son score final l'archer triche parfois en s'ajoutant un point, c'est-à-dire qu'il note Z ou $Z + 1$.

On note W la variable aléatoire égale au score qu'il note, et T l'événement : l'archer triche.

1. (a) Justifier que pour tout $k \in W(\Omega)$:

$$P(W = k) = P(T)P_T(Z = k - 1) + P(\bar{T})P_{\bar{T}}(Z = k)$$

- (b) En déduire une expression de l'espérance de W en fonction de celle de Z et de la probabilité de T .

On suppose que pour tout $k \in Z(\Omega)$: $P_{Z=k}(T) = 1 - \frac{k}{n}$.

2. Déterminer la probabilité de T en fonction de l'espérance de Z .
3. Dans cette question on suppose que Z suit une loi uniforme sur $\llbracket 0, n \rrbracket$.
 - (a) Calculer la loi de W .
 - (b) Vérifier la formule pour l'espérance de W obtenue dans la question (1b).
4. Dans cette question on suppose que Z suit une loi binomiale de paramètres n et a où $a \in]0, 1[$, et on note $b = 1 - a$.
 - (a) Calculer la loi de W .
 - (b) Reconnaître la loi de $W - 1$ et vérifier la formule pour l'espérance de W obtenue dans la question (1b).