

Corrigé du Devoir Surveillé n°9

Problème 1. Séries

(20 points)

1. (1 point) La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln t}{t}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Cette dérivée est positive sur $]0, e]$ et négative sur $[e, +\infty[$, donc f est croissante sur $]0, e]$ et décroissante sur $[e, +\infty[$.

2. (a) (2 points) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Alors :

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= H_n - H_{n-1} - \ln n + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{2n^2} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Ceci donne l'équivalent : $u_n - u_{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$

- (b) (2 points) L'équivalent précédent s'écrit : $u_{n-1} - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$

Comme $\frac{1}{2n^2}$ est strictement positif alors à partir d'un certain rang $u_{n-1} - u_n$ est strictement positif.

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente car $2 > 1$, donc par linéarité la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n^2}$ est convergente.

Par théorème d'équivalence des séries à termes positifs la série $\sum_{n \geq 2} (u_{n-1} - u_n)$ est convergente, et encore par linéarité la série $\sum_{n \geq 2} (u_n - u_{n-1})$ est convergente.

- (c) (1 point) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ posons $S_n = \sum_{k=2}^n (u_k - u_{k-1})$.

Comme la série $\sum_{n \geq 2} (u_n - u_{n-1})$ est convergente alors la suite $(S_n)_{n \geq 2}$ est convergente.

Or par télescopage : $\forall n \geq 2 \quad S_n = u_n - u_1$.

Ainsi la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge.

3. (a) (2 points) La série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ est absolument convergente si et seulement si la série $\sum_{n \geq 1} \left| (-1)^n \frac{\ln n}{n} \right| = \sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n}$ est convergente. Or :

$$\forall n \geq 3 \quad 0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{\ln n}{n}$$

En effet, si $n \geq 3$ alors $n \geq e$ donc $\ln n \geq 1$.

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente donc par théorème de comparaison des séries à termes positifs la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n}$ est divergente.

Ceci montre que la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ n'est pas absolument convergente.

(b) (2 points) La série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ est alternée.

La fonction f est décroissante sur $[e, +\infty[$ donc la suite $\left(\frac{\ln n}{n}\right)_{n \geq 1}$ est décroissante à partir du rang 3.

Par croissances comparées : $\frac{\ln n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Par critère spécial des séries alternées la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ est convergente.

Il s'agit d'une série convergente mais non absolument convergente, c'est-à-dire une série semi-convergente.

4. (a) (2 points) Soit $n \geq 3$. Alors $n \geq e$ donc la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[n, n+1]$, ce qui donne :

$$\forall t \in [n, n+1] \quad f(n+1) \leq f(t) \leq f(n).$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_n^{n+1} f(n+1) dt \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq \int_n^{n+1} f(n) dt.$$

On en déduit :

$$\forall n \geq 3 \quad f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n). \quad (1)$$

De plus :

$$\int_n^{n+1} f(t) dt = \int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t} dt = \left[\frac{\ln^2 t}{2} \right]_n^{n+1} = \frac{\ln^2(n+1)}{2} - \frac{\ln^2 n}{2}. \quad (2)$$

(b) (1 point) Par définition des a_n :

$$\forall n \geq 3 \quad a_{n+1} - a_n = T_{n+1} - T_n - \frac{\ln^2(n+1)}{2} + \frac{\ln^2 n}{2} = f(n+1) - \frac{\ln^2(n+1)}{2} + \frac{\ln^2 n}{2}$$

D'après l'égalité (2) et l'encadrement (1) :

$$a_{n+1} - a_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t) dt \leq 0$$

Ceci montre que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

(c) (2 points) Soit $n \geq 3$. L'encadrement (1) donne par somme pour k allant de 3 à n :

$$\sum_{k=3}^n \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \sum_{k=3}^n f(k).$$

On en déduit par définition de T_n et relation de Chasles :

$$\int_3^{n+1} f(t) dt \leq T_n - f(1) - f(2).$$

Ceci donne :

$$T_n \geq \frac{\ln^2(n+1)}{2} - \frac{\ln^2 3}{2} + \frac{\ln 2}{2}$$

On en déduit, en utilisant l'égalité (2) :

$$a_n \geq \frac{\ln^2(n+1)}{2} - \frac{\ln^2 3}{2} + \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln^2 n}{2} = \int_n^{n+1} f(t) dt - \frac{\ln^2 3}{2} + \frac{\ln 2}{2}$$

La fonction f est positive sur l'intervalle $[1, +\infty[$. Comme $n \geq 3$ alors elle est positive sur $[n, n+1]$, et par croissance de l'intégrale :

$$\int_n^{n+1} f(t) dt \geq 0$$

Ceci montre que :

$$\forall n \geq 3 \quad a_n \geq \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln^2 3}{2}.$$

La suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est donc minorée.

- (d) (1 point) La suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est décroissante à partir d'un certain rang et minorée donc par théorème de la limite monotone elle converge.
5. (a) (1 point) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$S_{2n} + T_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (1 + (-1)^k) \frac{\ln k}{k}$$

Les termes pour k impair s'annulent donc il ne reste que les termes pour k pair, c'est-à-dire pour $k = 2j$ avec j allant de 1 à n :

$$S_{2n} + T_{2n} = \sum_{j=1}^n 2 \frac{\ln(2j)}{2j} = \sum_{j=1}^n \frac{\ln j + \ln 2}{j} = \sum_{j=1}^n \frac{\ln j}{j} + \ln 2 \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$$

Finalement :

$$\forall n \geq 3 \quad S_{2n} + T_{2n} = T_n + \ln 2 \times H_n.$$

- (b) (1 point) On obtient :

$$\begin{aligned} S_{2n} &= T_n - T_{2n} + \ln 2 \times H_n = a_n + \frac{\ln^2 n}{2} - a_{2n} - \frac{\ln^2(2n)}{2} + \ln 2 \times (u_n + \ln n) \\ &= a_n - a_{2n} + \frac{\ln^2 n}{2} - \frac{(\ln 2 + \ln n)^2}{2} + \ln 2 \times \ln n + \ln 2 \times H_n \\ &= a_n - a_{2n} + \ln 2 \times u_n - \frac{\ln^2 2}{2} \end{aligned}$$

- (c) (2 points) La suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est convergente, donc la suite extraite $(a_{2n})_{n \geq 1}$ converge vers la même limite, et ainsi $a_n - a_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On sait que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers γ donc par combinaison linéaire la suite $(S_{2n})_{n \geq 1}$ converge vers $\gamma \ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2}$.

La série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ est convergente donc la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ converge et sa limite est la somme $S = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$.

La suite $(S_{2n})_{n \geq 1}$ est extraite de la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ donc elle converge vers la même limite S , ce qui montre que :

$$S = \gamma \ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2}.$$

Problème 2. Pseudo-inverse

(20 points)

Partie A.

1. (1 point) Si A est inversible alors sa matrice inverse A^{-1} est définie, et comme $AA^{-1} = A^{-1}A$, alors elle vérifie les égalités $AA^{-1}A = A$, $A^{-1}AA^{-1} = A^{-1}$, $AA^{-1} = A^{-1}A$.

Donc A est pseudo-inversible et la matrice inverse de A est une matrice pseudo-inverse de A .

2. (1 point) Comme A est inversible alors il existe une matrice B pseudo-inverse de A , c'est-à-dire telle que $ABA = A$, $BAB = B$, $AB = BA$.

Posons $B' = P^{-1}BP$. Alors

$$\begin{aligned} (i) \quad A'B'A' &= P^{-1}APP^{-1}BPP^{-1}AP = P^{-1}ABAP = P^{-1}AP = A' \\ (ii) \quad B'A'B' &= P^{-1}BPP^{-1}APP^{-1}BP = P^{-1}BABP = P^{-1}BP = B' \\ (iii) \quad A'B' &= P^{-1}APP^{-1}BP = P^{-1}ABP = P^{-1}BAP = P^{-1}BPP^{-1}AP = B'A' \end{aligned}$$

La matrice A' est donc pseudo-inversible et la matrice B' est une matrice pseudo-inverse de A' .

3. (a) (1 point) Comme $ABA = A$ alors $ABAB' = AB'$.

D'autre part B et B' commutent avec A , donc $ABAB' = BAB'A$. Comme $AB'A = A$ alors $BAB'A = BA$. Ceci montre que $AB' = BA$.

- (b) (1 point) Supposons que A est pseudo-inversible et qu'elle admet deux matrices pseudo-inverses B et B' .

Alors $AB' = BA$ d'après la question précédente, donc $B'(AB') = B'(BA)$, puis $B' = B'BA$.

Comme $A = ABA$ alors $B'BA = B'BABA$ et comme A commute avec B et B' alors $B'BA = AB'AB^2 = AB^2 = BAB = B$. On a obtenu $B' = B$.

Ceci montre que si A est pseudo inversible alors A admet une unique matrice pseudo-inverse.

Partie B.

1. (1 point) Par opérations élémentaires sur les colonnes :

$$A \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc A est de rang 2, et son image est engendrée par les vecteurs $u_1 = (1, 0, 1)$ et $u_2 = (0, 1, 1)$, lesquels en forment bien une base car ils sont linéairement indépendants.

2. (1 point) Par opérations élémentaires sur les lignes :

$$A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le noyau de A est l'ensemble des vecteurs colonnes X tels que $AX = 0$, donc l'ensemble des triplets (x, y, z) tels que $x - z = 0$ et $y + 3z = 0$.

On en déduit $\ker f = \text{Vect}((1, -3, 1))$, donc le vecteur $u_3 = (1, -3, 1)$, engendre $\ker A$.

3. (1 point) La matrice de la famille $\mathcal{B}$ dans la base canonique est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Par opérations sur les lignes :

$$P \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Ceci montre que la matrice P est de rang 3, donc elle est inversible et ainsi ses colonnes forment une base de $\mathbb{R}^3$, *i.e.*, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4. (1 point) On constate que :

$$f(u_1) = (3, 6, 9) = 3u_1 + 6u_2 \quad f(u_2) = (3, 7, 10) = 3u_1 + 7u_2 \quad f(u_3) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est donc :

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. (1 point) La sous-matrice $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ de A' est effectivement inversible car son déterminant est égal à 3, il est non-nul. Sa matrice inverse est

$$A_1^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

6. (1 point) On pose

$$B' = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & -3 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que :

$$A'B' = B'A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ensuite on en déduit que $A'B'A' = A'$, $B'A'B' = B'$, donc la matrice A' est pseudo-inversible et la matrice B' est la matrice pseudo-inverse de A' .

7. (1 point) La matrice P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, la matrice A est la matrice de f dans la base canonique et la matrice A' est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, donc $A = PA'P^{-1}$.

D'après la question 2 de la partie A, comme A' est pseudo-inversible et $A = PA'P^{-1}$ alors A est pseudo-inversible et sa matrice pseudo-inverse est $B = PB'P^{-1}$.

Partie C.

1. (a) (2 points) Soit v un élément de $\text{im}(f \circ g)$. Alors il existe $u \in \mathbb{K}^n$ tel que $v = f(g(u))$, donc $v \in \text{im } f$. Ceci justifie l'inclusion $\text{im}(f \circ g) \subseteq \text{im } f$.

Soit $v \in \text{im } f$. Alors il existe $u \in \mathbb{K}^n$ tel que $v = f(u)$. Comme $A = ABA$ alors $f = f \circ g \circ f$, donc $v = f(g(f(u)))$, et donc $v \in \text{im}(f \circ g)$. Ceci justifie l'inclusion $\text{im } f \subseteq \text{im}(f \circ g)$.

Soit $u \in \ker f$. Alors $f(u) = 0_E$, donc $g(f(u)) = 0_{\mathbb{K}^n}$. Comme $AB = BA$ alors $f \circ g = g \circ f$ et donc $f(g(u)) = 0_{\mathbb{K}^n}$, ce qui montre que $u \in \ker(f \circ g)$. Ainsi $\ker f \subseteq \ker(f \circ g)$.

Soit $u \in \ker(f \circ g)$. Alors $f(g(u)) = 0$, donc $g(f(u)) = 0$ puis $f(g(f(u))) = 0$. Comme $ABA = A$ alors $f \circ g \circ f = f$, donc $f(u) = 0$ et $u \in \ker f$. Ainsi $\ker(f \circ g) \subseteq \ker f$.

Par doubles inclusions : $\text{im } f = \text{im}(f \circ g)$ et $\ker f = \ker(f \circ g)$.

- (b) (1 point) Comme $ABA = A$, alors $ABAB = AB$ donc $(AB)^2 = AB$. Ceci montre que $f \circ g$ est un projecteur.

Comme $f \circ g$ est un projecteur alors $\text{im}(f \circ g)$ et $\ker(f \circ g)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}^n$, et donc d'après la question précédente $\text{im } f$ et $\ker f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}^n$.

2. (a) (3 points) D'après le théorème du rang : $\dim \text{im } f + \dim \ker f = \dim \mathbb{K}^n = n$.

Par hypothèse $\text{im } f \cap \ker f = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$.

Par théorème on en déduit que $\text{im } f$ et $\ker f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}^n$.

Comme f est de rang r alors $\text{im } f$ admet une base de cardinal r . Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une telle base.

Comme $\ker f$ est de dimension $n - r$ alors $\ker f$ admet une base de cardinal $n - r$. Soit $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ une telle base.

Comme $\text{im } f$ et $\ker f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}^n$ alors le théorème de la base adaptée montre que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$. On note $\mathcal{B}$ cette base.

Soit $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$. Alors $f(e_i) \in \text{im } f$ donc $f(e_i)$ est combinaison linéaire de $e_1, \dots, e_r$.

Soit $i \in \llbracket r + 1, n \rrbracket$. Alors $e_i \in \ker f$ donc $f(e_i) = 0$.

Ceci montre que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est une matrice par blocs $\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où M est de taille (r, r) . On note A' cette matrice.

- (b) (1 point) Comme A' est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ alors $\text{rg } A' = \text{rg } f = r$.

De plus $\text{rg } A' = \text{rg } M$ donc M est de rang r . Ainsi M est une matrice de taille (r, r) et de rang r , donc M est inversible.

- (c) (1 point) On pose $B' = \begin{pmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On vérifie alors que $A'B'A' = A'$, $B'A'B' = B'$, et $A'B' = B'A'$, donc A' est pseudo-inversible et B' est sa matrice pseudo-inverse.

D'après la question 2 de la partie A, comme A' est pseudo-inversible et $A = PA'P^{-1}$ alors A est pseudo-inversible.

3. (1 point) Soit A une matrice de taille (n, n) et f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A . Alors $\text{im } A = \text{im } f$ et $\ker A = \ker f$.

D'après la question 1 ci-dessus, si A est pseudo-inversible alors $\text{im } f$ et $\ker f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}^n$, donc $\text{im } A \cap \ker A = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$.

D'après la question 2 ci-dessus, si $\text{im } A \cap \ker A = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ alors A est pseudo-inversible.

On a donc démontré que A est pseudo-inversible si et seulement si $\ker A \cap \text{im } A = \{0\}$.

Problème 3. Tir à l'arc

(20 points)

Partie A.

- (2 points) L'archer réalise n expériences aléatoires identiques et indépendantes : tirer une flèche. La variable aléatoire X est le nombre d'occurrences de l'événement "toucher la cible", lequel est de probabilité p , donc par définition X suit une loi binomiale de paramètres n et p .

Par propriété son espérance et sa variance sont $E(X) = np$ et $V(X) = npq$ où $q = 1 - p$.

- (1 point) Si l'événement $X = k$ a lieu alors l'archer a touché k fois la cible, donc il l'a ratée $n - k$ fois. Il tire alors $n - k$ nouvelles flèches.

Comme Y est le nombre d'occurrences de l'événement "toucher la cible" alors de même que ci-dessus Y suit une loi binomiale de paramètres $n - k$ et p .

- (2 points) D'après la première question $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

D'après la question précédente :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad \forall j \in \llbracket 0, n - k \rrbracket \quad P_{X=k}(Y = j) = \binom{n-k}{j} p^j q^{n-k-j}.$$

De plus :

$$\forall k \in X(\Omega) \quad \forall j \in Y(\Omega) \quad P(X = k \cap Y = j) = P(X = k) P_{X=k}(Y = j)$$

Si l'événement $X = k$ a lieu alors Y prend ses valeurs entre 0 et $n - k$. Or $k \in X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$, donc Y prend ses valeurs entre 0 et n , et ainsi $Y(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$. Finalement on obtient :

$$\forall (k, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2 \quad P(X = k \cap Y = j) = \begin{cases} \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} p^{k+j} q^{2n-2k-j} & \text{si } 0 \leq j \leq n - k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (2 points) La loi marginale de Y est donnée par la formule :

$$\forall j \in Y(\Omega) \quad P(Y = j) = \sum_{k \in X(\Omega)} P(X_k \cap Y = j).$$

On sait que $P(X_k \cap Y = j)$ est non-nulle si $0 \leq j \leq n - k$, donc si $0 \leq k \leq n - j$, ce qui donne :

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad P(Y = j) = \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} p^{k+j} q^{2n-2k-j}$$

En développant les coefficients du binôme :

$$\begin{aligned} P(Y = j) &= \sum_{k=0}^{n-j} \frac{n!}{k!j!(n-k-j)!} p^{k+j} q^{2n-2k-j} \\ &= \frac{n!}{j!(n-j)!} \sum_{k=0}^{n-j} \frac{(n-j)!}{k!(n-k-j)!} p^{j+k} q^{2n-2k-j} \end{aligned}$$

Ceci donne :

$$P(Y = j) = \binom{n}{j} p^j q^j \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} p^k q^{2(n-j-k)}$$

D'après la formule du binôme :

$$P(Y = j) = \binom{n}{j} (pq)^j (p + q^2)^{n-j}.$$

On vérifie :

$$1 - pq = 1 - (1 - q)q = 1 - q + q^2 = p + q^2$$

Finalement :

$$Y(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad P(Y = j) = \binom{n}{j} (pq)^j (1 - pq)^{n-j}.$$

Ceci montre que Y suit une loi binomiale de paramètres n et pq .

Effectivement Y est le nombre de flèches touchant la cible au second essai, ce qui signifie que la cible a été ratée au premier tir (probabilité q) puis atteinte au second tir (probabilité p , les deux tirs étant indépendants).

3. (2 points) Comme $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et $Z = X + Y$ alors $Z(\Omega) \subseteq \llbracket 0, 2n \rrbracket$.

Comme X et Y sont entières et positives alors la loi de Z est donnée par la formule :

$$\forall i \in Z(\Omega) \quad P(Z = i) = \sum_{k=0}^n P(X = k \cap Y = i - k)$$

On sait que la probabilité $P(X = k \cap Y = j)$ est non-nulle si $0 \leq j \leq n - k$, donc la probabilité $P(X = k \cap Y = i - k)$ est non-nulle si $0 \leq i - k \leq n - k$, i.e., $k \leq i \leq n$. Ceci montre que i doit être plus petit que n , donc $Z(\Omega) \subseteq \llbracket 0, n \rrbracket$, et :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad P(Z = i) = \sum_{k=0}^i P(X = k \cap Y = i - k)$$

On calcule :

$$\begin{aligned} P(Z = i) &= \sum_{k=0}^i \binom{n}{k} \binom{n-k}{i-k} p^i q^{2n-k-i} = \frac{n!}{(n-i)!} \sum_{k=0}^i \frac{1}{k!(i-k)!} p^i q^{2n-k-i} \\ &= \binom{n}{i} \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} p^i q^{2n-k-i} = \binom{n}{i} p^i q^{2n-i} \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} q^{-k} \end{aligned}$$

D'après la formule du binôme :

$$P(Z = i) = \binom{n}{i} p^i q^{2n-i} \left(1 + \frac{1}{q}\right)^i = \binom{n}{i} (pq + p)^i q^{2(n-i)}$$

On remarque que $pq + p = p(1 + q) = 1 - q^2$ donc finalement :

$$Z(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad P(Z = i) = \binom{n}{i} (1 - q^2)^i q^{2(n-i)}$$

Donc Z suit une loi binomiale de paramètres n et $1 - q^2$.

Ceci s'explique car on peut considérer que l'archer réalise n expériences identiques et indépendantes consistant à tirer deux flèches pour atteindre la cible. La probabilité qu'il rate deux fois la cible est q^2 car les tirs sont indépendants, donc la probabilité qu'il atteigne la cible en deux essais est $1 - q^2$.

4. (2 points) On utilise la formule :

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{2}(V(X + Y) - V(X) - V(Y))$$

Comme X , Y et $Z = X + Y$ suivent des lois binomiales alors on connaît leurs variances :

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{2}(n(1 - q^2)q^2 - npq - npq(1 - pq))$$

On obtient :

$$\text{Cov}(X, Y) = -np^2q$$

Cette covariance est négative. En effet, si X est grand alors l'archer a peu de flèches à tirer lors de la seconde phase, donc Y est petit, et si X est petit alors il a beaucoup de flèches à tirer lors de la seconde phase donc Y prend plutôt de grandes valeurs.

Pour la covariance du couple (X, Y) on utilise la bilinéarité de la covariance :

$$\text{Cov}(X, Z) = \text{Cov}(X, X + Y) = \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(X, X) = \text{Cov}(X, Y) + V(X)$$

Ceci donne :

$$\text{Cov}(X, Z) = -np^2q + npq = npq^2$$

Cette covariance est positive. Effectivement si X est grand alors la somme $X + Y$ a tendance à être grande aussi.

Partie B.

1. (a) (1 point) Soit $k \in W(\Omega)$. La famille $(T, \bar{T})$ forme un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(W_k) &= P(T)P_T(W = k) + P(\bar{T})P_{\bar{T}}(W_k) \\ &= P(T \cap (W = k)) + P(\bar{T} \cap (W = k)) \end{aligned}$$

Si l'archer triche et note k points, alors il a réalisé $k - 1$ points, ce qui montre que $T \cap (W = k) = T \cap (Z = k - 1)$. S'il ne triche pas et note k points alors il a vraiment réalisé k points, donc $\bar{T} \cap (W = k) = \bar{T} \cap (Z = k)$. On en déduit :

$$\begin{aligned} P(W = k) &= P(T \cap (Z = k - 1)) + P(\bar{T} \cap (Z = k)) \\ &= P(T)P_T(Z = k - 1) + P(\bar{T})P_{\bar{T}}(Z = k) \end{aligned}$$

- (b) (2 points) On sait que $Z(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et l'archer note Z ou $Z + 1$ points, donc $W(\Omega) = \llbracket 0, n + 1 \rrbracket$.

Par définition de l'espérance :

$$E(W) = \sum_{k=0}^{n+1} kP(W = k).$$

D'après la question précédente et par linéarité de la somme :

$$E(W) = \sum_{k=0}^{n+1} kP(T)P_T(Z = k - 1) + \sum_{k=0}^{n+1} kP(\bar{T})P_{\bar{T}}(Z = k)$$

On sait que $P(Z = -1) = P(Z = n + 1) = 0$, donc :

$$E(W) = \sum_{k=1}^{n+1} kP(T)P_T(Z = k - 1) + \sum_{k=0}^n kP(\bar{T})P_{\bar{T}}(Z = k)$$

Par changement d'indice et linéarité :

$$\begin{aligned} E(W) &= \sum_{j=0}^n (j + 1)P(T)P_T(Z = j) + \sum_{k=0}^n kP(\bar{T})P_{\bar{T}}(Z = k) \\ &= \sum_{k=0}^n (k + 1)P(T)P_T(Z = k) + \sum_{k=0}^n kP(\bar{T})P_{\bar{T}}(Z = k) \\ &= \sum_{k=0}^n k[P(T)P_T(Z = k) + P(\bar{T})P_{\bar{T}}(Z = k)] + \sum_{k=0}^n P(T)P_T(Z = k) \end{aligned}$$

La famille $(T, \bar{T})$ forme un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\forall k \in Z(\Omega) \quad P(T)P_T(Z = k) + P(\bar{T})P_{\bar{T}}(Z = k) = P(Z = k).$$

La famille $(Z = k \mid k = 0, \dots, n)$ forme un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\sum_{k=0}^n P(T)P_T(Z = k) = \sum_{k=0}^n P(T \cap (Z = k)) = \sum_{k=0}^n P(Z = k)P_{Z=k}(T) = P(T)$$

On en déduit :

$$E(W) = \sum_{k=0}^n kP(Z = k) + P(T)$$

Par définition de l'espérance :

$$E(W) = E(Z) + P(T).$$

2. (1 point) Comme vu dans la question précédente, la formule des probabilités totales montre que :

$$P(T) = \sum_{k=0}^n P(Z = k)P_{Z=k}(T)$$

Ceci donne par linéarité :

$$P(T) = \sum_{k=0}^n P(Z = k) \left(1 - \frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^n P(Z = k) - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n k P(Z = k)$$

Et on en déduit :

$$P(T) = 1 - \frac{1}{n} E(Z).$$

3. (a) (2 points) D'après la question 1a :

$$\forall k \in W(\Omega) \quad P(W = k) = P(T)P_T(Z = k - 1) + P(\bar{T})P_{\bar{T}}(Z = k)$$

Ceci s'écrit aussi :

$$\forall k \in W(\Omega) \quad P(W = k) = P((Z = k - 1) \cap T) + P((Z = k) \cap \bar{T}) \quad (3)$$

Si les événements $Z = k - 1$ et $Z = k$ sont de probabilités non-nulles alors :

$$\forall k \in W(\Omega) \quad P(W = k) = P(Z = k - 1)P_{Z=k-1}(T) + P(Z = k)P_{Z=k}(\bar{T}) \quad (4)$$

On sait que $W(\Omega) = \llbracket 0, n + 1 \rrbracket$, et comme Z suit une loi uniforme sur $\llbracket 0, n \rrbracket$ alors :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad P(Z = k) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5)$$

On isole les cas $k = 0$ et $k = n + 1$. D'après (3) :

$$\begin{aligned} P(W = 0) &= P((Z = 0) \cap \bar{T}) = P(Z = 0)P_{Z=0}(\bar{T}) \\ &= P(Z = 0)(1 - P_{Z=0}(T)) = \frac{1}{n+1} \times \left(1 - \left(1 - \frac{0}{n}\right)\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } P(W = n + 1) &= P((Z = n) \cap T) \\ &= P(Z = n)P_{Z=n}(T) = \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{n}{n}\right) = 0 \end{aligned}$$

Si maintenant $1 \leq k \leq n$ alors $k - 1 \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ donc d'après (4) et (5) :

$$P(W = k) = \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \frac{1}{n+1} \left(1 - \left(1 - \frac{k}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}$$

Finalement on a démontré :

$$W(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad P(W = k) = \frac{1}{n}$$

Ceci montre que W suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

(b) (1 point) Comme Z suit une loi uniforme sur $\llbracket 0, n \rrbracket$ alors $E(Z) = \frac{n}{2}$.

D'après la question 2 on a $P(T) = 1 - \frac{1}{n}E(Z) = \frac{1}{2}$.

On en déduit $E(W) = \frac{n+1}{2}$.

Effectivement comme W suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ alors $E(W) = \frac{n+1}{2}$.

4. (a) (1 point) Comme Z suit une loi binomiale de paramètres n et a alors :

$$Z(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad P(Z = k) = \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Les égalités (3) et (4) sont toujours vraies.

Comme $P_{Z=0}(\bar{T}) = 0$ et $P_{Z=n}(T) = 0$ alors on obtient encore :

$$\begin{aligned} P(W = 0) &= P(Z = 0)P_{Z=0}(\bar{T}) = 0 \\ \text{et} \quad P(W = n + 1) &= P(Z = n)P_{Z=n}(T) = 0 \end{aligned}$$

Si $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ alors $k - 1 \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ donc :

$$\begin{aligned} P(W = k) &= P(Z = k - 1)P_{Z=k-1}(T) + P(Z = k)P_{Z=k}(\bar{T}) \\ &= \binom{n}{k-1} a^{k-1} b^{n-k+1} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} \frac{n+1-k}{n} a^{k-1} b^{n-k+1} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{k}{n} a^k b^{n-k} \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} a^{k-1} b^{n-k} (b + a) = \binom{n-1}{k-1} a^{k-1} b^{n-k} \end{aligned}$$

Finalement :

$$W(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad P(W = k) = \binom{n-1}{k-1} a^{k-1} b^{n-k}$$

(b) (1 point) Comme $W(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ alors $(W - 1)(\Omega) = \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, et :

$$\forall k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket \quad P(W - 1 = k) = P(W = k + 1) = \binom{n-1}{k} a^k b^{n-1-k}$$

Ceci montre que $W - 1$ suit une loi binomiale de paramètres $n - 1$ et a .

En conséquence $E(W - 1) = (n - 1)a$, donc par linéarité

$$E(W) = (n - 1)a + 1 = na + b.$$

Comme Z suit une loi binomiale de paramètres n et a alors $E(Z) = na$.

D'après la question 2 : $P(T) = 1 - \frac{1}{n}E(Z) = 1 - a = b$.

Dans la question (1b) on a montré que $E(W) = E(Z) + P(T)$, ce qui est bien confirmé car $E(W) = na + b$.