Lycée Bellevue – Toulouse **Année 2024-2025**
MPSI – Mathématiques

Programme de colles
Semaine 29
du 2 au 6 juin 2025

Questions de cours

Sauf mention explicite il faut connaître l'énoncé et la démonstration.

1. Nouvelle démonstration de la formule de Pascal.
2. Définition, espérance, variance d'une loi uniforme.
3. Définition, espérance, variance d'une loi binomiale (pas de démonstration pour la variance).
4. Variance de $X + Y$.
5. Si X et Y sont indépendantes alors $E(XY) = E(X)E(Y)$, $V(X+Y) = V(X)+V(Y)$ et $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

Exercices

Chapitre C1. Probabilités

I. Généralités
II. Probabilités conditionnelles
III. Variables aléatoires

Programme prévisionnel de la semaine suivante

Chapitres C1 (Probabilités), C2 (Dénombrement), C3 (Variables aléatoires).

Chapitre C1. Probabilités

I. Généralités

Expérience aléatoire, univers, événement. On se limite en première année aux univers finis. Événement certain, impossible. Intersection, union, événement contraire, événements incompatibles, complémentaires. Système complet d'événements.

Probabilité sur un univers, espace probabilisé. Propriétés. Cas de l'équiprobabilité, ou probabilité uniforme.

II. Probabilités conditionnelles

Définition, formule. P_A est une probabilité. Formules des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes.

Événements indépendants, mutuellement indépendants.

III. Variables aléatoires

Variable aléatoire sur un univers fini, loi de probabilité. Variable aléatoire $f(X)$. Espérance, variance, écart-type.

Formule de König-Huygens, croissance, l'ensemble des $X = x$ forme un système complet d'événements, théorème de transfert, espérance, variance et écart-type de $aX + b$.

Chapitre C2. Dénombrement

I. Cardinal

Cardinal d'un ensemble fini (et uniquement fini), notation $\operatorname{Card} E$, $\#E$ ou $|E|$. Lien avec l'inclusion, les applications injectives et surjectives. Cardinal d'une union, du complémentaire, du produit cartésien, de l'ensemble des applications de E dans F, de l'ensemble des parties de E.

II. Listes

Nombre de p-listes d'éléments d'un ensemble fini, de p-listes d'éléments distincts (sans le mot "arrangement", et sans la notation A_n^p). Nombre de permutations.

Applications aux probabilités.

III. Combinaisons

Nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments. Formule du binôme et autres, nouvelles démonstrations.

Applications aux probabilités.

Chapitre C3. Variables aléatoires

I. Lois usuelles

Loi constante, loi uniforme (sur $\{1, \ldots, n\}$), loi de Bernoulli, loi binomiale. Espérances et variances de ces lois.

II. Couples de variables aléatoires

Loi conjointe d'un couple de variables aléatoires, lois marginales. Théorème de transfert généralisé.

Lois conditionnelles. Somme de variables aléatoires, linéarité de l'espérance.

Covariance. Formule de König-Huyghens, variance de $X + Y$.

III. Indépendance

Couple de variables aléatoires indépendantes, variables aléatoires mutuellement indépendantes. Si X et Y sont indépendantes alors $E(XY) = E(X)E(Y)$, $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ et $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$. Coefficient de corrélation linéaire.

Sommes de lois binomiales indépendantes. Nouvelle démonstration pour l'espérance et la variance de la loi binomiale.

IV. Inégalités probabilistes

Inégalités de Markhov et de Bienaymé-Tchebychev.