Chapitre B12
Espaces vectoriels euclidiens

Cadre

Tous les espaces vectoriels de ce chapitre sont des espaces vectoriels *réels*, c'est-à-dire des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

I. Produit scalaire

A. Définitions

Définition

Soit E un espace vectoriel réel. Un *produit scalaire* sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive, *i.e.*, une application

$$\begin{array}{rcl} \varphi : E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u, v) & \longmapsto & (\,u\,|\,v\,) \end{array}$$

vérifiant les propriétés :

- φ est *bilinéaire* : $\quad \forall (u, u', v, v') \in E^4 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} (\,\lambda u + u'\,|\,v\,) & = & \lambda\,(\,u\,|\,v\,) + (\,u'\,|\,v\,) \\ (\,u\,|\,\lambda v + v'\,) & = & \lambda\,(\,u\,|\,v\,) + (\,u\,|\,v'\,) \end{array}$$

- φ est *symétrique* : $\quad \forall (u, v) \in E^2 \qquad (\,u\,|\,v\,) = (\,v\,|\,u\,)$
- φ est *définie positive* : $\quad \forall u \in E \qquad (\,u\,|\,u\,) \geqslant 0 \quad$ et

$$(\,u\,|\,u\,) = 0_{\mathbb{R}} \quad \Longleftrightarrow \quad u = 0_E$$

Notation

On note le produit scalaire $(\,u\,|\,v\,)$ ou $\langle u, v \rangle$ ou $u \cdot v$.

Exemple 1. Le *produit scalaire usuel* sur $\mathbb{R}^n$ est défini pour tous $u = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ par :

$$(\,u\,|\,v\,) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

C'est la généralisation en dimension n des produits scalaires classiques sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Exemple 2. Un autre produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$:

$$\forall u = (x, y, z) \quad \forall v = (x', y', z') \qquad (\,u\,|\,v\,) = xx' + 2yy' + 7zz'$$

Exemple 3. Produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ (avec $a<b$) :

$$\forall (f,g)\in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})^2 \qquad (f\,|\,g)=\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

▷ **Exercices 1, 2.**

Définitions

- Un *espace préhilbertien* est un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire φ.
- Un *espace euclidien* est un espace vectoriel réel E de dimension finie muni d'un produit scalaire φ.

B. Norme

Notation

Dans tout ce qui suit (E,φ) désigne un espace préhilbertien réel, et on note $(u\,|\,v)=\varphi(u,v)$.

Définition

On appelle *norme euclidienne* de E *associée a* φ l'application :

Remarque. On sait que $(u\,|\,u)$ est positif pour tout $u\in E$ car le produit scalaire est défini positif, donc la norme de u est bien définie.

Notation

On note $||u||=N(u)=\sqrt{(u\,|\,u)}$.

Exemple. Pour tout $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ on pose :

$$N(u)=\sqrt{x^2+y^2}$$

Alors N est la norme associée au produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 1 (suite). Pour tout $u=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ on pose :

$$N(u)=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$$

Alors N est la norme associée au produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple 4. Soit $E=\mathbb{R}$. L'application $(x,y)\mapsto xy$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}$.

La norme associée à ce produit scalaire est l'application $x\mapsto\sqrt{x^2}=|x|$.

Ainsi la valeur absolue est une norme euclidienne sur $\mathbb{R}$.

Définition

Un vecteur u de E est dit *unitaire* si $||u|| = 1$.

Exemple 5. Soit u un vecteur non-nul de E. Alors $\frac{1}{||u||}$ est un réel. Le vecteur $\frac{u}{||u||} = \frac{1}{||u||} \cdot u$ est unitaire.

Propositions

Pour tous vecteurs u et v de E :

(i) *(Formule d'Al-Kashi)*

(ii) *(Identité de polarisation)*

Démonstration.

Remarque. Grâce à l'identité de polarisation, lorsque l'on connaît une norme euclidienne sur E, on peut retrouver le produit scalaire auquel elle est associée.

Remarque. Autres formules, valables pour tous vecteurs u et v de E :

(iii) $(u \mid v) = \frac{1}{4}\left(||u+v||^2 - ||u-v||^2\right)$ *(Seconde identité de polarisation)*

(iv) $2(||u||^2 + ||v||^2) = ||u+v||^2 + ||u-v||^2$ *(Identité du parallélogramme)*

▷ **Exercices 3, 4.**

Théorème - Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire. Alors :

L'égalité a lieu si et seulement si u et v sont colinéaires.

Exemple : Inégalité de Cauchy-Schwarz pour les réels.
Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ deux n-uplets de réels. Alors :

L'égalité a lieu si et seulement si x et y sont colinéaires.

Corollaire - Inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales

Pour toutes fonctions f et g continues sur $[a, b]$ (avec $a < b$) :

L'égalité a lieu si et seulement si f et g sont proportionnelles.

Démonstration.

Proposition

Soit $u \mapsto ||u||$ une norme euclidienne sur E. Alors :

- $\forall u \in E \quad ||u|| \geqslant 0$ (Positivité)
- $\forall u \in E \quad (||u|| = 0 \iff u = 0)$ (Séparation)
- $\forall u \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad ||\lambda u|| = |\lambda|\,||u||$ (Homogénéité)
- $\forall (u,v) \in E^2 \quad ||u+v|| \leqslant ||u|| + ||v||$ (Inégalité triangulaire)
  L'égalité a lieu si et seulement si u et v sont colinéaires de même sens, *i.e.*, $u = 0_E$ ou il existe λ réel positif tel que $v = \lambda u$.

Remarque. Une application $N : E \to \mathbb{R}$ vérifiant les quatre propriétés ci-dessus est appelée *norme* de E. Toutes les normes ne sont pas euclidiennes (*i.e.*, ne proviennent pas d'un produit scalaire).

Démonstration. On rappelle que $||u|| = \sqrt{(u \,|\, u)}$. Ceci justifie la positivité. La séparation et l'homogénéité sont conséquences du fait que le produit scalaire est défini positif et bilinéaire.

Il reste à démontrer l'inégalité triangulaire et son cas d'égalité.

Soit u et v deux vecteurs de E. On calcule :

$$\begin{array}{lrcl} & ||u+v||^2 = (u+v \,|\, u+v) & = & ||u||^2 + ||v||^2 + 2\,(u \,|\, v) \\ \text{et} & (||u|| + ||v||)^2 & = & ||u||^2 + ||v||^2 + 2||u||.||v|| \end{array}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$||u+v||^2 \leqslant (||u|| + ||v||)^2$$

On en déduit l'inégalité triangulaire, car une norme est toujours positive.

De plus, d'après le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'égalité $||u+v|| = ||u|| + ||v||$ a lieu si et seulement si u et v sont colinéaires et $(u \,|\, v) \geqslant 0$.

Supposons que u est non-nul et colinéaire à v. Alors $v = \lambda u$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, ce qui donne $(u \,|\, v) = \lambda ||u||^2$. Donc $(u \,|\, v) \geqslant 0$ si et seulement si λ est positif.

Si u est nul alors l'inégalité triangulaire est une égalité.

Finalement le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire a lieu si et seulement si u et v sont colinéaires de même sens, *i.e., positivement colinéaires.* □

Exemple 6. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.

Une variable aléatoire Z est dite *centrée* si $E(Z) = 0$.

Par exemple si X est une variable aléatoire alors $Z = X - E(X)$ est centrée.

L'ensemble des variables aléatoires réelles centrées sur Ω est un espace vectoriel.

La *covariance* $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ est un produit scalaire sur cet espace vectoriel.

La norme associée est l'écart-type.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\mathrm{Cov}(X,Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y)$

Ceci montre que le coefficient de corrélation linéaire appartient à l'intervalle $[-1, 1]$.

II. Orthogonalité

Dans cette partie on note E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire φ, et on note $(u \,|\, v) = \varphi(u, v)$.

A. Vecteurs et sous-espaces orthogonaux

Définition

On dit que deux vecteurs u et v de E sont *orthogonaux* si leur produit scalaire est nul : $(u \,|\, v) = 0$.

Exemple 7. Soit $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire $(f \,|\, g) = \displaystyle\int_0^1 fg$.

Alors les fonctions $f : t \mapsto 1$ et $g : t \mapsto t - \frac{1}{2}$ sont orthogonales.

Définition

Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont dits *orthogonaux* si :

$$\forall (u, v) \in F \times G \qquad (u \,|\, v) = 0$$

Remarque. Dans ce cas $F \cap G = \{0_E\}$, *i.e.*, F et G sont en somme directe.
En effet, si $u \in F \cap G$ alors $u \in F$ et $u \in G$ donc $(u \,|\, u) = 0_{\mathbb{R}}$ puis $u = 0_E$.

Définition

Soit F une partie de E. On appelle *orthogonal* de F et on note $F^\perp$ l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de F :

Remarque. F et $F^\perp$ sont orthogonaux, et donc $F \cap F^\perp \subseteq \{0_E\}$.

Exemple 8. $E^\perp =$ et $\{0_E\}^\perp =$

Propositions

(i) Pour toute partie F de E : $F \subseteq (F^\perp)^\perp$

(ii) Pour toutes parties F et G de E : Si $F \subseteq G$ alors $G^\perp \subseteq F^\perp$

(iii) Pour toute partie F de E : $(\mathrm{Vect}\, F)^\perp = F^\perp$.

Démonstration.

T.S.V.P.

Remarque. Soit F un sous-espace vectoriel de E et $\mathscr{B}$ une base de F. Alors la dernière proposition montre que $F^\perp = \mathscr{B}^\perp$, donc :

Un vecteur est orthogonal à F si et seulement s'il est orthogonal à une base de F.

Proposition

Soit F une partie de E. Alors $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

▷ **Exercice 5.**

B. Familles orthogonales

Définition

Une famille $(e_1, \ldots, e_n)$ d'éléments de E est dite *orthogonale* si tous ses éléments sont orthogonaux deux-à-deux :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \text{ avec } i \neq j \qquad (e_i \,|\, e_j) = 0$$

Proposition

Une famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul est libre.

Démonstration.

Théorème de Pythagore

Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille orthogonale de vecteurs de E alors :

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{n} e_i\right|\right|^2 = \sum_{i=1}^{n} ||e_i||^2$$

Exemple. Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux de $\mathbb{R}^2$ on retrouve le théorème de Pythagore classique :

$$||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2$$

Démonstration. En utilisant la bilinéarité du produit scalaire et le fait que la famille $(e_i)_i$ est orthogonale on obtient :

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{n} e_i\right|\right|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} e_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} e_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (e_i \,|\, e_j) = \sum_{i=1}^{n} (e_i \,|\, e_i) = \sum_{i=1}^{n} ||e_i||^2 \qquad \square$$

Définition

Une famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est dite *orthonormée* si elle est orthogonale et si tous ses vecteurs sont unitaires :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \qquad (e_i \,|\, e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Remarque. On note δ_{ij} le *symbole de Kronecker* : $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

III. Espaces vectoriels euclidiens

Rappel. Un *espace euclidien* est un espace vectoriel :

(i) réel,

(ii) de dimension finie,

(iii) muni d'un produit scalaire, que nous noterons $(u \mid v)$.

Dans cette partie on note E un espace euclidien et n sa dimension.

A. Bases orthonormées

Proposition

Une famille orthonormée de n vecteurs est une base de E.

Démonstration. En effet, les vecteurs de cette famille sont non-nuls car ils sont de norme 1, il forment donc une famille orthogonale de vecteurs non-nuls. Par propriété cette famille est libre. Elle est de cardinal n qui est la dimension de E donc elle est libre maximale, et ainsi elle forme une base de E. □

Théorème

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. Alors pour tout u de E :

$$u = \sum_{i=1}^{n} (u \mid e_i)\, e_i$$

En d'autres termes, les coordonnées de u dans la base $\mathscr{B}$ sont $((u \mid e_1), \dots, (u \mid e_n))$.

Démonstration.

▷ **Exercice 6.**

Proposition

Soit u et v deux vecteurs de E, de coordonnées respectives $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ dans une base orthonormée de E. Alors :

$$(u \mid v) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \qquad \text{et} \qquad ||u|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

Remarque. Ainsi on applique les mêmes formules qu'avec le produit scalaire usuel, pourvu que les coordonnées soient exprimées dans une base orthonormée.

<u>Démonstration</u>. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E dans laquelle u et v admettent pour coordonnées respectives $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$.

Alors $u = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $v = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j e_j$. La bilinéarité du produit scalaire donne :

$$(u \mid v) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \, (e_i \mid e_j)$$

Comme la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée alors :

$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2 \qquad (e_i \mid e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Ceci montre que $(u \mid v) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Si $u = v$ alors $||u||^2 = (u \mid u)$, donc la seconde propriété découle de la première. □

B. Orthonormalisation

Remarque. *Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt* est nommé ainsi en l'honneur de Jørgen Gram (Danemark, 1850 – 1916) et Erhard Schmidt (Allemagne, 1876 – 1959) mais il était déjà connu au XVIIIe siècle.

C'est un algorithme permettant d'obtenir une base orthonormée à partir d'une base.

Exemple 9. On munit $E = \mathbb{R}^3$ de son produit scalaire usuel, et on définit :

$$u_1 = (1,1,1) \qquad u_2 = (1,2,0) \qquad u_3 = (2,0,3)$$

On admet que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

On orthonormalise cette base de la façon suivante.

Étape 1. On construit une base *orthogonale* (v_1, v_2, v_3) en posant :

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 \\ v_2 &= u_2 + \lambda v_1 \\ v_3 &= u_3 + \alpha v_1 + \beta v_2 \end{aligned}$$

où λ, α et β sont des scalaires, choisis de façon à ce que la famille (v_1, v_2, v_3) soit orthogonale.

Pour ceci on pose $(v_1 \,|\, v_2) = 0$, puis $(v_1 \,|\, v_3) = (v_2 \,|\, v_3) = 0$. En utilisant la linéarité à droite du produit scalaire on obtient $\lambda = -1$, puis $\alpha = -\frac{5}{3}$ et $\beta = \frac{3}{2}$.

On a maintenant une base orthogonale (v_1, v_2, v_3) avec :

$$v_1 = (1,1,1) \qquad v_2 = (0,1,-1) \qquad v_3 = \frac{1}{6}(2,-1,-1)$$

Étape 2. On normalise cette base en posant :

$$\forall i = 1,2,3 \qquad \varepsilon_i = \frac{v_i}{||v_i||}$$

On obtient : $\quad \varepsilon_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \qquad \varepsilon_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1) \qquad \varepsilon_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,-1)$

La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base orthonormée.

▷ **Exercices 7, 8.**

Théorème

Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille libre d'éléments de E. Alors il existe une famille orthonormée $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ d'éléments de E telle que pour tout $k = 1 \dots p$:

$$\mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_k) = \mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$$

Démonstration. L'hypothèse implique que $p \leqslant n$, puisqu'une famille libre d'un espace vectoriel de dimension n a au plus n éléments.

Pour tout $k = 1 \dots p$ on pose $F_k = \mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_k)$.

On démontre le théorème par récurrence finie sur $m \in \{1, \dots, p\}$.

L'initialisation est obtenue en posant : $\quad \varepsilon_1 = \frac{u_1}{||u_1||}$

Supposons que la propriété est établie au rang $m-1$, pour un certain $m \in \{2, \dots, p\}$. L'hypothèse de récurrence donne une famille orthonormée $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-1})$ d'éléments de E telle que pour tout $k = 1 \dots m-1$:

$$\mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_k) = \mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$$

On note :

$$v_m = u_m + \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_k \varepsilon_k \tag{1}$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ sont des réels.

La famille $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{m-1}, v_m)$ est orthogonale si et seulement si $(\varepsilon_j \,|\, v_m) = 0$ pour tout $j = 1 \ldots m-1$. Or :

$$\forall j = 1 \ldots m-1 \qquad (\varepsilon_j \,|\, v_m) = (\varepsilon_j \,|\, u_m) + \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_k \, (\varepsilon_j \,|\, \varepsilon_k) = (\varepsilon_j \,|\, u_m) + \alpha_j$$

On pose :

$$\forall j = 1 \ldots m-1 \qquad \alpha_j = -\,(\varepsilon_j \,|\, u_m)$$

Comme la famille $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{m-1})$ est orthonormée alors :

$$\forall j = 1 \ldots m-1 \qquad (\varepsilon_j \,|\, v_m) = 0$$

Ainsi la famille $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{m-1}, v_m)$ est orthogonale.

Le vecteur v_m ne peut être nul, sinon on aurait d'après (1)

$$u_m \in \mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{m-1}) = F_{m-1}$$

et ceci donnerait une contradiction car F_{m-1} est l'espace vectoriel engendré par la famille $u_1, \ldots, u_{m-1}$ et la famille $(u_1, \ldots, u_m)$ est libre.

Ainsi v_m est non-nul. On pose $\varepsilon_m = \frac{v_m}{||v_m||}$. La famille $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ est alors orthonormée.

Par construction $v_m \in F_m$, donc $\mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) \subseteq F_m$. Les familles $(u_1, \ldots, u_m)$ et $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ sont libres, donc par égalité de dimension :

$$\mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) = F_m$$

Ceci montre que la propriété est héréditaire.

Le théorème est démontré par récurrence. $\square$

Corollaire

Tout espace euclidien possède une base orthonormée.

Démonstration. En effet, on sait que tout espace vectoriel de dimension finie possède au moins une base. Il suffit donc d'en choisir une, et de l'orthonormaliser, *i.e.*, d'appliquer le théorème précédent. $\square$

C. Supplémentaire orthogonal

Proposition

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien.
Alors F et $F^\perp$ sont supplémentaires : $F \oplus F^\perp = E$.

Définition

On appelle alors *supplémentaire orthogonal* de F l'orthogonal de F.

Démonstration.

Corollaire

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors :

- $\dim F^\perp = n - \dim F$
- $(F^\perp)^\perp = F$

Démonstration. Comme $F \oplus F^\perp = E$ alors $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$, ce qui justifie la première propriété.
Pour la seconde, on sait que $F \subseteq (F^\perp)^\perp$, même si E n'est pas de dimension finie.
Si E est de dimension finie n alors

$$\dim(F^\perp)^\perp = n - \dim F^\perp = n - (n - \dim F) = \dim F$$

donc par théorème : $(F^\perp)^\perp = F$ □

▷ **Exercice 9.**

D. Projecteurs orthogonaux

Définition

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E. Le *projecteur orthogonal* de E sur F est le projecteur de E sur F parallèlement à $F^\perp$.

Remarque. Par définition, si u est un vecteur de E, alors $u - p(u)$ est élément du noyau de p, donc $u - p(u)$ est orthogonal à F.

Proposition

Soit $(e_1, \ldots, e_m)$ une base orthonormée de F, et p le projecteur orthogonal de E sur F. Alors :

$$\forall u \in E \qquad p(u) = \sum_{k=1}^{m} (\, u \,|\, e_k\,)\, e_k$$

<u>Démonstration</u>. Si $u = e_i$ avec $i \in [\![1, n]\!]$ alors la formule est vérifiée.

Comme la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E alors la formule est vérifiée pour tout vecteur u de E. □

Remarque. Soit $(e_1, \ldots, e_m)$ une base orthonormée de F, et $(e_{m+1}, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de $F^\perp$.

D'après le théorème de la base adaptée $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E. Donc :

$$\forall u \in E \qquad u = (\, u \,|\, e_1\,)\, e_1 + \cdots\cdots\cdots + (\, u \,|\, e_n\,)\, e_n.$$

Par définition de p on retrouve :

$$\forall u \in E \qquad p(u) = (\, u \,|\, e_1\,)\, e_1 + \cdots + (\, u \,|\, e_m\,)\, e_m.$$

Théorème

Soit F un sous-espace vectoriel de E et p le projecteur orthogonal de E sur F. Alors pour tout $u \in E$:

(i) $||p(u)|| \leqslant ||u||$

(ii) $p(u)$ est l'unique vecteur u_0 de F tel que $||u - u_0|| = \underset{v \in F}{\operatorname{Min}} ||u - v||$.

Définition

Soit F un sous-espace vectoriel de E, et u un élément de E. On appelle *distance* de u à F le réel :

$$d(u, F) = \underset{v \in F}{\operatorname{Min}} ||u - v||$$

Remarque. Ainsi, la distance de u à F est la distance de u à $p(u)$.

<u>Démonstration</u>.

(i) On sait que $u - p(u)$ et $p(u)$ sont orthogonaux. D'après le théorème de Pythagore :

$$||u||^2 = ||u - p(u)||^2 + ||p(u)||^2$$

Ceci implique

$$||p(u)||^2 \leqslant ||u||^2$$

et comme les normes sont positives alors $||p(u)|| \leqslant ||u||$.

(ii) Pour tout $v \in F$:

$$u - v = (u - p(u)) + (p(u) - v) \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} u - p(u) \in F^{\perp} \\ p(u) - v \in F \end{cases}$$

D'après le théorème de Pythagore :

$$||u - p(u)|| \leqslant ||u - v||$$

Cette égalité est stricte dès que $v \neq p(u)$.
Ceci montre que :

$$||u - p(u)|| \leqslant \underset{v \in F}{\text{Inf}}\, ||u - v||$$

Comme $p(u)$ est l'un des éléments de F alors :

$$||u - p(u)|| = \underset{v \in F}{\text{Min}}\, ||u - v||$$

Nous avons vu que si v est un élément de F différent de $p(u)$ alors :

$$||u - p(u)|| < ||u - v||$$

Ceci montre l'unicité de l'élément u_0 de F vérifiant $||u - u_0|| = \underset{v \in F}{\text{Min}}\, ||u - v||$. $\square$

Remarque. Soit E est un espace vectoriel réel préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de dimension finie m. En d'autres termes on ne suppose plus que E est de dimension finie. Soit $(e_1, \dots, e_m)$ une base orthonormée de F et p l'application :

$$\begin{aligned} p : E &\longrightarrow E \\ u &\longmapsto \sum_{k=1}^{m} (\, u \mid e_k)\, e_k \end{aligned}$$

Alors p est un projecteur de E et le théorème ci-dessus est toujours valable.

Exemple 10. Soit $E = \mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel. Soit $u_1 = (1, 2, 2)$. Soit p le projecteur orthogonal de E sur $F = \text{Vect}\,(u_1)$.

a. Déterminer la matrice de p dans la base canonique.
b. Calculer la distance de $v = (6, 5, 4)$ à la droite vectorielle F.
c. Soit q le projecteur orthogonal de E sur $F^{\perp}$. Déterminer la matrice Q de q dans la base canonique.

▷ **Exercices 10, 11, 12.**