Corrigé du Devoir Surveillé n°9

Problème 1. Transformation d'Abel *(19 points)*

Partie A. Définition et théorème *(9 points)*

1. (a) *(1 point)* Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\quad B_k - B_{k-1} = \sum_{i=1}^{k} b_i - \sum_{i=1}^{k-1} b_i = b_k$.

   Donc $b_k = B_k - B_{k-1}$.

   Ce résultat reste valable si $k = 0$, car B_{-1} est une somme vide.

   (b) *(1 point)* On utilise la relation de la question précédente et le fait que $B_{-1} = 0$:

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=0}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n} a_k B_{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k = a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k.\end{aligned}$$

   Il s'agit du résultat demandé.

2. (a) *(2 points)* Par hypothèse la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est réelle décroissante donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n - a_{n+1} \geqslant 0.$$

   Ceci montre que $|a_n - a_{n+1}| = a_n - a_{n+1}$.

   Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad S_n = \sum_{k=0}^{n} |a_n - a_{n+1}|$.

   Alors par télescopage :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} (a_n - a_{n+1}) &= \sum_{k=0}^{n} a_n - \sum_{k=0}^{n} a_{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_n - \sum_{k=1}^{n+1} a_n = a_0 - a_{n+1}.\end{aligned}$$

   Par hypothèse la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie, et ainsi la série $\sum |a_n - a_{n+1}|$ converge, *i.e.*, la série $\sum (a_n - a_{n+1})$ converge absolument.

   (b) *(2 points)* Comme la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors la suite $(|B_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Soit M un de ses majorants. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant |(a_n - a_{n+1}) B_n| \leqslant |a_n - a_{n+1}| M.$$

Comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(a_n - a_{n+1})$ converge absolument alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}|a_n - a_{n+1}|$ converge, et donc par linéarité la série $M\sum\limits_{n\geqslant 0}|a_n - a_{n+1}|$ converge.

Par théorème de comparaison des séries à termes positifs la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}|(a_n - a_{n+1})B_n|$ converge.

Donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(a_n - a_{n+1})B_n$ converge absolument.

(c) *(2 points)* La transformation d'Abel donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k. \tag{1}$$

Comme M est un majorant de $|B_n|$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |a_n B_n| \leqslant M|a_n|.$$

Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 alors par théorème d'encadrement la suite $(a_n B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(a_n - a_{n+1})B_n$ converge absolument alors elle converge.

Donc la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Par somme la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n b_n$ converge.

3. *(2 points)* Démontrons le critère spécial des séries alternées :

Soit (u_n) est une suite alternée avec $(|u_n|)$ décroissante et convergeant vers 0.

Alors la série $\sum u_n$ est convergente.

Soit (u_n) une suite alternée telle que la suite $(|u_n|)$ est décroissante et converge vers 0.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = |u_n|$ et $b_n = \operatorname{sgn}(u_n)$.

Alors :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = a_n b_n$.
- Par hypothèse la suite (a_n) est réelle, décroissante et converge vers 0.
- Comme la suite (u_n) est alternée alors la suite (b_n) est de la forme $((-1)^n)$ ou $((-1)^{n+1})$.

Quitte à remplacer les u_n par $-u_n$ on peut supposer que $b_n = (-1)^n$, ceci ne change pas la nature de la série $\sum u_n$.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$. Alors : $\forall n \in \mathbb{N} \quad B_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$.

La suite (B_n) alterne entre les valeurs 1 et 0, donc elle est bornée.

Finalement :

- La suite (B_n) est bornée.
- La suite (a_n) est réelle, décroissante et converge vers 0.

D'après le critère d'Abel la série $\sum a_n b_n$ converge, *i.e.,* la série $\sum u_n$ converge.

Partie B. Une application *(10 points)*

1. (a) *(1 point)* Comme θ n'est pas multiple de 2π alors $e^{i\theta} \neq 1$.
Ainsi par somme des termes d'une suite géométrique :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta} = \frac{e^{i\theta} - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}.$$

(b) *(2 points)* Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad a_n = \dfrac{1}{n^\alpha} \quad$ et $\quad b_n = e^{in\theta}$.

Ajoutons : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad B_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k$.

D'après la question précedente : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad B_n = \dfrac{e^{i\theta} - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$.

Par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |B_n| &= \frac{1}{|1 - e^{i\theta}|}\left|e^{i\theta} - e^{i(n+1)\theta}\right| \\ &\leqslant \frac{1}{|1 - e^{i\theta}|}\left(\left|e^{i\theta}\right| + \left|e^{i(n+1)\theta}\right|\right) \leqslant \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|} \end{aligned}$$

Ceci montre que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

De plus, comme $\alpha > 0$ alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est réelle, décroissante et converge vers 0.

D'après le critère d'Abel la série $\sum a_n b_n$ converge, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est convergente.

(c) *(2 points)* Si x est multiple de 2π alors : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \dfrac{\sin(nx)}{n} = 0$.

Dans ce cas la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin nx}{n}$ converge, et sa somme est égale à 0.

Si maintenant x n'est pas multiple de 2π, alors $-x$ n'est pas multiple de 2π non plus. On peut appliquer le résultat de la question précédente avec $\theta = x$ et $\theta = -x$.

Si $\alpha = 1$ alors on a bien $\alpha > 0$.

D'après la question précédente les séries $\sum \dfrac{e^{inx}}{n}$ et $\sum \dfrac{e^{-inx}}{n}$ convergent.

Par linéarité la série de terme général

$$\frac{\sin(nx)}{n} = \frac{1}{2i}\left(\frac{e^{inx}}{n} - \frac{e^{-inx}}{n}\right)$$

converge.

On a démontré que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin nx}{n}$ converge.

2. *(1 point)* Soit $n \in \mathbb{N}$.

   Comme $x \in]0, \pi]$ alors x n'est pas multiple de 2π, donc d'après le résultat de la question 1a :
$$\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = \frac{e^{ix} - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}.$$
   Par factorisation par l'angle moyen :
$$\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = \frac{e^{i(n+2)\frac{x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}} \times \frac{e^{-in\frac{x}{2}} - e^{in\frac{x}{2}}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} = e^{i(n+1)\frac{x}{2}} \frac{\sin\left(n\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}$$
   Par unicité de la partie réelle :
$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\left(n\frac{x}{2}\right)\cos\left((n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}.$$
   Ceci est le résultat attendu.

3. *(2 points)* On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

   On applique la formule de transformation de produit en somme suivante :
$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)).$$
   Elle donne :
$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}}.$$
   Ceci montre que :
$$\forall t \in [x, \pi] \qquad \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\frac{t}{2}}.$$
   Par croissance et linéarité de l'intégrale :
$$\sum_{k=1}^{n} \int_x^{\pi} \cos(kt)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_x^{\pi} 1\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_x^{\pi} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t.$$
   En multipliant par (-1), comme $\sin(k\pi) = 0$:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2} - \frac{1}{2}\int_x^{\pi} \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t.$$
   Il s'agit de l'égalité attendue.

4. *(2 points)* On pose :

$$\forall t \in [x,\pi] \qquad u(t) = -\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) \qquad \text{et} \qquad v(t) = \frac{1}{\sin\frac{t}{2}}.$$

Ces deux fonctions sont bien définies sur le segment $[x,\pi]$ car :

$$\forall t \in [x,\pi] \qquad 0 < \frac{x}{2} \leqslant \frac{t}{2} \leqslant \frac{\pi}{2} \qquad \text{donc} \qquad 0 < \sin\frac{x}{2} \leqslant \sin\frac{t}{2} \leqslant 1 \tag{2}$$

En particulier $\sin\frac{t}{2}$ est non-nul sur $[x,\pi]$.
De plus elles sont de classe $\mathscr{C}^1$, de dérivées :

$$\forall t \in [x,\pi] \qquad u'(t) = \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) \qquad \text{et} \qquad v'(t) = -\frac{\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}.$$

Par intégration par parties :

$$\int_x^\pi \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\frac{\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\frac{t}{2}}\right]_x^\pi - \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_x^\pi \frac{\cos\frac{t}{2}\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin^2\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\left[\frac{\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}} - \int_x^\pi \frac{\cos\frac{t}{2}\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin^2\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t\right]$$

Par inégalités triangulaires pour les réels et les intégrales :

$$\left|\int_x^\pi \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\left(\left|\frac{\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}}\right| + \left|\int_x^\pi \frac{\cos\frac{t}{2}\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin^2\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t\right|\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\left|\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\right| + \int_x^\pi \left|\frac{\cos\frac{t}{2}\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin^2\frac{t}{2}}\right|\,\mathrm{d}t$$

Grâce à l'encadrement (2) :

$$\forall t \in [x,\pi] \qquad \left|\frac{\cos\frac{t}{2}\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin^2\frac{t}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\left|\int_x^\pi \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\sin\frac{x}{2}} + \frac{\pi-x}{2\sin^2\frac{x}{2}}\right)$$

Par théorème d'encadrement :

$$\int_x^\pi \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

L'égalité de la question précédente donne alors :

$$\forall x \in]0,\pi] \qquad f(x) = \frac{\pi-x}{2}.$$

Problème 2. Alien *(29 points)*

Partie A. *(4 points)*

1. *(2 points)* Les données de l'énoncés se traduisent par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad P_{A_n}(A_{n+1}) = 0 \qquad \text{et} \qquad P_{\overline{A}_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}.$$

La famille $\left(A_n, \overline{A}_n\right)$ est un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totates :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A}_n)P_{\overline{A}_n}(A_{n+1}).$$

Ceci donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad p_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - p_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p_n.$$

2. *(1 point)* La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.
Soit γ le réel tel que $\gamma = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\gamma$. Alors $\gamma = \frac{1}{3}$ et la suite $(p_n - \gamma)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
Comme $p_0 = \frac{1}{2}$ on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad p_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

3. *(1 point)* Comme $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$ alors la suite (p_n) converge vers $\frac{1}{3}$.
Il s'agit d'une approximation de la probabilité que l'alien tue un membre de l'équipage le n-ème jour lorsque n est grand.

Partie B. *(11 points)*

1. *(2 points)* On peut démontrer par récurrence la formule :

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \forall x \in [0, 1[\qquad f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

De même on peut démontrer par récurrence finie la formule :

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \forall x \in [0, 1[\qquad g^{(k)}(x) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. (a) *(2 points)* Les fonctions f et g sont de classe $\mathscr{C}^m$ sur $[0,1[$. La formule de Leibniz donne, pour tout $x \in [0,1[$:

$$(fg)^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} f^{(m-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

D'après les questions précédentes :

$$\begin{aligned}(fg)^{(m)}(x) &= \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} \frac{(m-k)!}{(1-x)^{m-k+1}} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \\ &= m! \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \frac{x^{n-k}}{(1-x)^{m-k+1}}.\end{aligned}$$

Il s'agit bien de la forme attendue.

(b) *(1 point)* Si $k \in \{0, \dots, m\}$ alors $0 \leqslant k \leqslant n$ donc $n-k \geqslant 0$. On peut alors écrire :

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \prod_{j=k-n+1}^{n} j$$

Si $j \in \{k-n+1, \dots, n\}$ alors $j \leqslant n$ et donc par produit :

$$\frac{n!}{(n-k)!} \leqslant \prod_{j=k-n+1}^{n} n = n^k.$$

Il s'agit de la formule demandée.

(c) *(2 points)* La formule obtenue dans la question 2a donne par inégalité triangulaire :

$$\forall x \in [0,1[\qquad \left|(fg)^{(m)}(x)\right| \leqslant m! \sum_{k=0}^{m} \left| \binom{n}{k} \frac{x^{n-k}}{(1-x)^{m-k+1}} \right|$$

Si $x \in [0,1[$ alors $x \geqslant 0$ et $1-x \geqslant 0$, donc :

$$\begin{aligned}\forall x \in [0,1[\qquad \left|(fg)^{(m)}(x)\right| &\leqslant m! \sum_{k=0}^{m} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{k!} \frac{x^{n-k}}{(1-x)^{m-k+1}}. \\ &= \frac{m! x^{n-m}}{(1-x)^{m+1}} \sum_{k=0}^{m} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{k!} (1-x)^k x^{m-k}.\end{aligned}$$

Fixons un entier $k \in \{0, \dots, m\}$. Alors :

- On sait que $\frac{n!}{(n-k)!} \leqslant n^k$, et comme $k \leqslant m$ alors $\frac{n!}{(n-k)!} \leqslant n^m$.
- Comme $k \geqslant 0$ alors $\frac{1}{k!} \leqslant 1$.
- Comme $x \in [0,1[$ alors $x \leqslant 1$ et $1-x \leqslant 1$.
  Comme $k \geqslant 0$ et $m-k \geqslant 0$ alors $(1-x)^k \leqslant 1$ et $x^{m-k} \leqslant 1$.

On en déduit, par somme d'inégalités :

$$\forall x \in [0,1[\qquad \left|(fg)^{(m)}(x)\right| \leqslant \frac{m! x^{n-m}}{(1-x)^{m+1}} \sum_{k=0}^{m} n^m = \frac{(m+1)!}{(1-x)^{m+1}} n^m x^{n-m}.$$

3. (a) *(2 points)* Par somme des termes d'une suite géométrique de raison $x \neq 1$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall x \in [0,1[\qquad S_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x} = f(x) - (fg)(x).$$

Ces fonctions sont de classe $\mathscr{C}^\infty$. Par linéarité de la dérivation :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall x \in [0,1[\qquad S_n^{(m)}(x) = f^{(m)}(x) - (fg)^{(m)}(x).$$

D'après la question 1 ci-dessus :

$$\forall x \in [0,1[\qquad f^{(m)}(x) = \frac{m!}{(1-x)^{m+1}}.$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall x \in [0,1[\qquad S_n^{(m)}(x) - \frac{m!}{(1-x)^{m+1}} = (fg)^{(m)}(x).$$

D'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall x \in [0,1[\qquad \left| S_n^{(m)}(x) - \frac{m!}{(1-x)^{m+1}} \right| \leqslant \frac{(m+1)!}{(1-x)^{m+1}x^m} n^m x^n.$$

Par croissances comparées, comme $|x| < 1$ alors $\quad n^m x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

Par théorème d'encadrement :

$$\forall x \in [0,1[\qquad \left| S_n^{(m)}(x) - \frac{m!}{(1-x)^{m+1}} \right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Il s'agit du résultat attendu.

(b) *(2 points)* On utilise la question 1 pour calculer la dérivée m-ème de la fonction S_n, sachant que $n \geqslant m$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall x \in [0,1[\qquad S_n^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{n-1} \frac{k!}{(k-m)!} x^{k-m}.$$

La question précédente montre que pour tout $x \in [0,1[$:

$$S_n^{(m)}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{m!}{(1-x)^{m+1}}.$$

Par décalage :

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{k!}{(k-m)!} x^{k-m} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{m!}{(1-x)^{m+1}}.$$

En multipliant par $\frac{x^m}{m!}$:

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} x^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}}.$$

Ceci démontre que la série de terme général $\binom{n}{m} x^n$ converge et que sa somme est :

$$\sum_{n=m}^{+\infty} \binom{n}{m} x^n = \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}}.$$

Partie C. *(7 points)*

1. *(1 point)* On répète n expériences identiques et indépendantes : l'alien attaque un membre de l'équipage. La probabilité qu'il tue un membre de l'équipage à chaque expérience est p et X_n est le nombre de membres tués, donc X_n suit une loi binomiale de paramètres n et p, notée $\mathscr{B}(n,p)$.
2. (a) *(1 point)* L'événement $(Z=k)$ signifie que l'alien tue le dernier membre de l'équipage le jour k, alors qu'il n'avait pas encore tué tout le monde la veille, donc que l'événement $X_k = a$ a lieu ainsi que l'événement $X_{k-1} = a-1$.

   Réciproquement, si les événements $X_k = a$ et $X_{k-1} = a-1$ ont lieu alors l'alien a tué tous les membres de l'équipage le jour k mais il ne les avait pas tous tués le jour $k-1$, donc l'événement $Z=k$ a lieu. On en déduit :

$$\forall k \in Z(\Omega) \qquad (Z=k) = (X_k = a) \cap (X_{k-1} = a-1).$$

   (b) *(1 point)* Ceci donne :

$$\begin{aligned}\forall k \in Z(\Omega) \qquad P(Z=k) &= P((X_k=a)\cap(X_{k-1}=a-1)) \\ &= P(X_{k-1}=a-1)P_{X_{k-1}=a-1}(X_k=a).\end{aligned}$$

   Si l'événement $X_{k-1}=a-1$ a lieu, alors l'événement $X_k=a$ a lieu si et seulement si l'alien tue un membre de l'équipage le jour k, donc $P_{X_{k-1}=a-1}(X_k=a)=p$.

   La variable aléatoire X_{k-1} suit une loi binomiale de paramètres $k-1$ et p donc, en notant $q=1-p$:

$$P(X_{k-1}=a-1) = \binom{k-1}{a-1} p^{a-1} q^{k-a}.$$

   On en déduit la loi de Z :

$$\forall k \in Z(\Omega) \qquad P(Z=k) = \binom{k-1}{a-1} p^a q^{k-a}.$$

3. *(2 points)* Comme $p \in]0,1[$ alors $q \in]0,1[$, donc il est immédiat que :

$$\forall k \in Z(\Omega) \qquad P(Z=k) \geqslant 0.$$

   Pour tout entier n tel que $n \geqslant a$, on pose

$$S_n = \sum_{k=a}^{n} P(Z_k).$$

   D'après la question précédente :

$$\forall n \in \{a, a+1, \ldots\} \qquad S_n = \left(\frac{p}{q}\right)^a \sum_{k=a}^{n} \binom{k-1}{a-1} q^k.$$

   Le changement d'indice $\ell = k-1$ donne :

$$\forall n \in \{a, a+1, \ldots\} \qquad S_n = \frac{p^a}{q^{a-1}} \sum_{\ell=a-1}^{n-1} \binom{\ell}{a-1} q^\ell.$$

On applique le résultat de la partie précédente avec $m = a - 1$. Comme $a > 0$ alors on a bien $m \in \mathbb{N}$. Comme $q \in]0, 1[$ alors la série ci-dessus converge et sa somme est :

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{p^a}{q^{a-1}} \times \frac{q^{a-1}}{(1-q)^a} = 1.$$

Comme $Z(\Omega) = \{a, a+1, \ldots\}$ alors on a bien prouvé que :

$$\sum_{k \in Z(\Omega)} P(Z = k) = 1.$$

On a donc bien obtenu une loi de probabilité de Z.

4. *(2 points)* Posons maintenant :

$$\forall n \in \{a, a+1, \ldots\} \qquad T_n = \sum_{k=a}^{n} k P(Z_k).$$

Alors :

$$\forall n \in \{a, a+1, \ldots\} \qquad T_n = \left(\frac{p}{q}\right)^a \sum_{k=a}^{n} k \binom{k-1}{a-1} q^k.$$

On calcule :

$$\forall k \geqslant a \qquad k\binom{k-1}{a-1} = \frac{k!}{(a-1)!(k-a)!} = a\frac{k!}{a!(k-a)!} = a\binom{k}{a}.$$

Ceci donne :

$$\forall n \in \{a, a+1, \ldots\} \qquad T_n = a\left(\frac{p}{q}\right)^a \sum_{k=a}^{n} \binom{k}{a} q^k.$$

D'après le résultat de la partie précédente, comme $q \in]0, 1[$ alors cette série converge et sa somme est :

$$\lim_{n \to +\infty} T_n = a\left(\frac{p}{q}\right)^a \frac{q^a}{(1-q)^{a+1}} = \frac{a}{p}$$

Ceci montre que la variable aléatoire Z admet une espérance et que cette espérance est :

$$E(Z) = \frac{a}{p}.$$

Par exemple si $p = \frac{1}{3}$ alors $E(Z) = 3a$. Effectivement, comme l'alien tue en moyenne un membre de l'équipage un jour sur trois alors il lui faut en moyenne $3a$ jours pour tuer tout le monde.

Partie D. *(7 points)*

1. *(1 point)* Si l'événément A_k a lieu alors chaque X_i suit une loi de Bernoulli $\mathscr{B}\left(\frac{k}{n}\right)$.
   Par hypothèse : $S_m = X_1 + \cdots + X_m$.
   Comme les X_i sont indépendantes alors S_m suit une loi binomiale de paramètres m et $\frac{k}{n}$, notée $\mathscr{B}\left(m, \frac{k}{n}\right)$.
2. *(2 points)* Les variables aléatoires X_i prennent les valeurs 0 ou 1, donc pour tout $i = 0, \ldots, m$: $X_i(\Omega) = \{0, 1\}$.
   Comme $S_m = X_1 + \cdots + X_m$ alors $S_m(\Omega) = \{0, \ldots, m\}$.
   L'espérance de S_m est donc par définition :
$$E(S_m) = \sum_{i=0}^{m} iP(S_m = i).$$
   Comme $C(\Omega) = \left\{ \frac{k}{n} \;\middle|\; 0 \leqslant k \leqslant n \right\}$ et $A_k = \left(C = \frac{k}{n}\right)$ alors la famille $\{ A_k \mid 0 \leqslant k \leqslant n\}$ est un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne :
$$\forall i = 0, \ldots, m \qquad P(S_m = i) = \sum_{k=0}^{n} P(A_k) P_{A_k}(S_m = i).$$
   Ceci donne :
$$E(S_m) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} iP(A_k) P_{A_k}(S_m = i).$$
   Par propriété des sommes doubles :
$$\begin{aligned} E(S_m) &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} iP(A_k) P_{A_k}(S_m = i) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(P(A_k) \sum_{i=0}^{m} iP_{A_k}(S_m = i) \right) \end{aligned}$$
   On retrouve la définition des $E_{A_k}(S_m)$ donc :
$$E(S_m) = \sum_{k=0}^{n} P(A_k) E_{A_k}(S_m).$$
   Il s'agit de la formule attendue.
   La variable aléatoire C suit une loi uniforme sur l'ensemble $E = \left\{ \frac{k}{n} \;\middle|\; 0 \leqslant k \leqslant n \right\}$ qui est de cardinal $n + 1$, donc :
$$\forall k = 0, \ldots, n \qquad P(A_k) = P\left(C = \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n+1}.$$
   Si l'événement A_k a lieu alors S_m suit une loi $\mathscr{B}\left(m, \frac{k}{n}\right)$, donc :
$$\forall k = 0, \ldots, n \qquad E_{A_k}(S_m) = m\frac{k}{n}.$$
   On en déduit :
$$E(S_m) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} m \frac{k}{n} = \frac{m}{n(n+1)} \sum_{k=0}^{n} k = \frac{m}{2}.$$

3. *(1 point)* Soit $s \in S_m(\Omega) = \{0, \dots, m\}$. La famille $\{A_k \mid 0 \leqslant k \leqslant n\}$ est un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(S_m = s) = \sum_{k=0}^{n} P(A_k) P_{A_k}(S_m = s).$$

On sait que pour tout $k = 0, \dots, n$: $P(A_k) = \frac{1}{n+1}$.

De plus si l'événement A_k a lieu alors S_m suit une loi binomiale $\mathscr{B}\left(m, \frac{k}{n}\right)$, donc :

$$\forall k = 0, \dots, n \qquad P_{A_k}(S_m = s) = \binom{m}{s}\left(\frac{k}{n}\right)^s \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-s}.$$

On en déduit, comme attendu :

$$P(S_m = s) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1}\binom{m}{s}\left(\frac{k}{n}\right)^s \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-s} = \frac{1}{n+1}\binom{m}{s}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^s \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-s}.$$

4. *(1 point)* D'après la question précédente :

$$P(S_m = m) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^m.$$

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^m$. Alors :

$$P(S_m = m) = \frac{n}{n+1} \times \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

On reconnaît une somme de Riemann de la fonction f sur l'intervalle $[0, 1]$. La fonction f est continue donc :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{x^{m+1}}{m+1}\right]_0^1 = \frac{1}{m+1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n \to +\infty} P(S_m = m) = \frac{1}{m+1}.$$

5. *(1 point)* Par définition des probabilités conditionnelles :

$$P_{S_N = N}(X_{N+1} = 1) = \frac{P((S_N = N) \cap (X_{N+1} = 1))}{P(S_N = N)}$$

L'événement $S_N = N$ signifie que dans toutes les régions de 1 à N des aliens ont été trouvés, ainsi :

$$(S_N = N) = (X_1 = 1 \cap X_2 = 1 \cap \dots \cap X_N = 1).$$

De même :

$$(S_{N+1} = N + 1) = (X_1 = 1 \cap X_2 = 1 \cap \dots \cap X_{N+1} = 1).$$

On en déduit :

$$(S_N = N) \cap (X_{N+1} = 1) = (X_1 = 1 \cap \cdots \cap X_{N+1} = 1) = (S_{N+1} = N+1).$$

Finalement, en utilisant la question précédente avec $m = N$ et $m = N+1$:

$$P_{S_N=N}(X_{N+1} = 1) = \frac{P(S_{N+1} = N+1)}{P(S_N = N)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{N+1}{N+2}.$$

6. *(1 point)* Par définition des probabilités conditionnelles :

$$P_{S_N=s}(X_{N+1} = 1) = \frac{P((S_N = s) \cap (X_{N+1} = 1))}{P(S_N = s)} \tag{3}$$

D'après la question 3 :

$$P(S_N = s) = \frac{1}{n+1}\binom{N}{s}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^s\left(1-\frac{k}{n}\right)^{N-s}.$$

Posons $g(t) = t^s(1-t)^{N-s}$. Alors :

$$P(S_N = s) = \frac{n}{n+1}\binom{N}{s}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right).$$

On reconnaît une somme de Riemann. La fonction g est continue sur $[0,1]$ donc par théorème :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'après la formule admise :

$$\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^s(1-t)^{N-s}\,\mathrm{d}t = \frac{s!(N-s)!}{(N+1)!}.$$

On en déduit :

$$P(S_N = s) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \binom{N}{s}\frac{s!(N-s)!}{(N+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{N+1}.$$

On peut remarquer que lorsque n tend vers $+\infty$ la loi de S_N tend vers la loi uniforme sur $\{0,\ldots,N\}$, ce qui permet de retrouver $E(S_N) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{N}{2}$.

Calculons maintenant $P((S_N = s) \cap (X_{N+1} = 1))$.

On applique la formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements $\{A_k \mid 0 \leqslant k \leqslant n\}$. Elle donne :

$$\begin{aligned} P((S_N = s) \cap (X_{N+1} = 1)) &= \sum_{k=0}^{n} P(A_k)P_{A_k}((S_N = s) \cap (X_{N+1} = 1)) \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} P_{A_k}((S_N = s) \cap (X_{N+1} = 1)) \end{aligned}$$

Si l'événement A_k a lieu alors les variables aléatoires $X_1, \dots, X_{N+1}$ sont indépendantes. D'après le lemme de coalition les variables aléatoires $S_N = X_1 + \cdots + X_n$ et X_{n+1} sont indépendantes, donc :

$$P((S_N = s) \cap (X_{N+1} = 1)) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} P_{A_k}(S_N = s) P_{A_k}(X_{N+1} = 1).$$

Si l'événement A_k a lieu alors S_N suit une loi $\mathscr{B}\left(N, \frac{k}{n}\right)$ et l'événement X_{N+1} suit une loi $\mathscr{B}\left(\frac{k}{n}\right)$, donc :

$$\begin{aligned} P((S_N = s) \cap (X_{N+1} = 1)) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{N}{s} \left(\frac{k}{n}\right)^s \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{N-s} \times \frac{k}{n} \right] \\ &= \frac{1}{n+1} \binom{N}{s} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{s+1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{N-s} \end{aligned}$$

Posons $h(t) = t^{s+1}(1-t)^{N-s}$. La fonction h est continue sur $[0,1]$, donc par théorème sur les sommes de Riemann :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'après la formule admise :

$$\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{s+1}(1-t)^{N-s}\,\mathrm{d}t = \frac{(s+1)!(N-s)!}{(N+2)!}$$

On en déduit :

$$P((S_N = s) \cap (X_{N+1} = 1)) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \binom{N}{s} \frac{(s+1)!(N-s)!}{(N+2)!} = \frac{s+1}{(N+2)(N+1)}.$$

Par quotient de limites, l'égalité (3) donne :

$$P_{S_N = s}(X_{N+1} = 1) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{s+1}{N+2}.$$

<u>Remarque.</u> En utilisant les mêmes méthodes on peut prouver :

$$\forall s \in \{0, \dots, N+1\} \qquad E_{S_{N+1} = s}(C) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{s+1}{N+3}.$$