Corrigé partiel du T. D. B5
Matrices

7 Calculer les puissances n-èmes de la matrice :
$$F = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

On remarque que :
$$F = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3I_2 + 4E$$

Les matrices $3I_2$ et $4E$ commutent car $3I_2 \times 4E = 12E = 4E \times 3I_2$. On peut alors appliquer la formule du binôme :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad F^2 = (3I_2 + 4E)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (3I_2)^{n-k}(4E)^k$$

Ceci donne, n étant fixé :
$$F^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k}4^k E^k$$

Les puissances n-ème de la matrice E ont été calculées juste précédemment :
$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad E^k = \begin{cases} 3^{k-1}E & \text{si } k \geqslant 1 \\ I_2 & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Ceci donne :
$$F^n = 3^n I_2 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k}4^k 3^{k-1} E$$

Par linéarité de la somme :
$$F^n = 3^n I_2 + 3^{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^k\right) E$$

Pour calculer la somme on introduit le terme pour $k = 0$ puis on applique la formule du binôme :
$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^k = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k 1^{n-k}\right) - 1 = (4+1)^n - 1 = 5^n - 1$$

Ainsi :
$$F^n = 3^n I_2 + 3^{n-1}(5^n - 1)E = 3^{n-1}[3I_2 + (5^n - 1)E]$$

Ceci donne :

$$\boxed{F^n = 3^{n-1}\begin{pmatrix} 5^n+2 & 5^n-1 & 5^n-1 \\ 5^n-1 & 5^n+2 & 5^n-1 \\ 5^n-1 & 5^n-1 & 5^n+2 \end{pmatrix}}$$

On vérifie rapidement que cette formule est effectivement correcte pour $n = 0$ et $n = 1$.

10 Soit t un scalaire, et A la matrice de taille (n, n) de coefficients :

$$a_{ij} = \begin{cases} t & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

a. Démontrer qu'il existe deux scalaires α et β tels que $A^2 = \alpha I_n + \beta A$, et exprimer ces scalaires en fonction de t.

b. Déterminer pour quelles valeurs de t la matrice A est inversible, et calculer alors A^{-1}.

a. On calcule A_2. On remarque que tous ces coefficients diagonaux sont égaux à t^2+n-1 et tous ces coefficients non diagonaux sont égaux à $2t+n-2$.

Ainsi la matrice $A^2-(2t+n-2)A$ est diagonale, et on calcule que ses coefficients diagonaux sont égaux à $-t^2-(n-1)t+n-1$.

On en déduit : $A^2 = \alpha I_n + \beta A$ avec $\alpha = -t^2-(n-2)t+n-1$ et $\beta = 2t+n-2$.

b. On factorise : $\alpha = -(t-1)(t+n-1)$

Si α est non-nul, c'est-à-dire si t est différent de 1 et de $-(n-1)$, alors on peut écrire :

$$\tfrac{1}{\alpha}(A-\beta I_n)A = I_n$$

Comme les matrices sont carrées, par théorème ceci montre que A est inversible, d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{\alpha}(A-\beta I_n)$.

Si α est nul, c'est-à-dire si $t = 1$ ou $t = -(n-1)$ alors A n'est pas inversible.

On démontre ceci par l'absurde. Si α est nul alors $A^2 = \beta A$. Si A était inversible alors en multipliant par A^{-1} on obtiendrait $A = \beta I_n$, ce qui est faux car A n'est pas diagonale.

Finalement A est inversible si et seulement si t est différent de 1 et de $-(n-1)$.

15 Résoudre les systèmes suivants.

$$S_1 : \begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ x + 2y - 3z = 1 \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

$$S_3 : \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x + 2y + 3z + 4t = 5 \\ x + 3y + 6z + 10t = 15 \\ x + 4y + 10z + 19t = 31 \end{cases} \qquad S_4 : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

Les réponses sont :

$\mathcal{S}_1 = \varnothing$ $\qquad$ $\mathcal{S}_2 = \{ (8 - 3y - t, y, 2 - 2t, t, -3) \mid (y,t) \in \mathbb{R}^2 \}$

$\mathcal{S}_3 = \{ (3 - t, -8 + 3t, 6 - 3t, t) \mid t \in \mathbb{R} \}$ $\qquad$ $\mathcal{S}_4 = \mathrm{Vect}\,((1,0,0,5,4))$

16 Résoudre les systèmes suivants, éventuellement en discutant selon la valeur des paramètres a, b, λ.

$$S_1 : \begin{cases} \lambda x - y + 2z = \lambda^2 - 3 \\ 3x + 2y + \lambda z = 4\lambda \\ 2x + z = 2\lambda + 1 \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} x + 2ay + z = 3 \\ y + az = 2 \\ x - z = -1 \end{cases}$$

$$S_3 : \begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 2x + y + z = -1 \\ x + 2y + az = b \end{cases}$$

$\mathcal{S}_1 = \{(\lambda + 2, 2\lambda - 3, -3)\}$

$$\mathcal{S}_2 = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{a+1}(1-a, 2, 2) \right\} & \text{si } a \neq \pm 1 \\ \varnothing & \text{si } a = -1 \\ \{ (-1 + t, 2 - t, t) \mid t \in \mathbb{R} \} & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_3 = \begin{cases} \left\{ \left(\frac{-b-2}{a+1}, \frac{-a+b+1}{a+1}, \frac{b+2}{a+1} \right) \right\} & \text{si } a \neq -1 \\ \varnothing & \text{si } a = -1 \text{ et } b \neq -2 \\ \{ (-t, t-1, t) \mid t \in \mathbb{R} \} & \text{sinon} \end{cases}$$

17 On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 13 \\ -4 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Justifier que A est inversible, calculer AB et en déduire que B n'est pas inversible.

Par opérations élémentaires $(L_1 \leftrightarrow L_3)$, $(L_3 \leftarrow L_3 - L_2)$ puis $(L_2 \leftarrow L_2 - L_1)$ on montre que A est équivalente par ligne à la matrice identité I_3, donc A est inversible.

On calcule :

$$AB = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 28 \\ 5 & 10 & 20 \\ 9 & 7 & 13 \end{pmatrix}$$

Les opérations $(L_1 \leftarrow \frac{1}{7}L_1)$ et $(L_2 \leftarrow \frac{1}{5}L_2)$ donnent :

$$AB \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 9 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

puis l'opération $(L_2 \leftarrow L_2 - L_1)$ donne :

$$AB \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Donc AB possède moins de trois pivots, ce qui montre qu'elle n'est pas inversible.

Si B était inversible alors par produit AB serait inversible, donc B n'est pas inversible.

18 On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 12 & 22 & -9 \\ -4 & -7 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calculer le produit AB, justifier que A et AB sont inversibles, et en déduire que B est inversible.

Calculer l'inverse de AB, puis celui de B.

La matrice A est inversible car elle possède trois pivots. On calcule.

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 28 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Les opérations $(L_1 \leftarrow L_1 - L_2)$ puis $(L_1 \leftrightarrow L_3)$ et $(L_3 \leftarrow -L_3)$ donnent :

$$AB \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 28 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

Donc la matrice AB est inversible.
Comme A est inversible alors A^{-1} est définie et elle est inversible.
On remarque que $B = A^{-1}(AB)$. Par produit la matrice B est inversible.
De plus $B^{-1} = (AB)^{-1}A$. Par l'algorithme du pivot de Gauss on obtient :

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -51 & 25 & 13 \\ 28 & -15 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En multipliant cette matrice par A :

$$B^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -51 & -128 & 113 \\ 28 & 69 & -60 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{19}$ Déterminer si chacune des matrices suivantes est inversible, éventuellement en discutant selon son paramètre, et inverser celles qui sont inversibles.

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ $A_3 = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ $A_5 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$ $A_6 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$A_7 = \begin{pmatrix} 2\lambda+1 & \lambda+1 \\ 2\lambda+2 & \lambda+2 \end{pmatrix}$ $A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A_9 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A_{10} = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ i & 1 & i \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}$ $A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ $A_{12} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A_{13} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & \lambda \end{pmatrix}$ $A_{15} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & -5 & 7 \end{pmatrix}$

$A_{16} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & a & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $A_{17} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 5 & 8 & -2 \\ -3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ $A_{18} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \\ \lambda & \lambda^2 & 1 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$

$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $A_2^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$ $A_3^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ $A_4^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$

A_5 est inversible ssi $\lambda \neq \pm i$ et $A_5^{-1} = \dfrac{1}{1+\lambda^2}\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$ $A_6^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

A_7 est inversible ssi $\lambda \neq 0$ et $A_7^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} \lambda+2 & -\lambda-2 \\ -2\lambda-2 & 2\lambda+1 \end{pmatrix}$ $A_8^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A_9^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{10}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -i & 2 \\ -i & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad A_{11}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{12}^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -5 \\ 8 & -12 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_{13}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -5 & -4 & 16 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

A_{14} est inversible ssi $\lambda \neq -1$ et $A_{14}^{-1} = \dfrac{1}{10(\lambda+1)}\begin{pmatrix} \lambda+4 & 2\lambda-2 & 5 \\ 5\lambda+8 & -4 & 5 \\ 6 & -8 & 10 \end{pmatrix}$

A_{15} n'est pas inversible.

$$A_{16}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}-a & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ a & -1 & -a \end{pmatrix} \qquad A_{17}^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 46 & -44 & -30 \\ -24 & 24 & 16 \\ 19 & -18 & -11 \end{pmatrix}$$

A_{18} est inversible ssi $\lambda \notin \mathbb{U}_3$ et $A_{18}^{-1} = \dfrac{1}{1-\lambda^3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

20 Démontrer qu'une matrice antisymétrique de taille $(3,3)$ n'est pas inversible.

Soit A une matrice antisymétrique de taille $(3,3)$. Ceci signifie qu'il existe trois réels a, b, c tels que :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Si a est nul alors :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -b & -c & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Cet matrice admet au plus deux pivots donc elle n'est pas inversible.

Si maintenant $a \neq 0$ alors par opérations élémentaires :

$$A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -a & 0 & c \\ 0 & a & b \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{c}{a} \\ 0 & 1 & \frac{b}{a} \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{c}{a} \\ 0 & 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & -c & -\frac{bc}{a} \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{c}{a} \\ 0 & 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice n'admet que deux pivots donc elle n'est pas inversible.

Finalement dans tous les cas A n'est pas inversible.

21 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et A la matrice de taille (n, n) dont les coefficients sont définis par :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+1 \\ 1 & \text{si } (i,j) = (n,1) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $B = I_n - A$.

a. Démontrer que B n'est pas inversible.

b. Démontrer que A est inversible et donner son inverse.

On résout facilement cet exercice grâce aux systèmes linéaires.

On note X et Y les vecteurs colonnes à n lignes dont les coefficients sont respectivement $x_1, \dots, x_n$ et $y_1, \dots, y_n$.

a. Le système $BX = 0$ équivaut au système $AX = X$, qui donne $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.
Donc le vecteur $X = (1 \dots 1)$ est solution du système $BX = 0$.
Celui-ci admet plus d'une solution donc il n'est pas de Cramer, et la matrice B n'est pas inversible.
On aurait pu aussi ajouter toutes les lignes de la matrice B, ce qui montre qu'elle n'admet pas n pivots.

b. On remarque que : $AX = Y \iff X = {}^tAY$
Donc A est inversible d'inverse $A^{-1} = {}^tA$.

22 Soit n un entier naturel non-nul et a un complexe. On note S_a le système :

$$\begin{cases} x_1 - ax_2 = 1 \\ x_2 - ax_3 = 1 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ x_{n-1} - ax_n = 1 \\ x_n - ax_1 = 1 \end{cases}$$

a. À quelle condition ce système est-il de Cramer ?

b. Résoudre le système dans ce cas.

c. Dans le cas où le système n'est pas de Cramer, résoudre le système homogène associé, puis compléter la résolution.

a. On applique les opérations élémentaires $(L_n \leftarrow L_n + a_k L_k)$ pour k allant de 1 à $n-1$, ce qui revient à l'opération :

$$(L_n \leftarrow L_n + \sum_{k=1}^{n-1} a^k L_k)$$

Elle donne $L_n : (1 - a^n)x_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k$, et le système obtenu est triangulaire.

Ce système est de Cramer si et seulement si il admet n pivots, donc si et seulement si $a \notin \mathbb{U}_n$.

b. Supposons que $a \notin \mathbb{U}_n$. Alors $a \neq 1$ donc la dernière ligne est $L_n : (1-a^n)x_n = \frac{a^n-1}{a-1}$.
On en déduit $x_n = \frac{1}{1-a}$, puis on obtient $x_{n-1} = \frac{1}{1-a}$, etc.
Finalement la solution est $\frac{1}{1-a}(1,\dots,1)$, ce qui est vite vérifié.

c. Supposons que $a \in U_n$.
Les solutions du système homogène associé sont les $\lambda(a^{n-1}, a^{n-2}, \dots, a, 1)$ où $\lambda \in \mathbb{C}$.
Si $a = 1$ la dernière ligne est $L_n : 0 = n$. Le système n'admet pas de solution.
Si $a \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$ alors la dernière ligne est $L_n : 0 = 0$, donc le système admet une infinité de solutions.
On remarque $\frac{1}{1-a}(1,\dots,1)$ est solution particulière, donc l'ensemble des solutions est :

$$\left\{ \tfrac{1}{1-a}(1,\dots,1) + \lambda(a^{n-1}, a^{n-2}, \dots, a, 1) \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$

23 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 15 & -9 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

a. Calculer A^2.

b. Démontrer que P est inversible et calculer son inverse.

c. Calculer $B = P^{-1}AP$.

d. Exprimer A^n en fonction de P, B et n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

e. Calculer B^n puis A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

a. On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} -26 & 14 \\ -105 & 51 \end{pmatrix}$.

b. La matrice P est inversible car son déterminant est égal à -1, il est non-nul.
On en déduit $P^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

c. On obtient $B = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

d. L'égalité $B = P^{-1}AP$ donne $A = PBP^{-1}$, puis on démontre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $A^n = PB^nP^{-1}$.

e. Comme B est diagonale alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $B^n = \begin{pmatrix} (-4)^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$.
On obtient ensuite $A^n = (-4)^n \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -15 & 6 \end{pmatrix} + (-3)^n \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 15 & -5 \end{pmatrix}$.

24 Reproduire l'exercice précédent avec :

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -25 \\ 4 & -9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a. On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 21 & -50 \\ 8 & -19 \end{pmatrix}$.

b. On obtient $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

c. On calcule $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d. Toujours par récurrence on démontre que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $A^n = PB^nP^{-1}$.

e. On démontre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $B^n = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On obtient ensuite $A^n = I_2 + n \begin{pmatrix} 10 & -25 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}$.

25 Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_0 = v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + v_n \\ v_{n+1} = 4u_n + 3v_n \end{cases}$$

On note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

a. Déterminer les trois premiers termes des suites (u_n) et (v_n).

b. Donner une matrice A telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $X_{n+1} = AX_n$.
En déduire une expression de X_n en fonction de A, n et X_0.

c. Démontrer qu'il existe deux matrices A_1 et A_2 telles que :

$$\forall n \in \{0, 1\} \qquad A^n = 5^n A_1 + A_2$$

d. Démontrer que la relation donnée ci-dessus est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

e. Exprimer les termes généraux des suites (u_n) et (v_n).

a. On calcule : $u = (1, 4, 19, \dots)$ et $v = (1, 7, 37, \dots)$.

b. En posant $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_{n+1} = AX_n$.

On démontre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_n = A^n X_0$.

c. On cherche à démontrer qu'il existe deux matrices A_1 et A_2 telles que :

$$I_2 = A_1 + A_2 \qquad \text{et} \qquad A = 5A_1 + A_2$$

Si ces deux matrices existent, alors par combinaisons linéaires des égalités ci-dessus :

$$A_1 = \frac{1}{4}(A - I_2) \qquad \text{et} \qquad A_2 = \frac{1}{4}(5I_2 - A)$$

On pose donc :

$$A_1 = \frac{1}{4}(A - I_2) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A_2 = I_2 - A_1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

On vérifie que $A_1 + A_2 = I_2$ et $5A_1 + A_2 = A$.

d. On démontre par récurrence que la propriété «$A^n = 5^n A_1 + A_2$» est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Le rang $n = 0$ a été établi dans la question précédente.
Pour l'hérédité on écrit :

$$A^{n+1} = A^n A = (5^n A_1 + A_2)A = 5^n A_1 A + A_2 A$$

En calculant on obtient $A_1 A = 5A_1$ et $A_2 A = A_2$, ce qui démontre l'hérédité.

e. D'après les trois questions précédentes : $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = (5^n A_1 + A_2)X_0$.
Ceci donne $X_n = 5^n A_1 X_0 + A_2 X_0$. On calcule :

$$A_1 X_0 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A_2 X_0 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ceci donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad X_n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3.5^n + 1 \\ 6.5^n - 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \frac{3.5^n + 1}{4} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{6.5^n - 2}{4}.$$

26 Cet exercice nécessite la connsaissance des suites double-récurrentes linéaires.
Soit A une matrice carrée inversible de taille (n, n) satisfaisant $A + A^{-1} = I_n$.
Calculer $A^p + A^{-p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

En développant $(A + A^{-1})^2$ on montre que $A^2 + A^{-2} = -I_n$.
De même on montre que $A^3 + A^{-3} = -2I_n$.
On démontre par récurrence qu'il existe une suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telle que $A^p + A^{-p} = a_p I_n$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
On obtient $a_0 = 2$, $a_1 = 1$, puis $a_{p+1} = a_p - a_{p-1}$.
On reconnait une suite double-récurrence. On obtient $a_p = \alpha e^{i\frac{p\pi}{3}} + \beta e^{-i\frac{p\pi}{3}}$ avec $\alpha = \beta = 1$, puis $a_p = 2\cos\frac{p\pi}{3}$.

Finalement : $\qquad \forall p \in \mathbb{N} \qquad A^p + A^{-p} = 2\cos\dfrac{p\pi}{3} I_n$

Un exemple de telle matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.