

**Feuille de T. D. B13**  
**Espaces vectoriels euclidiens**

————— Exercices de cours —————

① Pour tous  $u = (x, y)$  et  $v = (x', y')$  de  $\mathbb{R}^2$  on pose :

$$(u | v) = 5xx' + xy' + x'y + yy'$$

Démontrer que cette application est un produit scalaire.

② Soit  $E = \mathbb{R}_n[X]$ ,  $\alpha_0, \dots, \alpha_n$  des réels distincts fixés. Démontrer que l'application :

$$\varphi : (P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^n P(\alpha_k)Q(\alpha_k)$$

est un produit scalaire.

③ Soit  $u$  et  $v$  deux vecteurs de  $E$  tels que :

$$\|u + v\| = 5 \quad \text{et} \quad \|u - v\| = 1$$

Ces vecteurs peuvent-ils être orthogonaux ?

④ Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Démontrer que :

$$F^\perp \cap G^\perp = (F + G)^\perp \quad \text{et} \quad F^\perp + G^\perp \subseteq (F \cap G)^\perp$$

⑤ Soit  $E = \mathbb{R}^3$  muni du produit scalaire usuel et :  
 $u_1 = \frac{1}{3}(2, 2, 1) \quad u_2 = \frac{1}{3}(-2, 1, 2) \quad u_3 = \frac{1}{3}(1, -2, 2)$

a. Démontrer que la famille  $(u_1, u_2, u_3)$  est orthonormée, et en déduire que c'est une base orthonormée de  $E$ .

b. Donner les coordonnées du vecteur  $(3, 1, 1)$  dans cette base.

⑥ Orthonormaliser la base  $(u_1, u_2)$  de  $\mathbb{R}^2$ , où

$$u_1 = (1, 1) \quad \text{et} \quad u_2 = (1, 2)$$

⑦ Orthonormaliser la base  $(u_1, u_2, u_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  où :

$$u_1 = (1, 1, -1) \quad u_2 = (1, -1, 1) \quad u_3 = (-1, 1, 1)$$

⑧ Démontrer que l'inclusion de l'exercice 4 est une égalité si  $E$  est euclidien.

⑨ (Suite de l'exercice 6) Soit  $F = \text{Vect}(u_1)$ .

a. Calculer la matrice dans la base canonique du projecteur orthogonal sur  $F$ .

b. Quelle est la distance de  $v = (13, 3)$  à  $F$  ?

⑩ (Suite de l'exercice 7) Soit  $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$ .

a. Calculer la matrice dans la base canonique du projecteur orthogonal sur  $F$ .

b. En déduire la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale de  $E$  par rapport à  $F$ .

⑪ Soit  $E$  l'espace vectoriel des fonctions continues sur le segment  $[0, 1]$ . On munit  $E$  du produit scalaire :

$$\forall (f, g) \in E^2 \quad (f | g) = \int_0^1 f(x)g(x) dx$$

Pour tout  $k = 0, 1, 2$  on pose  $g_k(x) = x^k$ . Enfin on note  $F = \text{Vect}(g_0, g_1, g_2)$ .

a. Orthonormaliser la base  $(g_0, g_1, g_2)$  de  $F$ .

b. Calculer le projeté orthogonal de la fonction exponentielle sur  $F$ , et la distance de cette fonction à  $F$ .

————— Travaux dirigés —————

① Dans  $E = \mathbb{R}^2$  on note  $u = (x, y)$  et  $v = (x', y')$ .

Les applications  $\varphi$  suivantes sont-elles des produits scalaires ?

a.  $\varphi(u, v) = xx' - 2yy'$

b.  $\varphi(u, v) = xy' - x'y$

c.  $\varphi(u, v) = xx' - 2xy' - 2x'y + 6yy'$

d.  $\varphi(u, v) = xx' - 4xy' - 4x'y + yy'$

② Démontrer que les applications suivantes sont des produits scalaires de  $E$ .

a.  $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$

$$\varphi(f, g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt$$

b.  $E = \mathbb{R}_n[X]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(\alpha)Q^{(k)}(\alpha)$$

c.  $E = \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$

$$\varphi(A, B) = \text{tr}({}^tAB)$$

Donner une expression de ce dernier en fonction des coordonnées de  $A$  et  $B$ .

③ Soit  $E = \mathbb{R}^2$ . Pour tout  $(x, y) \in E$  on pose :

$$N(x, y) = \sqrt{x^2 + xy + y^2}$$

a. Démontrer que  $N$  est une norme euclidienne sur  $E$ , c'est-à-dire qu'elle provient d'un produit scalaire.

b. Donner une base orthonormée de  $E$  pour ce produit scalaire.

**4** Soit  $u$  et  $v$  deux vecteurs d'un espace préhilbertien réel  $E$ . Démontrer que si  $\|u\| \leq 1$  et  $\|v\| \leq 1$  alors :

$$\forall \lambda \in [0, 1] \quad \|\lambda u + (1 - \lambda)v\| \leq 1$$

Interpréter géométriquement ce résultat.

**5** Soit  $E$  un espace préhilbertien réel, et  $u, v$  deux vecteurs de  $E$ .

Démontrer que  $u$  et  $v$  sont orthogonaux si et seulement si :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|u\| \leq \|u + \lambda v\|$$

**6** Soit  $E$  un espace préhilbertien réel.

Soit  $(e_1, \dots, e_p)$  une famille de vecteurs unitaires de  $E$  telle que :

$$\forall u \in E \quad \|u\|^2 = \sum_{i=1}^p (u | e_i)^2$$

Démontrer que la famille  $(e_1, \dots, e_p)$  est une base orthonormée de  $E$ .

**7** Soit  $E$  un espace euclidien, et soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ .

Démontrer que si  $F$  et  $G$  sont orthogonaux alors  $F = G^\perp$  et  $G = F^\perp$ .

**8** Soit  $E$  un espace préhilbertien réel et  $v$  un vecteur non-nul de  $E$ . Décrire l'application :

$$f : E \longrightarrow E \\ u \longmapsto \frac{(u | v)}{\|v\|^2} v$$

**9** Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien, et  $f$  un endomorphisme de  $E$  vérifiant :

$$\forall u \in E \quad (u | f(u)) = 0$$

a. Démontrer que :

$$\forall (u, v) \in E^2 \quad (u | f(v)) = -(f(u) | v)$$

b. Démontrer que  $\ker f$  et  $\operatorname{im} f$  sont supplémentaires orthogonaux.

**10** Soit  $E$  un espace préhilbertien réel, et  $p$  un projecteur de  $E$ . Démontrer que  $p$  est un projecteur orthogonal si et seulement si :

$$\forall u \in E \quad \|p(u)\| \leq \|u\|$$

On pourra utiliser un vecteur  $v + \lambda w$ .

**11** Soit  $E = \mathbb{R}^3$  muni de son produit scalaire usuel et :

$$u_1 = (0, 1, 1) \quad u_2 = (1, 0, 1) \quad u_3 = (1, 1, 0)$$

a. Démontrer que la famille  $(u_1, u_2, u_3)$  est une base de  $E$  et orthonormaliser celle-ci.

b. Donner les coordonnées du vecteur  $(1, 2, 3)$  dans cette base.

**12** Soit  $E$  l'espace vectoriel euclidien  $\mathbb{R}^3$  muni de son produit scalaire usuel, et  $p$  le projecteur orthogonal de  $E$  sur  $F$ , plan vectoriel d'équation  $x - 2y + z = 0$ .

a. Donner la matrice de  $p$  dans la base canonique de  $E$ .

b. Quelle est la distance du point de coordonnées  $(2, 1, 2)$  au plan  $F$  ?

**13** Soit  $E$  l'espace vectoriel euclidien  $\mathbb{R}^4$  muni de son produit scalaire usuel. On souhaite déterminer le projecteur de  $E$  sur :

$$F = \{(x, y, z, t) \in E \mid 2x - 8y + 3z + 2t = 0\}$$

a. Donner une base orthonormée de  $F^\perp$ .

b. Soit  $q$  le projecteur orthogonal sur  $F^\perp$ . Exprimer  $q(u)$  en fonction de  $u$  et de la base de la question précédente.

c. En déduire la matrice de  $q$ , puis celle du projecteur orthogonal de  $E$  sur  $F$  dans la base canonique.

**14** Soit  $E$  l'espace vectoriel euclidien  $\mathbb{R}^3$  muni de son produit scalaire usuel. Donner la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par le vecteur  $u_0 = (9, 2, 6)$ .

**15** Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien et  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

On dit que  $f$  est une *isométrie vectorielle* si pour tout  $u \in E$  :  $\|f(u)\| = \|u\|$ .

On dit que  $f$  est *orthogonal* si pour tout  $(u, v) \in E^2$  :  $(f(u) | f(v)) = (u | v)$ .

a. Démontrer que  $f$  est une isométrie vectorielle si et seulement si  $f$  est orthogonal, et que dans ce cas  $f$  est un automorphisme.

b. Démontrer qu'un endomorphisme orthogonal est une symétrie si et seulement si :

$$\forall (u, v) \in E^2 \quad (f(u) | v) = (u | f(v))$$

Démontrer qu'alors  $f$  est une symétrie orthogonale.

c. On suppose que  $f$  est un endomorphisme orthogonal, et on note  $A$  sa matrice dans une base orthonormée de  $E$ . Démontrer que si  $f$  est une symétrie alors  $A$  est symétrique.

**16** Soit  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  muni du produit scalaire :

$$\forall (f, g) \in E^2 \quad (f | g) = \int_0^1 fg$$

On note  $F$  le sous-espace vectoriel de  $E$  contenant les fonctions nulles en 0.

a. Justifier que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et déterminer son orthogonal.

On pourra utiliser la fonction  $u(t) = tf(t)$ .

b. A-t-on  $F^{\perp\perp} = F$  ?  $E = F \oplus F^\perp$  ?

**17** Soit  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  muni du produit scalaire :

$$\forall (A, B) \in E^2 \quad (A | B) = \text{tr}({}^tAB)$$

- Démontrer que  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  sont orthogonaux.
- Donner une base orthonormée de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .
- Pour toute matrice  $A$  de  $E$ , calculer le projeté orthogonal de  $A$  sur  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .

**18** Soit  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  muni du produit scalaire de l'exercice précédent.

Soit  $F$  l'ensemble des matrices de  $E$  de traces nulles.

- Justifier que  $F$  est un hyperplan de  $E$  et en donner un supplémentaire orthogonal.
- Pour toute matrice  $A$  de  $E$ , Déterminer la distance de  $A$  à  $F$ .

**19** Soit  $f$  l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Déterminer l'ensemble  $F$  des points fixes de  $A$ , en donner une base orthonormée  $\mathcal{F}$ .
- Compléter la famille  $\mathcal{F}$  en une base orthonormée  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$ .
- Déterminer la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
- Vérifier que  $F^\perp$  est stable par  $f$ . Décrire la restriction de  $f$  à  $F^\perp$ , puis décrire l'application  $f$  géométriquement.

**20** Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien de dimension  $n$ . On note  $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ .

- Quelle est la dimension de  $E^*$  ?
- Démontrer que pour tout  $v \in E$ , l'application  $\varphi_v : u \mapsto (u | v)$  appartient à  $E^*$ .
- Démontrer que l'application  $\Phi : v \mapsto \varphi_v$  est linéaire.
- Démontrer que pour toute forme linéaire  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$  il existe un et un seul vecteur  $v \in E$  tel que :

$$\forall u \in E \quad \varphi(u) = (u | v)$$

**21** Soit  $E = \mathbb{R}^3$ .

- Justifier que pour tout couple  $(u, v)$  de vecteurs de  $E$  il existe un et un seul vecteur  $x$  de  $E$  tel que :

$$\forall w \in E \quad (x | w) = \det(u, v, w)$$

Le vecteur  $x$  est appelé *produit vectoriel* de  $u$  et  $v$ , et il est noté  $u \wedge v$ . Il vérifie :

$$\forall w \in E \quad (u \wedge v | w) = \det(u, v, w)$$

- Démontrer que l'application  $(u, v) \mapsto u \wedge v$  est bilinéaire alternée.
- Démontrer que le vecteur  $u \wedge v$  est orthogonal à  $u$  et à  $v$ .
- Soit  $u = (x_1, y_1, z_1)$  et  $v = (x_2, y_2, z_2)$ . Expliciter les coordonnées de  $u \wedge v$  en utilisant un développement par rapport à la troisième colonne.

FIGURE 1 – Approximation de l'exponentielle sur  $[0, 1]$  par une courbe du second degré

