

Corrigé partiel du T. D. B5
Matrices

7 Calculer les puissances n -èmes de la matrice :

$$F = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

On remarque que :

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3I_2 + 4E$$

Les matrices $3I_2$ et $4E$ commutent car $3I_2 \times 4E = 12E = 4E \times 3I_2$. On peut alors appliquer la formule du binôme :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad F^n = (3I_2 + 4E)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (3I_2)^{n-k} (4E)^k$$

Ceci donne, n étant fixé :

$$F^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^{n-k} 4^k E^k$$

Les puissances n -ème de la matrice E ont été calculées juste précédemment :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad E^k = \begin{cases} 3^{k-1}E & \text{si } k \geq 1 \\ I_2 & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Ceci donne :

$$F^n = 3^n I_2 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^{n-k} 4^k 3^{k-1} E$$

Par linéarité de la somme :

$$F^n = 3^n I_2 + 3^{n-1} \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k \right) E$$

Pour calculer la somme on introduit le terme pour $k = 0$ puis on applique la formule du binôme :

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 4^k 1^{n-k} \right) - 1 = (4 + 1)^n - 1 = 5^n - 1$$

Ainsi :

$$F^n = 3^n I_2 + 3^{n-1} (5^n - 1) E = 3^{n-1} [3I_2 + (5^n - 1)E]$$

Ceci donne :

$$F^n = 3^{n-1} \begin{pmatrix} 5^n + 2 & 5^n - 1 & 5^n - 1 \\ 5^n - 1 & 5^n + 2 & 5^n - 1 \\ 5^n - 1 & 5^n - 1 & 5^n + 2 \end{pmatrix}$$

On vérifie rapidement que cette formule est effectivement correcte pour $n = 0$ et $n = 1$.

9 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 15 & -9 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

- Calculer A^2 .
- Démontrer que P est inversible et calculer son inverse.
- Calculer $B = P^{-1}AP$.
- Exprimer A^n en fonction de P , B et n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Calculer B^n puis A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

a. On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} -26 & 14 \\ -105 & 51 \end{pmatrix}$.

b. La matrice P est inversible car son déterminant est égal à -1 , il est non-nul.

On en déduit $P^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

c. On obtient $B = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

d. L'égalité $B = P^{-1}AP$ donne $A = PBP^{-1}$, puis on démontre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $A^n = PB^nP^{-1}$.

e. Comme B est diagonale alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $B^n = \begin{pmatrix} (-4)^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$.

On obtient ensuite $A^n = (-4)^n \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -15 & 6 \end{pmatrix} + (-3)^n \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 15 & -5 \end{pmatrix}$.

10 Reproduire l'exercice précédent avec :

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -25 \\ 4 & -9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a. On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 21 & -50 \\ 8 & -19 \end{pmatrix}$.

b. On obtient $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

c. On calcule $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d. Toujours par récurrence on démontre que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $A^n = PB^nP^{-1}$.

e. On démontre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $B^n = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On obtient ensuite $A^n = I_2 + n \begin{pmatrix} 10 & -25 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}$.

11 Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_0 = v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + v_n \\ v_{n+1} = 4u_n + 3v_n \end{cases}$$

On note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

- Déterminer les trois premiers termes des suites (u_n) et (v_n) .
- Donner une matrice A telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $X_{n+1} = AX_n$.
En déduire une expression de X_n en fonction de A , n et X_0 .
- Démontrer qu'il existe deux matrices A_1 et A_2 telles que :

$$\forall n \in \{0, 1\} \quad A^n = 5^n A_1 + A_2$$

- Démontrer que la relation donnée ci-dessus est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Exprimer les termes généraux des suites (u_n) et (v_n) .

a. On calcule : $u = (1, 4, 19, \dots)$ et $v = (1, 7, 37, \dots)$.

b. En posant $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_{n+1} = AX_n$.

On démontre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_n = A^n X_0$.

c. On cherche à démontrer qu'il existe deux matrices A_1 et A_2 telles que :

$$I_2 = A_1 + A_2 \quad \text{et} \quad A = 5A_1 + A_2$$

Si ces deux matrices existent, alors par combinaisons linéaires des égalités ci-dessus :

$$A_1 = \frac{1}{4}(A - I_2) \quad \text{et} \quad A_2 = \frac{1}{4}(5I_2 - A)$$

On pose donc :

$$A_1 = \frac{1}{4}(A - I_2) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = I_2 - A_1 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

On vérifie que $A_1 + A_2 = I_2$ et $5A_1 + A_2 = A$.

d. On démontre par récurrence que la propriété « $A^n = 5^n A_1 + A_2$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le rang $n = 0$ a été établi dans la question précédente.

Pour l'hérédité on écrit :

$$A^{n+1} = A^n A = (5^n A_1 + A_2)A = 5^n A_1 A + A_2 A$$

En calculant on obtient $A_1 A = 5A_1$ et $A_2 A = A_2$, ce qui démontre l'hérédité.

e. D'après les trois questions précédentes : $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = (5^n A_1 + A_2)X_0$.

Ceci donne $X_n = 5^n A_1 X_0 + A_2 X_0$. On calcule :

$$A_1 X_0 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 X_0 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ceci donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 \cdot 5^n + 1 \\ 6 \cdot 5^n - 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{3 \cdot 5^n + 1}{4} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{6 \cdot 5^n - 2}{4}.$$

12 On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 13 \\ -4 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Justifier que A est inversible, calculer AB et en déduire que B n'est pas inversible.

Par opérations élémentaires ($L_1 \leftrightarrow L_3$), ($L_3 \leftarrow L_3 - L_2$) puis ($L_2 \leftarrow L_2 - L_1$) on montre que A est équivalente par ligne à la matrice identité I_3 , donc A est inversible.

On calcule :

$$AB = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 28 \\ 5 & 10 & 20 \\ 9 & 7 & 13 \end{pmatrix}$$

Les opérations ($L_1 \leftarrow \frac{1}{7}L_1$) et ($L_2 \leftarrow \frac{1}{5}L_2$) donnent :

$$AB \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 9 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

puis l'opération ($L_2 \leftarrow L_2 - L_1$) donne :

$$AB \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Donc AB possède moins de trois pivots, ce qui montre qu'elle n'est pas inversible.

Si B était inversible alors par produit AB serait inversible, donc B n'est pas inversible.

13 On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 12 & 22 & -9 \\ -4 & -7 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calculer le produit AB , justifier que A et AB sont inversibles, et en déduire que B est inversible.

Calculer l'inverse de AB , puis celui de B .

La matrice A est inversible car elle possède trois pivots. On calcule.

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 28 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Les opérations $(L_1 \leftarrow L_1 - L_2)$ puis $(L_1 \leftrightarrow L_3)$ et $(L_3 \leftarrow -L_3)$ donnent :

$$AB \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 28 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

Donc la matrice AB est inversible.

Comme A est inversible alors A^{-1} est définie et elle est inversible.

On remarque que $B = A^{-1}(AB)$. Par produit la matrice B est inversible.

De plus $B^{-1} = (AB)^{-1}A$. Par l'algorithme du pivot de Gauss on obtient :

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -51 & 25 & 13 \\ 28 & -15 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En multipliant cette matrice par A :

$$B^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -51 & -128 & 113 \\ 28 & 69 & -60 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

15 Soit t un scalaire, et A la matrice de taille (n, n) de coefficients :

$$a_{ij} = \begin{cases} t & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

- Démontrer qu'il existe deux scalaires α et β tels que $A^2 = \alpha I_n + \beta A$, et exprimer ces scalaires en fonction de t .
- Déterminer pour quelles valeurs de t la matrice A est inversible, et calculer alors A^{-1} .

- a. On calcule A^2 . On remarque que tous ces coefficients diagonaux sont égaux à $t^2 + n - 1$ et tous ces coefficients non diagonaux sont égaux à $2t + n - 2$.

Ainsi la matrice $A^2 - (2t + n - 2)A$ est diagonale, et on calcule que ses coefficients diagonaux sont égaux à $-t^2 - (n - 1)t + n - 1$.

On en déduit : $A^2 = \alpha I_n + \beta A$ avec $\alpha = -t^2 - (n - 2)t + n - 1$ et $\beta = 2t + n - 2$.

- b. On factorise : $\alpha = -(t - 1)(t + n - 1)$

Si α est non-nul, c'est-à-dire si t est différent de 1 et de $-(n - 1)$, alors on peut écrire :

$$\frac{1}{\alpha}(A - \beta I_n)A = I_n$$

Comme les matrices sont carrées, par théorème ceci montre que A est inversible, d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{\alpha}(A - \beta I_n)$.

Si α est nul, c'est-à-dire si $t = 1$ ou $t = -(n - 1)$ alors A n'est pas inversible.

On démontre ceci par l'absurde. Si α est nul alors $A^2 = \beta A$. Si A était inversible alors en multipliant par A^{-1} on obtiendrait $A = \beta I_n$, ce qui est faux car A n'est pas diagonale.

Finalement A est inversible si et seulement si t est différent de 1 et de $-(n - 1)$.

16 Déterminer si chacune des matrices suivantes est inversible, éventuellement en discutant selon son paramètre, et inverser celles qui sont inversibles.

$$\begin{array}{lll}
 A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} & A_3 = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \\
 A_4 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} & A_5 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} & A_6 = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\
 A_7 = \begin{pmatrix} 2\lambda + 1 & \lambda + 1 \\ 2\lambda + 2 & \lambda + 2 \end{pmatrix} & A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & A_9 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 A_{10} = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ i & 1 & i \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix} & A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix} & A_{12} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 A_{13} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} & A_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & \lambda \end{pmatrix} & A_{15} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & -5 & 7 \end{pmatrix} \\
 A_{16} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & a & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} & A_{17} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 5 & 8 & -2 \\ -3 & -1 & 6 \end{pmatrix} & A_{18} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \\ \lambda & \lambda^2 & 1 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda \end{pmatrix}
 \end{array}$$

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad A_2^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \quad A_3^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \quad A_4^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$$

$$A_5 \text{ est inversible ssi } \lambda \neq \pm i \text{ et } A_5^{-1} = \frac{1}{1 + \lambda^2} \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \quad A_6^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$A_7 \text{ est inversible ssi } \lambda \neq 0 \text{ et } A_7^{-1} = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} \lambda + 2 & -\lambda - 2 \\ -2\lambda - 2 & 2\lambda + 1 \end{pmatrix} \quad A_8^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_9^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_{10}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -i & 2 \\ -i & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad A_{11}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{12}^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -5 \\ 8 & -12 & 3 \end{pmatrix} \quad A_{13}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -5 & -4 & 16 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A_{14} \text{ est inversible ssi } \lambda \neq -1 \text{ et } A_{14}^{-1} = \frac{1}{10(\lambda + 1)} \begin{pmatrix} \lambda + 4 & 2\lambda - 2 & 5 \\ 5\lambda + 8 & -4 & 5 \\ 6 & -8 & 10 \end{pmatrix}$$

A_{15} n'est pas inversible.

$$A_{16}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} - a & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ a & -1 & -a \end{pmatrix} \quad A_{17}^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 46 & -44 & -30 \\ -24 & 24 & 16 \\ 19 & -18 & -11 \end{pmatrix}$$

$$A_{18} \text{ est inversible ssi } \lambda \notin \mathbb{U}_3 \text{ et } A_{18}^{-1} = \frac{1}{1 - \lambda^3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

17 Démontrer qu'une matrice antisymétrique de taille $(3, 3)$ n'est pas inversible.

Soit A une matrice antisymétrique de taille $(3, 3)$. Ceci signifie qu'il existe trois réels a, b, c tels que :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Si a est nul alors :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -b & -c & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Cette matrice admet au plus deux pivots donc elle n'est pas inversible.

Si maintenant $a \neq 0$ alors par opérations élémentaires :

$$A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -a & 0 & c \\ 0 & a & b \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{c}{a} \\ 0 & 1 & \frac{b}{a} \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{c}{a} \\ 0 & 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & -c & -\frac{bc}{a} \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{c}{a} \\ 0 & 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice n'admet que deux pivots donc elle n'est pas inversible.

Finalement dans tous les cas A n'est pas inversible.

19 Résoudre les systèmes suivants.

$$S_1 : \begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ x + 2y - 3z = 1 \end{cases} \quad S_2 : \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

$$S_3 : \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x + 2y + 3z + 4t = 5 \\ x + 3y + 6z + 10t = 15 \\ x + 4y + 10z + 19t = 31 \end{cases} \quad S_4 : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

Les réponses sont :

$$S_1 = \emptyset \quad S_2 = \{(8 - 3y - t, y, 2 - 2t, t, -3) \mid (y, t) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$S_3 = \{(3 - t, -8 + 3t, 6 - 3t, t) \mid t \in \mathbb{R}\} \quad S_4 = \text{Vect}((1, 0, 0, 5, 4))$$

20 Résoudre les systèmes suivants, éventuellement en discutant selon la valeur des paramètres a, b, λ .

$$S_1 : \begin{cases} \lambda x - y + 2z = \lambda^2 - 3 \\ 3x + 2y + \lambda z = 4\lambda \\ 2x + z = 2\lambda + 1 \end{cases} \quad S_2 : \begin{cases} x + 2ay + z = 3 \\ y + az = 2 \\ x - z = -1 \end{cases}$$

$$S_3 : \begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 2x + y + z = -1 \\ x + 2y + az = b \end{cases}$$

$$S_1 = \{(\lambda + 2, 2\lambda - 3, -3)\}$$

$$S_2 = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{a+1}(1-a, 2, 2) \right\} & \text{si } a \neq \pm 1 \\ \emptyset & \text{si } a = -1 \\ \{(-1+t, 2-t, t) \mid t \in \mathbb{R}\} & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

$$S_3 = \begin{cases} \left\{ \left(\frac{-b-2}{a+1}, \frac{-a+b+1}{a+1}, \frac{b+2}{a+1} \right) \right\} & \text{si } a \neq -1 \\ \emptyset & \text{si } a = -1 \text{ et } b \neq -2 \\ \{(-t, t-1, t) \mid t \in \mathbb{R}\} & \text{sinon} \end{cases}$$

21 Soit n un entier naturel non-nul et a un complexe. On note S_a le système :

$$\begin{cases} x_1 - ax_2 = 1 \\ x_2 - ax_3 = 1 \\ \vdots \\ x_{n-1} - ax_n = 1 \\ x_n - ax_1 = 1 \end{cases}$$

- À quelle condition ce système est-il de Cramer ?
- Résoudre le système dans ce cas.
- Dans le cas où le système n'est pas de Cramer, résoudre le système homogène associé, puis compléter la résolution.

- a. On applique les opérations élémentaires $(L_n \leftarrow L_n + a^k L_k)$ pour k allant de 1 à $n-1$, ce qui revient à l'opération :

$$(L_n \leftarrow L_n + \sum_{k=1}^{n-1} a^k L_k)$$

Elle donne $L_n : (1 - a^n)x_n = \sum_{k=0}^{n-1} a^k$, et le système obtenu est triangulaire.

Ce système est de Cramer si et seulement si il admet n pivots, donc si et seulement si $a \notin \mathbb{U}_n$.

- b. Supposons que $a \notin \mathbb{U}_n$. Alors $a \neq 1$ donc la dernière ligne est $L_n : (1 - a^n)x_n = \frac{a^n - 1}{a - 1}$.

On en déduit $x_n = \frac{1}{1-a}$, puis on obtient $x_{n-1} = \frac{1}{1-a}$, etc.

Finalement la solution est $\frac{1}{1-a}(1, \dots, 1)$, ce qui est vite vérifié.

c. Supposons que $a \in U_n$.

Les solutions du système homogène associé sont les $\lambda(a^{n-1}, a^{n-2}, \dots, a, 1)$ où $\lambda \in \mathbb{C}$.

Si $a = 1$ la dernière ligne est $L_n : 0 = n$. Le système n'admet pas de solution.

Si $a \in U_n \setminus \{1\}$ alors la dernière ligne est $L_n : 0 = 0$, donc le système admet une infinité de solutions.

On remarque $\frac{1}{1-a}(1, \dots, 1)$ est solution particulière, donc l'ensemble des solutions est :

$$\left\{ \frac{1}{1-a}(1, \dots, 1) + \lambda(a^{n-1}, a^{n-2}, \dots, a, 1) \mid \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$

22 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et A la matrice de taille (n, n) dont les coefficients sont définis par :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i + 1 \\ 1 & \text{si } (i, j) = (n, 1) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $B = I_n - A$.

a. Démontrer que B n'est pas inversible.

b. Démontrer que A est inversible et donner son inverse.

On résout facilement cet exercice grâce aux systèmes linéaires.

On note X et Y les vecteurs colonnes à n lignes dont les coefficients sont respectivement x_1, \dots, x_n et y_1, \dots, y_n .

a. Le système $BX = 0$ équivaut au système $AX = X$, qui donne $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Donc le vecteur $X = (1 \dots 1)$ est solution du système $BX = 0$.

Celui-ci admet plus d'une solution donc il n'est pas de Cramer, et la matrice B n'est pas inversible.

On aurait pu aussi ajouter toutes les lignes de la matrice B , ce qui montre qu'elle n'admet pas n pivots.

b. On remarque que : $AX = Y \iff X = {}^tAY$

Donc A est inversible d'inverse $A^{-1} = {}^tA$.

23 Soit A une matrice carrée de taille (n, n) .

On suppose que A est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$.

a. Justifier que A n'est pas inversible.

b. Démontrer que $I_n - A$ est inversible et donner son inverse.

a. On raisonne par l'absurde. Si A est inversible alors A^p est inversible, d'inverse $A^{-p} = (A^{-1})^p$. Mais alors $A^p \times A^{-p} = I_n$. Or $A^p = 0_n$ donc ceci est absurde.

Donc A n'est pas inversible.

b. Comme $A^p = 0_n$ alors $I_n - A^p = I_n$. Or :

$$I_n - A^p = I_n^p - A^p = (I_n - A) \sum_{k=0}^{p-1} A^k.$$

La matrice $I_n - A$ est carrée, donc ceci montre que la matrice $I_n - A$ est inversible,

d'inverse $(I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} A^k$.

24 Soit A et B deux matrices de taille (n, n) telles que $AB = A + I_n$.
Démontrer que A et B commutent.

La matrice A est carrée et $A(B - I_n) = I_n$ donc A est inversible, d'inverse $B - I_n$.
Alors $(B - I_n)A = I_n$ donc $BA = A + I_n = AB$.

25 Cet exercice nécessite la connaissance des suites double-récurrentes linéaires.
Soit A une matrice carrée inversible de taille (n, n) satisfaisant $A + A^{-1} = I_n$.
Calculer $A^p + A^{-p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

En développant $(A + A^{-1})^2$ on montre que $A^2 + A^{-2} = -I_n$.

De même on montre que $A^3 + A^{-3} = -2I_n$.

On démontre par récurrence qu'il existe une suite $(a_p)_{p \in \mathbb{N}}$ telle que $A^p + A^{-p} = a_p I_n$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

On obtient $a_0 = 2$, $a_1 = 1$, puis $a_{p+1} = a_p - a_{p-1}$.

On reconnaît une suite double-réurrence. On obtient $a_p = \alpha e^{i\frac{p\pi}{3}} + \beta e^{-i\frac{p\pi}{3}}$ avec $\alpha = \beta = 1$,
puis $a_p = 2 \cos \frac{p\pi}{3}$.

Finalement : $\forall p \in \mathbb{N} \quad A^p + A^{-p} = 2 \cos \frac{p\pi}{3} I_n$

Un exemple de telle matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.