# Chapitre B14
# Fractions rationnelles

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## I. Définitions

### A. Le corps $\mathbb{K}(X)$

**Définition.** On appelle fraction rationnelle un quotient de deux polynômes dont le dénominateur est non-nul.

**Notation.**
L'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}(X)$.

**Remarques.**

*(i)* Deux fractions rationnelles $\frac{P_1}{Q_1}$ et $\frac{P_2}{Q_2}$ sont égales si et seulement si $P_1Q_2 = P_2Q_1$.

*(ii)* L'ensemble $\mathbb{K}(X)$ est muni :
- d'une addition (notée $+$),
- d'une multiplication interne (notée $\times$),
- d'une multiplication par un scalaire (notée $\cdot$).

Il possède :
- un élément neutre pour l'addition : $0 = \frac{0}{1}$
- un élément neutre pour la multiplication : $1 = \frac{1}{1}$.

Tout élément possède un opposé : $-\frac{P}{Q} = \frac{-P}{Q}$.

*(iii)* Un élément $\frac{P}{Q}$ est non-nul si et seulement si il est de la forme $\frac{P}{Q}$ avec $P$ non-nul.
Tout élément non-nul est inversible, c'est-à-dire qu'il possède un inverse dans $\mathbb{K}(X)$.
En effet l'inverse de $\frac{P}{Q}$ est : $\left(\frac{P}{Q}\right)^{-1} = \frac{Q}{P}$

**Propositions.**

*(i) Le triplet* $(\mathbb{K}(X), +, \cdot)$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$.

*(ii) Le triplet* $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ *est un corps commutatif.*

Démonstration. L'addition des fractions rationnelles est une loi de composition interne :

$$\forall (P_1, P_2, Q_1, Q_2) \in (\mathbb{K}[X])^2 \times (\mathbb{K}[X]^*)^2 \qquad \frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1Q_2 + P_2Q_1}{Q_1Q_2} \in \mathbb{K}(X)$$

Elle est commutative et associative. Elle admet un élément neutre, et tout élément possède un opposé.

Le couple $(\mathbb{K}(X), +)$ est donc un groupe abélien.

*(i)* La multiplication par un scalaire est une loi externe $\mathbb{K} \times \mathbb{K}(X) \to \mathbb{K}(X)$ définie par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad \forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^* \qquad \lambda \cdot \frac{P}{Q} = \frac{\lambda P}{Q}$$

Elle vérifie les axiomes d'un espace vectoriel :

$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \qquad \forall (P, P_1, P_2) \in \mathbb{K}[X]^3 \qquad \forall (Q, Q_1, Q_2) \in (\mathbb{K}[X]^*)^3$

$$(\lambda\mu)\frac{P}{Q} = \lambda\left(\mu\frac{P}{Q}\right) \qquad\qquad 1 \cdot \frac{P}{Q} = \frac{P}{Q}$$

$$(\lambda+\mu)\frac{P}{Q} = \lambda\frac{P}{Q} + \mu\frac{P}{Q} \qquad\qquad \lambda\left(\frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2}\right) = \lambda\frac{P_1}{Q_1} + \lambda\frac{P_2}{Q_2}$$

Le triplet $(\mathbb{K}(X), +, \cdot)$ est donc un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

*(ii)* La loi $\times$ est une loi de composition interne :

$$\forall (P_1, P_2, Q_1, Q_2) \in (\mathbb{K}[X])^2 \times (\mathbb{K}[X]^*)^2 \qquad \frac{P_1}{Q_1} \times \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 P_2}{Q_1 Q_2} \in \mathbb{K}(X)$$

Elle est commutative et associative. Elle admet un élément neutre. Elle est distributive par rapport à la loi $+$.

Ainsi le triplet $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un anneau commutatif.

Tout élément non-nul de $\mathbb{K}(X)$ est inversible, c'est-à-dire possède un inverse dans $\mathbb{K}(X)$. Donc le triplet $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps commutatif. □

## B. Forme irréductible, partie entière

**Rappels.**

*(i)* Lemme de Gauss : Soit $A$, $B$, $C$ trois polynômes. Si $A$ est premier avec $B$ et $A$ divise $BC$ alors $A$ divise $C$.

*(ii)* Soit $P$ et $Q$ deux polynômes non-nuls.

Un PGCD de $P$ et $Q$ est un polynôme de degré maximal divisant $P$ et $Q$.

Le PGCD de $P$ et $Q$ est le polynôme unitaire de degré maximal divisant $P$ et $Q$.

Il est noté $P \wedge Q$.

*(iii)* Deux polynômes $P$ et $Q$ sont *associés* s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $P = \lambda Q$.

Ceci a lieu si et seulement si $P \mid Q$ et $Q \mid P$.

**Définition.** Soit $F$ un élément de $\mathbb{K}(X)$. Une forme irréductible de $F$ est une écriture $F = \frac{P}{Q}$ où $P$ et $Q$ sont deux polynômes premiers entre eux.
Si $Q$ est unitaire alors on dit que cette forme irréductible est unitaire.

**Proposition.** *Toute fraction rationnelle admet une forme irréductible.*
*Toute fraction rationnelle admet une unique forme irréductible unitaire.*

Démonstration. Comme $F \in \mathbb{K}(X)$ alors il existe deux polynômes $P_1$ et $Q_1$ avec $Q_1$ non-nul tels que $F = \frac{P_1}{Q_1}$.

Soit $D$ un PGCD de $P_1$ et $Q_1$. Alors il existe deux polynômes $P$ et $Q$ tels que $P_1 = DP$ et $Q_1 = DQ$. Par propriété $P$ et $Q$ sont premiers entre eux, et $F = \frac{P}{Q}$.

Ceci montre que toute fraction rationnelle admet une forme irréductible.

En divisant $P$ et $Q$ par le coefficient dominant de $Q$ on obtient une forme irréductible unitaire de $F$, ce qui montre que toute fraction rationnelle admet une forme irréductible unitaire.

Si $F = \frac{P_2}{Q_2}$ est une autre forme irréductible unitaire alors $PQ_2 = P_2Q$. Le lemme de Gauss montre que $Q_2$ et $Q$ sont associés, et comme ils sont unitaires alors ils sont égaux. Ceci implique $P = P_2$.

Finalement toute fraction rationnelle admet une unique forme irréductible unitaire. □

▷ **Exercice 1.**

**Proposition.** *Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle. Alors il existe un unique couple $(A, R)$ de polynômes tel que :*

*On dit que $A$ est la partie entière de $F$.*

Démonstration. Il s'agit exactement du théorème de division euclidienne, appliqué à $P$ et $Q$. Celui-ci est valable car $Q$ est non-nul. □

▷ **Exercice 2.**

**Remarques.**

*(i)* Si $\deg P \geqslant \deg Q$ alors $\deg A = \deg P - \deg Q$.

*(ii)* Si $\deg P < \deg Q$ alors $A = 0$.

▷ **Exercice 3.**

## C. Degré

**Définition.** Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle non-nulle.
On appelle degré de $F$ et on note $\deg F$ l'entier relatif $\deg P - \deg Q$.

**Remarque.** Soit $P_1$, $P_2$, $Q_1$, $Q_2$ quatre polynômes non-nuls tels que $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2}$. Alors :

$$\deg P_1 - \deg Q_1 = \deg P_2 - \deg Q_2$$

En effet, si $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2}$ alors $P_1Q_2 = P_2Q_1$ donc $\deg P_1 + \deg Q_2 = \deg P_2 + \deg Q_1$.
Ceci montre que le degré d'une fraction rationnelle $F$ est bien défini, il ne dépend pas des polynômes $P$ et $Q$ choisis pour représenter $F$.

**Proposition.** *Pour toutes fractions rationnelles $F$ et $G$ non-nulles :*

$\deg(F+G)$ $\deg(FG) =$

▷ **Exercice 4.**

**Remarque.** On convient que le degré de la fraction rationnelle nulle est $-\infty$ :

$$\deg 0 = -\infty$$

Les formules ci-dessus restent donc valables, en convenant que $-\infty + n = -\infty$ pour tout entier relatif $n$.

▷ **Exercice 5.**

## D. Racines et pôles

**Définition.** Soit $F$ une fraction rationnelle, de forme irréductible $F = \frac{P}{Q}$.

*(i)* Les racines ou zéros de $F$ sont les racines de $P$.

*(ii)* Les pôles de $F$ sont les racines de $Q$.

*(iii)* L'ordre de multiplicité d'une racine de $F$ est son ordre de multiplicité en tant que racine de $P$.

*(iv)* L'ordre de multiplicité d'un pôle de $F$ est son ordre de multiplicité en tant que racine de $Q$.

**Remarque.** Si $F = \frac{P_1}{Q_1}$ et $F = \frac{P_2}{Q_2}$ sont deux formes irréductibles de $F$ alors $P_1$ et $P_2$ sont associés, de même que $Q_1$ et $Q_2$.

Les racines de $P_1$ sont donc celles de $P_2$, avec les mêmes ordres de multiplicité, et de même pour $Q_1$ et $Q_2$.

La définition des racines et pôles de $F$ ainsi que celle de leurs ordres de multiplicité est donc correcte, elle ne dépend pas du choix du représentant irréductible de $F$.

**Exemple.** Soit $F = \dfrac{X^4(X-3)(X-2)^3}{(X^2-4)^7}$

**Définition.** Soit $F$ une fraction rationnelle, $\mathscr{P}$ l'ensemble de ses pôles, et $\mathscr{D} = \mathbb{K} \setminus \mathscr{P}$.

La fonction

$$\begin{aligned} f : \mathscr{D} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto F(x) \end{aligned}$$

est appelée fonction rationnelle.

# II. Interpolation de Lagrange

## A. Théorème et définitions

**Théorème.** *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des scalaires distincts, $\beta_0, \dots, \beta_n$ des scalaires. Alors il existe un et un seul polynôme $P$ de degré au plus $n$ tel que :*

$$\forall i = 0, \dots, n \qquad P(\alpha_i) = \beta_i \tag{$\star$}$$

**Remarque.** Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ les données de l'énoncé correspondent à un ensemble de $(n+1)$ points $M_0, \dots M_n$ d'abscisses distinctes.

Le théorème signifie qu'il existe une et une seule courbe polynomiale de degré au plus $n$ passant par ces $(n+1)$ points.

Démonstration. On définit l'application :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{K}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ P &\longmapsto (P(\alpha_0), \dots, P(\alpha_n)) \end{aligned}$$

Les composantes de $\Phi$ sont les spécialisations $P \mapsto P(\alpha_i)$, donc elles sont linéaires, et ainsi $\Phi$ est linéaire.

Le noyau de $\Phi$ est l'ensemble des polynômes $P$ de $\mathbb{K}_n[X]$ tels que $P(\alpha_0) = \cdots = P(\alpha_n) = 0$, c'est-à-dire dont les $\alpha_i$ sont racines.

Or un polynôme non-nul de degré au plus $n$ ne peut avoir $n+1$ racines, donc le noyau de $\Phi$ est réduit au vecteur nul : $\ker \Phi = \{0\}$

Ceci implique que $\Phi$ est injective. Or $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}^{n+1}$ sont tous les deux de dimension $n+1$. Par corollaire du théorème du rang $\Phi$ est bijective.

Le vecteur $(\beta_0, \dots, \beta_n)$ appartient à $\mathbb{K}^{n+1}$, donc il admet un et un seul antécédent par $\Phi$, ce qui démontre le théorème. $\square$

**Remarque.** On peut expliciter le polynôme $P$ dont l'existence et l'unicité sont affirmées par le théorème.

Pour ceci on cherche des antécédents des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$.

On note $\mathscr{C} = (e_0, \dots, e_n)$ cette base canonique.

Soit $L_i = \Phi^{-1}(e_i)$, pour tout $i = 0, \dots, n$. Alors tous les $\alpha_k$ sauf $\alpha_i$ sont racines de $L_i$, donc $L_i$ est de la forme :

$$L_i = \lambda(X - \alpha_0) \cdots (X - \alpha_{i-1})(X - \alpha_{i+1}) \cdots (X - \alpha_n) = \lambda \prod_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq i}} (X - \alpha_k)$$

Comme $L_i$ est de degré au plus $n$ alors $\lambda$ est un scalaire. Comme $\Phi(L_i) = e_i$ alors $L_i(\alpha_i) = 1$, ce qui montre que :

$$\lambda = \frac{1}{(\alpha_i - \alpha_0) \cdots (\alpha_i - \alpha_{i-1})(\alpha_i - \alpha_{i+1}) \cdots (\alpha_i - \alpha_n)}$$

**Définition.** On note $T = (X - \alpha_0) \dots (X - \alpha_n)$ puis :

$$\forall i = 0, \dots, n \qquad P_i = \frac{T}{(X - \alpha_i)}$$

et enfin :

$$\forall i = 0, \dots, n \qquad L_i = \frac{P_i}{P_i(\alpha_i)}$$

Les polynômes $L_0, \dots, L_n$ sont appelés polynômes d'interpolations de Lagrange aux points $\alpha_0, \dots, \alpha_n$.

**Théorème (suite).** *Le polynôme $P$ de degré au plus $n$ vérifiant les conditions ($\star$) est :*

$$P = \beta_0 L_0 + \dots + \beta_n L_n = \sum_{i=0}^{n} \beta_i L_i$$

Démonstration. On a vu que les $L_i$ sont antécédents des vecteurs $e_i$ de la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$. On en déduit par linéarité de $\Phi$ :

$$\begin{aligned}\Phi(P) = \Phi(\beta_0 L_0 + \dots + \beta_n L_n) &= \beta_0 \Phi(L_0) + \dots + \beta_n \Phi(L_n) \\ &= \beta_0 e_0 + \dots + \beta_n e_n = (\beta_0, \dots, \beta_n)\end{aligned}$$

Ceci montre que $P$ est l'antécédent de $(\beta_0, \dots, \beta_n)$ par $\Phi$. □

**Proposition.** *On note $P_0$ le polynôme de degré au plus $n$ vérifiant les conditions ($\star$).*
*Soit $T = (X - \alpha_0) \cdots (X - \alpha_n)$.*
*Alors les polynômes vérifiant les conditions ($\star$) sont les polynômes $P_0 + AT$ où $A \in \mathbb{K}[X]$.*

Démonstration. En effet, un polynôme $P$ vérifie les conditions ($\star$) si et seulement si le polynôme $P - P_0$ s'annule en tous les points $\alpha_0, \dots, \alpha_n$, donc si et seulement si le polynôme $P - P_0$ est multiple de $T$. □

## B. Propriétés supplémentaires

### 1. Matrice de Vandermonde

La matrice de $\Phi$ dans les bases canoniques de $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}^{n+1}$ est :

Son déterminant est un déterminant de Vandermonde. On démontre que :

$$\det A = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (\alpha_j - \alpha_i)$$

Il est donc non-nul si et seulement si les $\alpha_i$ sont distincts.

On peut expliciter la matrice inverse de $A$ de la façon suivante.

La famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ car c'est l'image réciproque de la base canonique $\mathscr{C}$ de $\mathbb{K}^{n+1}$ par l'isomorphisme $\Phi$. On note $\mathscr{B} = (L_0, \dots, L_n)$ cette base.

Soit $\mathscr{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$, et $P$ la matrice de passage de $\mathscr{B}_0$ à $\mathscr{B}$. Il s'agit de la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des polynômes $L_i$ dans la base canonique.

Alors $P = M_{\mathscr{B}\mathscr{B}_0}(\mathrm{Id}_{\mathbb{K}_n[X]})$ et $A = M_{\mathscr{B}_0\mathscr{C}}(\Phi)$, donc :

$$AP = M_{\mathscr{B}\mathscr{C}}(\Phi \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{K}_n[X]}) = M_{\mathscr{B}\mathscr{C}}(\Phi) = I_{n+1}$$

En effet, comme $\Phi(L_i) = e_i$ pour tout $i = 0, \dots, n$ alors la matrice de $\Phi$ dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ est l'identité.

Les matrices étant carrées, on en déduit que $P$ est la matrice inverse de $A$.

2.<u>Orthogonalité</u>

L'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$ est muni du produit scalaire :

$$\forall (P, Q) \in E^2 \qquad (P \mid Q) = \sum_{k=0}^{n} P(\alpha_k) Q(\alpha_k)$$

Cette application est un produit scalaire car les $\alpha_k$ sont distincts.

On remarque qu'alors :

$$\forall (i, j) \in \{0, \dots, n\}^2 \qquad (L_i \mid L_j) = \sum_{k=0}^{n} L_i(\alpha_k) L_j(\alpha_k) = \delta_{ij}$$

En conséquence la base $(L_0, \dots, L_n)$ est orthonormée.

Soit $P$ un polynôme de $E$. Alors :

$$\forall i = 0, \dots, n \qquad (P \mid L_i) = \sum_{k=0}^{n} P(\alpha_k) L_i(\alpha_k) = P(\alpha_i)$$

Ceci montre que les coordonnées de $P$ dans la base $(L_0, \dots, L_n)$ sont $(P(\alpha_0), \dots, P(\alpha_n))$ :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \qquad P = \sum_{k=0}^{n} P(\alpha_k) L_k$$

Soit maintenant $E = \mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré au plus $n$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction polynomiale définie par :

$$f_n(x) = f(\alpha_0) L_0(x) + \cdots + f(\alpha_n) L_n(x)$$

est la projetée orthogonale de $f$ sur $E$. Elle prend les valeurs de $f$ aux points $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ :

$$\forall i = 0, \dots n \qquad f_n(\alpha_i) = f(\alpha_i)$$

# III. Décomposition en éléments simples

## A. Les théorèmes

**Remarque.** On rappelle que toute fraction rationnelle $F$ s'écrit $F = A + \frac{P}{Q}$ où $A$, $P$, $Q$ sont des polynômes et $\deg P < \deg Q$.

En effet il suffit de choisir pour $A$ la partie entière de $F$.

En conséquence dans la suite on considérera uniquement des fractions rationnelles de degrés négatifs, c'est-à-dire de la forme $\frac{P}{Q}$ avec $\deg P < \deg Q$.

**Théorème 1.** *Soit $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des scalaires distincts. Alors pour tout polynôme $P$ de degré inférieur ou égal à $n$ il existe une unique famille de scalaires $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ telle que :*

**Exemples.**

$$\frac{X+1}{X(X+2)} =$$

$$\frac{X^2+2X+13}{(X^2-1)(X+3)} =$$

$$\frac{1}{(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)} =$$

Démonstration. On reprend les polynômes d'interpolation de Lagrange :

$$T = \prod_{k=0}^{n}(X-\alpha_k) \qquad \text{et} \qquad \forall i = 0, \dots, n \qquad P_i = \frac{T}{(X-\alpha_i)} \qquad \text{puis} \qquad L_i = \frac{P_i}{P_i(\alpha_i)}$$

On a alors l'équivalence :

$$\frac{P}{(X-\alpha_0)\cdots(X-\alpha_n)} = \frac{\lambda_0}{X-\alpha_0} + \cdots + \frac{\lambda_n}{X-\alpha_n} \qquad (\star\star)$$

$$\iff \qquad P = \lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_n P_n$$

On sait que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Comme les $\alpha_k$ sont distincts alors les $P_i(\alpha_i)$ sont non-nuls, donc la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Tout polynôme $P$ de $\mathbb{K}_n[X]$ admet donc un unique $n$-uplet $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ de coordonnées dans cette base, ce qui démontre le théorème. $\square$

**Remarque.** Soit $i \in \{0, \dots, n\}$ fixé. Alors en multipliant ($\star\star$) par $(X - \alpha_i)$ :

$$\frac{P}{P_i} = \lambda_i + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \lambda_k \frac{X - \alpha_i}{X - \alpha_k}$$

La fraction rationnelle $\frac{P}{P_i}$ n'admet pas $\alpha_i$ pour pôle, donc on peut la spécialiser en $\alpha_i$, ce qui donne la valeur de $\lambda_i$.

**Méthode.** Supposons que $F = \frac{P}{Q}$ et $\alpha$ est un pôle simple de $F$.
Alors il existe un polynôme $Q_1$ tel que :

$$F = \frac{P}{(X - \alpha)Q_1}$$

*(i)* Le coefficient de $\frac{1}{(X-\alpha)}$ dans la décomposition polaire de $F$ est $\lambda = \frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)}$.

*(ii)* On peut aussi utiliser la formule $\lambda = \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$.
En effet, comme $Q = (X - \alpha)Q_1$ alors $Q' = Q_1 + (X - \alpha)Q_1'$ donc $Q'(\alpha) = Q_1(\alpha)$.

▷ **Exercice 6.**

**Théorème 2.** *Soit $\alpha$ un scalaire et $n$ un entier strictement positif. Alors pour tout polynôme $P$ de degré strictement inférieur à $n$ il existe une unique famille de scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telle que :*

Démonstration. L'égalité équivaut à :

$$P = \lambda_n + \lambda_{n-1}(X - \alpha) + \cdots + \lambda_1(X - \alpha)^{n-1}$$

La famille $\left((X - \alpha)^k \;\middle|\; 0 \leqslant k \leqslant n - 1\right)$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

En effet elle est libre car ses éléments sont de degrés échelonnés, et maximale parmi les familles libres car elle contient $n$ polynômes et $n$ est la dimension de $\dim \mathbb{K}_{n-1}[X]$.

Pour polynôme $P$ de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ possède donc un unique $n$-uplet $(\lambda_n, \dots, \lambda_1)$ de coordonnées dans cette base. Ceci démontre le théorème. □

**Méthode.** On peut utiliser la formule de Taylor pour les polynômes.
Comme $P$ est de degré au plus $n - 1$ alors celle-ci donne :

$$P = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X - \alpha)^k$$

On en déduit :

$$\frac{P}{(X - \alpha)^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!(X - \alpha)^{n-k}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{P^{(n-i)}(\alpha)}{(n - i)!(X - \alpha)^i}$$

▷ **Exercice 7.**

**Remarque.** On peut généraliser le théorème précédent en remplaçant $(X - \alpha)$ par un autre polynôme. Par exemple :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $Q$ un polynôme de degré 2. Alors pour tout polynôme $P$ de degré strictement inférieur à $2n$ il existe une unique famille $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ de scalaires telle que :

$$\frac{P}{Q^n} = \frac{\alpha_1 X + \beta_1}{Q} + \frac{\alpha_2 X + \beta_2}{Q^2} + \cdots + \frac{\alpha_n X + \beta_n}{Q^n}$$

▷ **Exercice 8.**

**Théorème 3.** *Soit $Q_1$ et $Q_2$ deux polynômes premiers entre eux, de degrés respectifs $a$ et $b$ strictement positifs. Alors pour tout polynôme $P$ de degré strictement inférieur à $a+b$ il existe un unique couple de polynômes $P_1$ et $P_2$ de degrés respectifs strictement inférieurs à $a$ et $b$ tels que :*

Démonstration.

T. S. V. P.

**Rappels.**

*(i)* Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les $\lambda(X-\alpha)$ où $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, c'est-à-dire les polynômes de degré 1.

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les $\lambda(X-\alpha)$ où $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, et les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.

*(ii)* Tout polynôme se décompose en produit de polynômes irréductibles.

Cette décomposition est unique à l'ordre près si on suppose que les facteurs sont unitaires et on ajoute le coefficient dominant.

**Théorème (décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$).**
*Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle. On suppose que la décomposition en produit de facteurs irréductibles de $Q$ est :*

$$Q = \lambda(X-\alpha_1)^{m_1} \cdots (X-\alpha_n)^{m_n}$$

*où les $\alpha_i$ sont des scalaires distincts et les $m_i$ des entiers strictement positifs.*
*Alors il existe une unique famille composée d'un polynôme $A$ et de scalaires $\lambda_{i,k}$ telle que :*

$$\frac{P}{Q} = A + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i} \frac{\lambda_{i,k}}{(X-\alpha_i)^k}$$

**Remarque.** $A$ est la partie entière de $F$.

▷ **Exercices 9, 10.**

**Théorème (décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$).**
*Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle. On suppose que la décomposition en produit de facteurs irréductibles de $Q$ dans $\mathbb{R}(X)$ est :*

$$Q = \lambda(X-\alpha_1)^{m_1}\cdots(X-\alpha_n)^{m_n} \times Q_1^{p_1} \times \cdots \times Q_r^{p_r}$$

*où les $\alpha_i$ sont des scalaires distincts, les $m_i$ des entiers strictement positifs, les $Q_j$ des polynômes irréductibles de degré 2, et les $p_j$ des entiers strictement positifs.*
*Alors il existe une unique famille composée d'un polynôme $A$, et de scalaires $\lambda_{i,k}$, $\mu_{j,\ell}$ et $\nu_{j,\ell}$ telle que :*

$$\frac{P}{Q} = A + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i}\frac{\lambda_{i,k}}{(X-\alpha_i)^k} + \sum_{j=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{p_j}\frac{\mu_{j,\ell}X+\nu_{j,\ell}}{Q_j^\ell}$$

▷ **Exercice 11.**

**Méthodes.** Les techniques suivantes peuvent être efficaces :

- La spécialisation en un point quelconque, voire le passage à la limite.
- La conjugaison des complexes.
- La parité.

▷ **Exercices 12, 13.**

## B. Applications

**Méthode.** La décomposition en éléments simples permet d'intégrer les fractions rationnelles.

On commence par extraire la partie entière, puis on factorise le dénominateur.

Ne pas oublier que parfois on peut intégrer directement, en faisant apparaître des formes comme $\frac{u'}{u}$, $\frac{u'}{u^2}$, $\frac{u'}{1+u^2}$, etc.

**Rappels.** Pour tout réel $\alpha$ et entier $n > 1$ :

$$\int \frac{dx}{x-\alpha} = \qquad \int \frac{dx}{(x-\alpha)^n} =$$

Pour tous réels $a$, $b$, $c$ avec $a > 0$ et $b^2 - 4ac < 0$, pour tous réels $\beta$ et $\delta \neq 0$ :

$$\int \frac{}{ax^2+bx+c}dx = \qquad \int \frac{dx}{(x-\beta)^2+\delta^2} =$$

▷ **Exercices 14, 15, 16, 17, 18, 19.**

**Remarque.** La décomposition en éléments simples est parfois utilisée pour calculer la somme d'une série, grâce au télescopage.

▷ **Exercice 20.**