

TD. B12
Espaces vectoriels euclidiens

_____ **Exercices de cours** _____

① Pour tous $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ de \mathbb{R}^2 on pose :

$$(u | v) = 5xx' + xy' + x'y + yy'$$

Démontrer que cette application est un produit scalaire.

② Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des réels distincts fixés. Démontrer que l'application :

$$\varphi : (P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^n P(\alpha_k)Q(\alpha_k)$$

est un produit scalaire.

③ Démontrer les égalités suivantes, valables pour tous vecteurs u, v d'un espace vectoriel préhilbertien.

a. Identité de polarisation :

$$(u | v) = \frac{1}{4} (\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2)$$

b. Identité du parallélogramme :

$$2(\|u\|^2 + \|v\|^2) = \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2$$

④ Soit u et v deux vecteurs de E tels que :

$$\|u + v\| = 5 \quad \text{et} \quad \|u - v\| = 1$$

Ces vecteurs peuvent-ils être orthogonaux ?

⑤ Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Démontrer que :

$$F^\perp \cap G^\perp = (F + G)^\perp \quad \text{et} \quad F^\perp + G^\perp \subseteq (F \cap G)^\perp$$

⑥ Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et : $u_1 = \frac{1}{3}(2, 2, 1)$ $u_2 = \frac{1}{3}(-2, 1, 2)$ $u_3 = \frac{1}{3}(1, -2, 2)$

a. Démontrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est orthonormée, et en déduire que c'est une base orthonormée de E .

b. Donner les coordonnées du vecteur $(3, 1, 1)$ dans cette base.

⑦ Orthonormaliser la base (u_1, u_2) de \mathbb{R}^2 , où

$$u_1 = (1, 1) \quad \text{et} \quad u_2 = (1, 2)$$

⑧ Orthonormaliser la base (u_1, u_2, u_3) de \mathbb{R}^3 où :

$$u_1 = (1, 1, -1) \quad u_2 = (1, -1, 1) \quad u_3 = (-1, 1, 1)$$

⑨ Démontrer que l'inclusion de l'exercice 5 est une égalité si E est euclidien.

⑩ (Suite de l'exercice 7) Soit $F = \text{Vect}(u_1)$.

a. Calculer la matrice dans la base canonique du projecteur orthogonal sur F .

b. Quelle est la distance de $v = (13, 3)$ à F ?

⑪ (Suite de l'exercice 8) Soit $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$.

a. Calculer la matrice dans la base canonique du projecteur orthogonal sur F .

b. En déduire la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale de E par rapport à F .

⑫ Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur le segment $[0, 1]$. On munit E du produit scalaire :

$$\forall (f, g) \in E^2 \quad (f | g) = \int_0^1 f(x)g(x) dx$$

Pour tout $k = 0, 1, 2$ on pose $g_k(x) = x^k$. Enfin on note $F = \text{Vect}(g_0, g_1, g_2)$.

a. Orthonormaliser la base (g_0, g_1, g_2) de F .

b. Calculer le projeté orthogonal de la fonction exponentielle sur F , et la distance de cette fonction à F .

_____ **Travaux dirigés** _____

① Dans $E = \mathbb{R}^2$ on note $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$.

Les applications φ suivantes sont-elles des produits scalaires ?

a. $\varphi(u, v) = xx' - 2yy'$

b. $\varphi(u, v) = xy' - x'y$

c. $\varphi(u, v) = xx' - 2xy' - 2x'y + 6yy'$

d. $\varphi(u, v) = xx' - 4xy' - 4x'y + yy'$

② Démontrer que les applications suivantes sont des produits scalaires de E .

a. $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$

$$\varphi(f, g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt$$

b. $E = \mathbb{R}_n[X]$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(\alpha)Q^{(k)}(\alpha)$$

c. $E = \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$

$$\varphi(A, B) = \text{tr}({}^tAB)$$

Donner une expression de ce dernier en fonction des coordonnées de A et B .

3 Soit $E = \mathbb{R}^2$. Pour tout $(x, y) \in E$ on pose :

$$N(x, y) = \sqrt{x^2 + xy + y^2}$$

a. Démontrer que N est une norme euclidienne sur E , c'est-à-dire qu'elle provient d'un produit scalaire.

b. Donner une base orthonormée de E pour ce produit scalaire.

4 Soit u, v, u', v' quatre vecteurs d'une espace préhilbertien tels que :

$$u + v = u' + v' \quad \|u\| = \|u'\| \quad \|v\| = \|v'\|$$

Démontrer que $u + v$ et $u - u'$ sont orthogonaux.

5 Soit u et v deux vecteurs d'un espace préhilbertien réel E . Démontrer que si $\|u\| \leq 1$ et $\|v\| \leq 1$ alors :

$$\forall \lambda \in [0, 1] \quad \|\lambda u + (1 - \lambda)v\| \leq 1$$

Interpréter géométriquement ce résultat.

6 Soit E un espace préhilbertien réel, et u, v deux vecteurs de E .

Démontrer que u et v sont orthogonaux si et seulement si :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|u\| \leq \|u + \lambda v\|$$

7 Soit E un espace préhilbertien réel.

Soit (e_1, \dots, e_p) une famille de vecteurs unitaires de E telle que :

$$\forall u \in E \quad \|u\|^2 = \sum_{i=1}^p (u | e_i)^2$$

Démontrer que la famille (e_1, \dots, e_p) est une base orthonormée de E .

8 Soit E un espace euclidien, et soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

Démontrer que si F et G sont orthogonaux alors $F = G^\perp$ et $G = F^\perp$.

9 Soit E un espace préhilbertien réel et v un vecteur non-nul de E . Décrire l'application :

$$f : E \longrightarrow E \\ u \longmapsto \frac{(u | v)}{\|v\|^2} v$$

10 Soit E un espace vectoriel euclidien, et f un endomorphisme de E vérifiant :

$$\forall u \in E \quad (u | f(u)) = 0$$

a. Démontrer que :

$$\forall (u, v) \in E^2 \quad (u | f(v)) = -(f(u) | v)$$

b. Démontrer que $\ker f$ et $\operatorname{im} f$ sont supplémentaires orthogonaux.

11 Soit E un espace préhilbertien réel, et p un projecteur de E . Démontrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si :

$$\forall u \in E \quad \|p(u)\| \leq \|u\|$$

On pourra utiliser un vecteur $v + \lambda w$.

12 Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel et :

$$u_1 = (0, 1, 1) \quad u_2 = (1, 0, 1) \quad u_3 = (1, 1, 0)$$

a. Démontrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de E et orthonormaliser celle-ci.

b. Donner les coordonnées du vecteur $(1, 2, 3)$ dans cette base.

13 Soit E l'espace vectoriel euclidien \mathbb{R}^3 muni de son produit scalaire usuel, et p le projecteur orthogonal de E sur le plan vectoriel F d'équation $x - 2y + z = 0$.

a. Donner la matrice de p dans la base canonique de E .

b. Quelle est la distance du point de coordonnées $(2, 1, 2)$ au plan F ?

14 Soit E l'espace vectoriel euclidien \mathbb{R}^4 muni de son produit scalaire usuel. On souhaite déterminer le projecteur de E sur :

$$F = \{(x, y, z, t) \in E \mid 2x - 8y + 3z + 2t = 0\}$$

a. Donner une base orthonormée de F^\perp .

b. Soit q le projecteur orthogonal sur F^\perp . Exprimer $q(u)$ en fonction de u et de la base de la question précédente.

c. En déduire la matrice de q , puis celle du projecteur orthogonal de E sur F dans la base canonique.

15 Soit E l'espace vectoriel euclidien \mathbb{R}^3 muni de son produit scalaire usuel. Donner la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par le vecteur $u_0 = (9, 2, 6)$.

16 Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Déterminer l'ensemble F des points fixes de A , en donner une base orthonormée \mathcal{F} .

b. Compléter la famille \mathcal{F} en une base orthonormée \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 .

c. Déterminer la matrice de f dans la base \mathcal{B} .

d. Vérifier que F^\perp est stable par f . Décrire la restriction de f à F^\perp , puis décrire l'application f géométriquement.

17 Soit E un espace vectoriel euclidien et f un endomorphisme de E .

On dit que f est une *isométrie vectorielle* si pour tout $u \in E$: $\|f(u)\| = \|u\|$.

On dit que f est *orthogonal* si pour tout $(u, v) \in E^2$: $(f(u) | f(v)) = (u | v)$.

- Démontrer que f est une isométrie vectorielle si et seulement si f est orthogonal, et que dans ce cas f est un automorphisme.
- Démontrer qu'un endomorphisme orthogonal est une symétrie si et seulement si :

$$\forall (u, v) \in E^2 \quad (f(u) | v) = (u | f(v))$$

Démontrer qu'alors f est une symétrie orthogonale.

- On suppose que f est un endomorphisme orthogonal, et on note A sa matrice dans une base orthonormée de E . Démontrer que si f est une symétrie alors A est symétrique.

18 Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire :

$$\forall (f, g) \in E^2 \quad (f | g) = \int_0^1 fg$$

On note F le sous-espace vectoriel de E contenant les fonctions nulles en 0.

- Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer son orthogonal.

On pourra utiliser la fonction $u(t) = tf(t)$.

- A-t-on $F^{\perp\perp} = F$? $E = F \oplus F^\perp$?

19 Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire :

$$\forall (A, B) \in E^2 \quad (A | B) = \text{tr}({}^tAB)$$

- Démontrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux.
- Donner une base orthonormée de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
- Pour toute matrice A de E , calculer le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

20 Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire de l'exercice précédent.

Soit F l'ensemble des matrices de E de traces nulles.

- Justifier que F est un hyperplan de E et en donner un supplémentaire orthogonal.
- Pour toute matrice A de E , Déterminer la distance de A à F .

21 Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n . On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

- Quelle est la dimension de E^* ?
- Pour tout $v \in E$ on note $\varphi_v : u \mapsto (u | v)$. Justifier que φ_v appartient à E^* .
- Démontrer que l'application $\Phi : v \mapsto \varphi_v$ est linéaire.
- Démontrer que pour toute forme linéaire φ de E il existe un et un seul vecteur v de E tel que :

$$\forall u \in E \quad \varphi(u) = (u | v)$$

FIGURE 1 – Approximation de l'exponentielle sur $[0, 1]$ par une courbe du second degré

