Feuille de T. D. B14
Fractions rationnelles

Exercices de cours

1 Donner une forme irréductible des fractions rationnelles suivantes.

$$F_1 = \frac{X^3 - 2X^2 - 9}{X^2 + 2X - 15}$$

$$F_2 = \frac{X^2 - 1}{X^3 - 1} \qquad F_3 = \frac{X^4 + 1}{X^2 + 1}$$

$$F_4 = \frac{3X^3 + X^2 - 2X - 2}{2X^3 + 2X^2 - 3X - 1}$$

2 Déterminer les parties entières de :

$$F_1 = \frac{X^2 + 1}{X + 1} \qquad F_2 = \frac{X^5 - X^2}{X^2 + X + 1}$$

$$F_3 = \frac{X^4 - 5X^3 - 9X + 3}{X^2 - 2X + 2}$$

$$F_4 = \frac{X^n}{X - a} \qquad F_5 = \frac{X^{15}}{(X^2 + 3X + 2)^7}$$

3 Quelles fractions rationnelles sont égales à leur partie entière ?

4 Énoncer et démontrer les formules pour

$$\deg(F + G) \quad \text{et} \quad \deg(FG).$$

5 Quelle est la partie entière d'une fraction rationnelle de degré nul ?

6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Décomposer en éléments simples :

$$\frac{1}{X^n - 1}$$

7 Décomposer en éléments simples :

$$F_1 = \frac{3X + 7}{(X + 4)^2} \qquad F_2 = \frac{X^3 - 3X + 1}{(X + 1)^4}$$

$$F_3 = \frac{X^n}{(X - 1)^{n+1}}$$

8 Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$:

$$F = \frac{(X + 1)^3}{(X^2 + 1)^2}$$

9 Décomposer en éléments simples :

$$F_1 = \frac{1}{X^3 - 3X + 2} \qquad F_2 = \frac{X^4 + 2X^3}{(X^2 - 1)^2}$$

10 Décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$.

a. Soit $u_1, \dots, u_n$ des fonctions dérivables.
Donner une formule pour $(u_1 \dots u_n)'$.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

b. Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les racines complexes de P, $m_1, \dots m_n$ leurs multiplicités.
Donner une expression de $\frac{P'}{P}$, en déduire sa décomposition en éléments simples.

c. On suppose que les α_i sont réels.
Donner une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{P'(x)}{P(x)}$ et retrouver le résultat précédent.

11 Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$:

$$F_1 = \frac{X}{X^4 - 1} \qquad F_2 = \frac{X^5}{(X^2 + 1)^2}$$

12 Décomposer en éléments simples en spécialisant :

$$F = \frac{(X - 1)(X - 3)}{(X - 2)(X - 4)}$$

13 Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$:

$$F = \frac{X^3}{(X^2 + 1)(X^2 + 2)}$$

a. en utilisant les complexes,
b. en utilisant la parité.

14 Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}^*$ de la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^3(x + 1)}$$

15 Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}^*$ de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^3}{x^2 + 2x + 2}$$

en partant de la forme désirée.

16 Déterminer une primitive sur l'intervalle $]-1, 1[$ de la fonction :

$$x \mapsto \frac{1}{1 - x^4}$$

17 Soit $\quad f(x) = \dfrac{1}{(x^2 + 1)^2}$.

Déterminer une primitive de f :

a. en utilisant les complexes,
b. grâce à un changement de variable.

18 Intégrer la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{(\cos\theta)x - 1}{x^2 - 2(\cos\theta)x + 1}$$

où θ est un réel non multiple de π.

19 Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $x \in]-\infty, 1[$ on définit :

$$f_k(x) = \frac{x^k}{x^3 - 1} \qquad \text{et} \qquad F_k(x) = \int_0^x f_k(t)\,dt$$

a. Calculer F_2 puis $F_2 + F_1 + F_0$ et enfin $F_1 - F_0$.

b. En déduire la décomposition de $\frac{1}{X^3-1}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

20 Calculer la somme des séries suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{4n^2 + 8n + 3} \qquad \sum_{n\geqslant 2} \frac{n}{(n^2-1)^2}$$

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{n - 10}{n^3 + 7n^2 + 10n}$$

Travaux dirigés

1 Soit E l'application de $\mathbb{K}(X)$ dans $\mathbb{K}[X]$ qui a une fraction rationnelle associe sa partie entière.

a. Démontrer que E est linéaire.

b. Déterminer le noyau et l'image de E.

c. Démontrer que ceux-ci sont supplémentaires.

2 Soit Q_1 et Q_2 deux polynômes non constants et D leur PGCD.

a. Démontrer qu'il existe deux polynômes P_1 et P_2 tels que :

$$\frac{D}{Q_1Q_2} = \frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2}$$

b. Déterminer tous les couples (P_1, P_2) de polynômes vérifiant cette égalité.

c. Démontrer qu'il existe un tel couple où :

$$\deg P_1 < \deg Q_1 \quad \text{et} \quad \deg P_2 < \deg Q_2.$$

3 Calculer les dérivées successives de :

a. $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)(x-b)}$ avec $a \neq b$

b. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 9}$

c. $f(x) = \arctan x$

Retrouver grâce à la dernière le développement limité de arctan en 0.

4 Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{-2}^{0} \frac{t+4}{t^2+4t+6}\,dt \qquad I_2 = \int_3^4 \frac{t^2+5t+7}{t^2-5t+7}\,dt$$

$$I_3 = \int_0^6 \frac{t^2}{(t+2)(t+3)(t+4)}\,dt$$

$$I_4 = \int_0^2 \frac{t}{t^3-2t+4}\,dt \qquad I_5 = \int_0^1 \frac{t^3}{(t^2-4)^3}\,dt$$