Corrigé partiel du T. D. A7
Suites

$\boxed{1}$ Déterminer les termes généraux des suites définies par :

a. $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = 2u_n - 8$

b. $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 2$

c. $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = 3 - u_n$

a. $u_n = 8 - 2^{n+2}$ b. $u_n = 4(2^{-n} - 1)$ c. $u_n = \frac{1}{2}(3 + (-1)^n)$

$\boxed{2}$ Déterminer les termes généraux des suites définies par :

a. $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n$

b. $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$

c. $u_0 = 2$, $u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 24u_n$

d. $u_0 = 1$, $u_1 = -4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+2} = -6u_{n+1} - 9u_n$

e. $u_0 = 2$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$

f. $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+2} = \sqrt{3}u_{n+1} - u_n$

Donner une forme réelle de la suite (e.), et démontrer que la suite (f.) est périodique.

a. $u_n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$

b. $u_n = n$

c. $u_n = \frac{1}{10}(7.6^n + 13(-4)^n)$

d. $u_n = \left(1 + \frac{n}{3}\right)(-3)^n = -(n+3)(-3)^{n-1}$

e. $u_n = (1+i)^{(n+1)} + (1-i)^{(n+1)} = \sqrt{2}^{(n+3)} \cos \frac{(n+1)\pi}{4}$

f. $u_n = \alpha e^{i\frac{\pi}{6}} + \beta e^{-i\frac{\pi}{6}}$ avec $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}(2 - \sqrt{3})$ et $\beta = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}(2 - \sqrt{3})$

ou $u_n = \cos \frac{n\pi}{6} + (2 - \sqrt{3}) \sin \frac{n\pi}{6}$

Cette suite est 12-périodique.

3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$u_n = \left(\tfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^n + \left(\tfrac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^n$$

a. Trouver une relation de récurrence double vérifiée par la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b. Démontrer que tous les u_n sont entiers.

0n calcule que $u_0 = 2$ et $u_1 = 1$.

On démontre que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 3u_n$

En effet, si une suite vérifie une telle relation de double-récurrence alors il existe deux réels α et β tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^n.$$

Si $u_0 = 2$ et $u_1 = 1$ alors on obtient bien $\alpha = \beta = 1$, donc il s'agit de la suite (u_n).

Par récurrence double on démontre que la suite (u_n) est entière.

4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 > 0$, $u_1 > 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}}$$

Démontrer que cette suite converge et exprimer sa limite en fonction de u_0 et u_1.

Par récurrence double la suite (u_n) est strictement positive.

On pose $v_n = \ln u_n$.

Alors $v_{n+2} = \frac{1}{2}(v_n + v_{n+1})$. On démontre qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n = \alpha + \beta\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

On obtient $\quad \alpha = \frac{1}{3}(\ln u_0 + 2\ln u_1) \quad$ et $\quad \beta = \frac{2}{3}(\ln u_0 - \ln u_1)$.

On en déduit : $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \sqrt[3]{u_0 u_1^2}\left(\dfrac{u_0}{u_1}\right)^{\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$

Cette suite converge vers $\sqrt[3]{u_0 u_1^2}$.

$\boxed{5}$ Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_0 = 0$, $v_0 = 12$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \end{cases}$$

a. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

b. Calculer leur limite.

On démontre :

- $\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{6}(v_n - u_n)$
  La suite $(v_n - u_n)$ est géométrique, donc : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad v_n - u_n = \frac{12}{6^n}$.
  Cette suite converge vers 0.
- $\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(v_n - u_n) = \frac{6}{6^n} > 0$
  Donc la suite (u_n) est croissante.
- $\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{3}(v_n - u_n) = -\frac{4}{6^n} < 0$
  Donc la suite (v_n) est décroissante.

Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, et donc par théorème elles convergente vers la même limite.

Pour calculer cette limite on peut remarquer que u_n est la somme des termes d'une suite géométrique. En effet par télescopage :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{6}{6^k} = \frac{36}{5}\left(1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n\right)$$

Les suites (u_n) et (v_n) convergent vers $\frac{36}{5}$.

$\boxed{7}$ Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles vérifiant pour tout entier n :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n - 2v_n) + 2 \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n) - 2 \end{cases}$$

Étudier la convergence des suites (u_n) et (v_n).

On définit : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad z_n = u_n + iv_n$.

On obtient alors : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad z_{n+1} = \frac{1+2i}{3}z_n + 2 - 2i$

Cette suite est arithmético-géométrique.

On calcule son terme général : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad z_n = 3 + (z_0 - 3)\left(\frac{1+2i}{3}\right)^n$

Comme $\left|\frac{1+2i}{3}\right| < 1$ alors la suite (z_n) converge vers 3.

Donc les suites (u_n) et (v_n) convergent respectivement vers 3 et 0.

$\boxed{8}$ Soit q un nombre complexe de module 1.

Démontrer que la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $q = 1$.

On peut écrire $|u_{n+1} - u_n| = |q - 1|$.

11 Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ croissante, et :

$$A = \{x \in [0,1] \mid f(x) \geqslant x\}.$$

a. Démontrer que A possède une borne supérieure.

b. Soit s la borne supérieure de A. Démontrer que s est un point fixe de f, *i.e.*, que $f(s) = s$.

a. A est majorée par 1, non-vide car elle contient 0, donc elle possède une borne supérieure.

b. Si $x \in A$ alors $x \leqslant s$, donc par croissance $f(x) \leqslant f(s)$.
Or $x \leqslant f(x)$ car $x \in A$, donc $x \leqslant f(s)$.
Ceci montre que $f(s)$ est un majorant de A, et donc $s \leqslant f(s)$.
Si on suppose que $s < f(s)$, alors il existe $t \in [0,1]$ tel que $s < t < f(s)$.
Mais alors par croissance $f(s) \leqslant f(t)$, donc $t \leqslant f(t)$, puis $t \in A$.
Ceci contredit le fait que s est un majorant de A, et donc $s = f(s)$.

12 Soit (u_n) une suite et ℓ un réel. Que signifient, ou qu'impliquent les propositions suivantes ?

a. $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$

b. $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$

c. $\exists \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$

d. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$

e. $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$

f. $\forall N \in \mathbb{N} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$

g. $\exists N \in \mathbb{N} \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$

h. $\forall N \in \mathbb{N} \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$

a. (u_n) est constante égale à ℓ.

b. (u_n) est bornée.

c. (u_n) est bornée.

d. (u_n) converge vers ℓ.

e. (u_n) est stationnaire en ℓ.

f. (u_n) est constante égale à ℓ.

g. (u_n) est bornée.

h. (u_n) est bornée.

13 Soit (u_n) une suite réelle. Traduire les assertions suivantes à l'aide de quantificateurs :

a. La suite (u_n) est bornée.

b. La suite (u_n) est stationnaire.

c. La suite (u_n) n'est pas croissante.

d. La suite (u_n) n'est croissante à partir d'aucun rang.

e. La suite (u_n) ne converge pas vers 0.

a. $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leqslant M$

b. $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant N \Longrightarrow u_n = u_{n+1}$

c. $\exists n \in \mathbb{N} \quad u_n > u_{n+1}$

d. $\forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \quad \text{et} \quad u_n > u_{n+1})$

e. $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant N$ et $|u_n| > \varepsilon$

14 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive.

a. On suppose qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positives convergeant vers 0 telles que :

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \qquad u_{n+p} \leqslant a_p u_n + b_n$$

Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

b. On suppose qu'il existe un réel K strictement supérieur à 1 et une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive convergeant vers 0 tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} \leqslant \frac{u_n + \varepsilon_n}{K}$$

Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

a. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$: $\quad b_n \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
Puis il existe $P \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geqslant P$: $\quad a_p u_N \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
On en déduit que pour tout $n \geqslant N + P$: $\quad u_n \leqslant \varepsilon$.

b. On démontre par récurrence que :

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^* \qquad u_{n+p} \leqslant \frac{u_n}{K^p} + \frac{1}{K^p}\sum_{i=0}^{p-1} K^i \varepsilon_{n+i} \leqslant \frac{u_n}{K^p} + \frac{1}{K-1}\operatorname*{Sup}_{j\geqslant n} \varepsilon_j$$

On applique le résultat de la question précédente avec $a_n = \frac{1}{K^n}$ et $b_n = \frac{1}{K-1}\operatorname*{Sup}_{j\geqslant n} \varepsilon_j$.

Le fait que cette dernière suite converge vers 0 est conséquence de la définition de la convergence.

16 Étudier les limites des suites suivantes.

a. $u_n = \sqrt{(n+a)(n+b)} - n \quad (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ b. $u_n = e^{4n}\operatorname{ch}(n) - e^{3n}\operatorname{sh}(2n)$

c. $u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\ln n}}$ d. $u_n = \sqrt[n]{3+\cos n}$ e. $u_n = \left\lfloor \frac{(n-1)^2}{n^2-3} \right\rfloor$ f. $u_n = \sin n \, \sin \frac{1}{n}$

g. $u_n = \frac{n-\sqrt{n^2+1}}{n-\sqrt{n^2-1}}$ h. $u_n = \sqrt[n]{2^n - 1}$ i. $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{k+n^2}$ j. $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k+n}{k^2+n^3}$

k. $u_n = \cos\left(\pi\sqrt{n}\right)$ l. $u_n = e^{2i\pi\sqrt{n^2+1}}$

a. (u_n) converge vers $\frac{a+b}{2}$.

b. (u_n) tend vers $-\infty$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$:

$$u_n = e^{\frac{1}{\ln n}\ln\frac{1}{n}} = e^{-\frac{\ln n}{\ln n}} = e^{-1}$$

La suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est donc constante égale à $\frac{1}{e}$.

d. En utilisant le théorème d'encadrement : (u_n) converge vers 1.

e. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{(n-1)^2}{n^2-3} = \frac{n^2-2n+1}{n^2-3} = \frac{n^2-3-2n+4}{n^2-3} = 1 - \frac{2n-4}{n^2-3}$$

On démontre que : $\forall n > 2 \quad 0 < \frac{2n-4}{n^2-3} < 1$

En effet, d'une part si $n > 2$ alors $2n-4 > 0$ et $n^2-3 > 1$ donc $\frac{2n-4}{n^2-3} > 0$.

D'autre part, par équivalence : $\frac{2n-4}{n^2-3} < 1 \iff (n-1)^2 > 0$, cette dernière inégalité est vraie pour tout $n > 2$.

Ainsi pour tout $n > 2$: $0 < \frac{2n-4}{n^2-3} < 1$ donc $0 < 1 - \frac{2n-4}{n^2-3} < 1$ puis :

$$u_n = \left\lfloor 1 - \frac{2n-4}{n^2-3} \right\rfloor = 0$$

La suite (u_n) est stationnaire en 0.

Plus précisément ses premières valeurs sont $(-1, 0, 1, 0, 0, \ldots)$.

f. La fonction sinus est bornée par les réels -1 et 1 donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad -\left|\sin\frac{1}{n}\right| \leqslant \sin n \, \sin\frac{1}{n} \leqslant \left|\sin\frac{1}{n}\right|$$

La suite $(\sin\frac{1}{n})$ converge vers 0 donc par théorème d'encadrement la suite (u_n) converge vers 0.

g. On utilise les quantités conjuguées :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \frac{n-\sqrt{n^2+1}}{n-\sqrt{n^2-1}} = \frac{-1}{1} \times \frac{n+\sqrt{n^2-1}}{n+\sqrt{n^2+1}} = -\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

Ceci montre que la suite (u_n) converge vers -1.

h. Pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$u_n = \sqrt[n]{2^n\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)} = 2\sqrt[n]{1 - \frac{1}{2^n}} = 2e^{\frac{1}{n}\ln\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}$$

Par opérations sur les limites la suite (u_n) converge vers 2.

i. En utilisant le théorème d'encadrement on démontre que la suite (u_n) converge vers 1. Voir la question suivante pour la méthode.

j. On encadre les termes de la somme u_n, en fixant un entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall k = 1, \ldots, n \qquad n < k + n \leqslant 2n \qquad \text{et} \qquad n^3 < k^2 + n^3 \leqslant n^2 + n^3$$

Ceci donne :

$$\forall k = 1, \ldots, n \qquad n < k + n \leqslant 2n \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{n^3 + n^2} \leqslant \frac{1}{k^2 + n^3} < \frac{1}{n^3}$$

Par produit, tous les termes étant positifs :

$$\forall k = 1, \ldots, n \qquad \frac{n}{n^3 + n^2} < \frac{k+n}{k^2 + n^3} \leqslant \frac{2n}{n^3}$$

Par somme :

$$\frac{n^2}{n^3 + n^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k+n}{k^2 + n^3} \leqslant \frac{2n^2}{n^3}$$

Cette relation est valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Elle se simplifie en :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{2}{n}$$

Comme les suites $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ et $\left(\frac{2}{n}\right)$ convergent vers 0 alors par théorème d'encadrement la suite (u_n) converge vers 0.

k. La suite extraite (u_{n^2}) vérifie : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n^2} = \cos(\pi n) = (-1)^n$

Cette suite extraite diverge. Or toute suite extraite d'une suite convergente converge, donc la suite (u_n) diverge.

l. En divisant u_n par $e^{i2\pi n} = 1$ et en utilisant une quantité conjuguée on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \frac{e^{i2\pi\sqrt{n^2+1}}}{e^{i2\pi n}} = e^{i2\pi\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)} = e^{i2\pi\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}}$$

Ceci montre que la suite (u_n) converge vers 1.

18 On définit la suite (u_n) en posant $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 1 + \frac{6}{un}$.
On pose $f(x) = 1 + \frac{6}{x}$.

a. Justifier que l'intervalle $I = [u_0, u_1]$ est stable par f, et en déduire que la suite (u_n) est bien définie et bornée.
b. Décrire les variations de la suite (u_n).
c. Décrire les variations de $g = f \circ f$.
En déduire que les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes.
d. Démontrer que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

a. La fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
On calcule $u_1 = 7$, puis $f(u_1) = \frac{13}{7}$. Comme la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in [1,7] \qquad 1 \leqslant x \leqslant 7 \quad &\Longrightarrow \quad f(7) \leqslant f(x) \leqslant f(1) \quad &&\Longrightarrow \quad \tfrac{13}{7} \leqslant f(x) \leqslant 7 \\ &\Longrightarrow \quad 1 \leqslant f(x) \leqslant 7 &&\Longrightarrow \quad f(x) \in [1,7] \end{aligned}$$

Ceci montre que l'intervalle $I = [1, 7]$ est stable par f.
Comme il contient u_0 alors la suite (u_n) est bien définie et incluse dans I.

b. L'implication

$$u_n \leqslant u_{n+1} \Longrightarrow u_{n+1} \geqslant u_{n+2}$$

montre que la suite (u_n) n'est pas monotone, même à partir d'un certain rang.

c. Comme f est décroissante sur tout intervalle alors $g = f \circ f$ est croissante sur tout intervalle.
On peut aussi calculer $g(x) = \frac{7x+6}{x+6}$ puis $g'(x) = \left(\frac{6}{6+x}\right)^2$.
Les suites extraites $(v_n) = (u_{2n})$ et $(w_n) = (u_{2n+1})$ vérifient la relation $v_{n+1} = g(v_n)$ et $w_{n+1} = g(w_n)$ avec g croissante, donc elles sont monotones.
Elles sont bornées car la suite (u_n) est bornée donc par théorème elles convergent.

d. Par théorème, comme g est continue alors les limites de (v_n) et (w_n) vérifient l'équation $g(x) = x$.
Les solutions de cette équation sont 3 et -2. Or les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 1 \leqslant u_{2n} \leqslant 7 \qquad \text{et} \qquad 1 \leqslant u_{2n+1} \leqslant 7$$

Par théorème d'encadrement leurs limites sont dans cet intervalle, donc elle ne peuvent valoir -2.
Ainsi les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers 3 et donc par théorème la suite (u_n) converge vers 3.

19 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par une valeur $u_0 \geqslant 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + 7u_n}{2}} - 1$$

a. Étudier sur $\mathbb{R}_+$ les fonctions $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x^2+7x}{2}} - 1$ et $g : x \mapsto f(x) - x$.

b. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

c. Que peut-on dire si $u_0 \in [0, 1[$?

a. On obtient $f'(x) = \frac{2x+7}{2\sqrt{2(x^2+7x)}}$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

On démontre ensuite que la fonction g est croissante sur $[0, \alpha]$ et décroissante sur $[\alpha, +\infty]$ avec $\alpha = \frac{7}{2}(\sqrt{2} - 1) \in]1, 2[$.

On remarque que $g(1) = g(2) = 0$, donc g est positive sur $[1, 2]$, négative ailleurs.

b. Les variations de f montrent que les intervalles $[1, 2]$ et $[2, +\infty[$ sont stables par f.

Le signe de g montre que si $u_0 \in]1, 2[$ alors la suite est croissante, et si $u_0 \in]2, +\infty[$ alors la suite est décroissante.

Dans les deux cas elle converge d'après le théorème de la limite monotone.

On démontre que sa limite est 2 dans les deux cas.

c. La suite (u_n) n'existe pas si $u_0 \in [0, 1[$.

En effet le signe de g montre qu'elle serait décroissante, minorée par 0, donc convergente. Or elle majorée par u_0 et sa limite ne peut prendre d'autre valeur.

Ceci signifie que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n < 0$ donc $f(u_n)$ n'est pas défini.

20 Donner une suite la plus simple possible équivalente à chacune des suites suivantes.

a. $u_n = e^{\frac{1}{n}} - 1$	b. $u_n = e^{\frac{1}{n}}$	c. $u_n = \operatorname{ch} n$
d. $u_n = \ln(n + 7) - \ln(n + 3)$	e. $u_n = n \sin\left(\frac{\sqrt{n}}{(n+2)^2}\right)$	f. $u_n = \ln(2n^2 + 5)$
g. $u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$	h. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$	i. $u_n = \sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}$
j. $u_n = \tan(\arcsin \frac{n}{n+1})$	k. $u_n = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right)$	l. $u_n = \binom{n+k}{k}$, $k \in \mathbb{N}$

a. $\mathrm{u_n} \sim \frac{1}{\mathrm{n}}$ b. $\mathrm{u_n} \sim 1$ c. $\mathrm{u_n} = \frac{\mathrm{e^n}}{2}$ d. $\mathrm{u_n} = \frac{4}{\mathrm{n}}$ e. $\mathrm{u_n} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{n}}}$

f. On écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \ln\left(2n^2\left(1 + \frac{5}{2n^2}\right)\right) = \ln 2 + 2\ln n + \ln\left(1 + \frac{5}{2n^2}\right)$$

Comme $\ln 2 = o(\ln n)$ et $\ln\left(1 + \frac{5}{2n^2}\right) = o(\ln n)$ alors : $\boxed{u_n \sim 2\ln n}$

g. $u_n = e^{\frac{\ln}{n}} - 1$ et par croissances comparées $\frac{\ln n}{n} \longrightarrow 0$, donc : $\boxed{u_n \sim \dfrac{\ln n}{n}}$

h. Par quantité conjuguée :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$$

On calcule la limite de $\sqrt{n}\,u_n$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \sqrt{n}\,u_n = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$$

Comme $\lim \sqrt{n}\,u_n = 1$ alors : $\boxed{u_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}}$

i. On factorise :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \sqrt[n]{2}\left(\sqrt[n]{\frac{3}{2}}-1\right) = \sqrt[n]{2}\left(e^{\frac{1}{n}\ln\frac{3}{2}}-1\right)$$

Comme $\left(\sqrt[n]{2}\right)$ converge vers 1 et $\left(\frac{1}{n}\ln\frac{3}{2}\right)$ converge vers 0 alors :

$$u_n \sim 1 \times \frac{1}{n}\ln\frac{3}{2}$$

On en déduit donc : $\boxed{u_n \sim \dfrac{1}{n}\ln\dfrac{3}{2}}$

j. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{\sin\left(\arcsin\frac{n}{n+1}\right)}{\cos\left(\arcsin\frac{n}{n+1}\right)} = \frac{\frac{n}{n+1}}{\sqrt{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^2}} = \frac{n}{\sqrt{2n+1}}$$

On en déduit $u_n \sim \frac{n}{\sqrt{2n}}$ et donc : $\boxed{u_n \sim \sqrt{\dfrac{n}{2}}}$

k. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Comme $\frac{1}{n} \to 0$ alors $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \sim 1$ et par équivalence usuelle : $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$

On en déduit $u_n \sim \frac{1}{\frac{1}{n}}$ et donc : $\boxed{u_n \sim n}$

On peut vérifier à l'aide de la calculatrice que pour de grandes valeurs de n les termes u_n sont proches de n.

l. L'entier k est fixé, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \frac{(n+k)!}{n!k!} = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(n-i) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1} n$$

On en déduit : $\boxed{u_n \sim \dfrac{n^k}{k!}}$

21 Étudier les limites des suites suivantes.

a. $u_n = \frac{a}{n}\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor$ $\quad v_n = \frac{n}{a}\left\lfloor \frac{b}{n} \right\rfloor$ $\quad$ où $\quad (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ $\qquad$ b. $u_n = 4^{2n} - 5^n n^4$

c. $u_n = \frac{3^n - e^n}{\operatorname{ch} n}$ $\qquad$ d. $u_n = n^{\frac{\sin n}{n}}$ $\qquad$ e. $u_n = \frac{n^n}{2^{2^n}}$ $\qquad$ f. $u_n = \sqrt[3]{n^3+n^2} - n$

g. $u_n = \frac{n!}{\pi^n \ln n}$ $\qquad$ h. $u_n = \left(\frac{n^2+2n+3}{n^2-3n+5}\right)^{\frac{n^2+4}{2n-1}}$ $\qquad$ i. $u_n = \left(1 + i\frac{\pi}{n}\right)^n$

a. Par encadrement on démontre que la suite (u_n) converge vers $\frac{a}{b}$.
Pour tout $n > b$ on a $v_n = 0$, donc la suite (v_n) converge vers 0, et en fait elle est stationnaire.

b. En utilisant les croissances comparées on démontre que $5^n n^4 = o(4^{2n})$, donc $u_n \sim 4^{2n}$ et (u_n) tend vers $+\infty$.

c. On écrit : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2\dfrac{3^n - e^n}{e^n - e^{-n}} \sim 2\dfrac{3^n}{e^n} \quad$ ceci car $e < 3$.
On en déduit $u_n \sim 2\left(\frac{3}{e}\right)^n$, et comme $e < 3$ alors $\frac{3}{e} > 1$ donc (u_n) tend vers $+\infty$.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n = e^{\frac{\sin n \ln n}{n}}$
Comme tout sinus est dans l'intervalle $[-1, 1]$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad -\frac{\ln n}{n} \leqslant \frac{\sin n \ln n}{n} \leqslant \frac{\ln n}{n}$$

Par croissances comparées la suite $\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ converge vers 0 et donc par théorème d'encadrement la suite $\left(\frac{\sin n \ln n}{n}\right)$ converge vers 0.
Par composition de limites, la fonction exponentielle étant continue la suite (u_n) converge vers $e^0 = 1$.

e. On écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \frac{n^n}{2^{2^n}} = e^{n \ln n - 2^n \ln 2}$$

Par croissances comparées $\ln n = o(n)$ donc $n \ln n = o(n^2)$, puis $n^2 = o(2^n)$ donc par transitivité $n \ln n = o(2^n \ln 2)$, et ainsi $(n \ln n - 2^n \ln 2) \sim -2^n \ln 2$. Cette suite tend donc vers $-\infty$, et la suite (u_n) tend vers 0.
On a démontré que la suite (n^n) est négligeable devant la suite $\left(2^{2^n}\right)$.

f. Comme $\sqrt[3]{n^3} = n$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \sqrt[3]{n^3\left(1 + \frac{1}{n}\right)} - n = n\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} - 1\right) = n\left(e^{\frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1\right)$$

La suite $\left(\frac{1}{3}\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$ converge vers 0 donc par équivalence usuelle :

$$e^{\frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1 \sim \frac{1}{3}\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

La suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge vers 0 donc par équivalence usuelle : $\quad \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$

Par composition et produit d'équivalences :

$$u_n \sim n\Big(\frac{1}{3}\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\Big) \sim n\Big(\frac{1}{3n}\Big) = \frac{1}{3}$$

Ceci montre que la suite (u_n) converge vers $\frac{1}{3}$.

g. Par croissances comparées : $\ln n = o(n)$ et $n = o(2^n)$
Par transitivité : $\ln n = o(2^n)$
Par produit : $\pi^n \ln n = o(\pi^n 2^n)$ *i.e.,* $\pi^n \ln n = o((2\pi)^n)$
Par croissances comparées : $(2\pi)^n = o(n!)$
Par transitivité : $\pi^n \ln n = o(n!)$
Ainsi la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

h. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ posons $a_n = \frac{n^2+2n+3}{n^2-3n+5}$ et $b_n = \frac{n^2+4}{2n-1}$, si bien que $u_n = a_n^{b_n} = e^{b_n \ln a_n}$.
Comme $a_n = 1 + \frac{5n-2}{n^2-3n+5}$ et $\left(\frac{5n-2}{n^2-3n+5}\right)$ converge vers 0 alors $\ln a_n \sim \frac{5n-2}{n^2-3n+5} \sim \frac{5}{n}$.
De plus $b_n \sim \frac{n}{2}$ donc $b_n \ln a_n \sim \frac{5}{2}$, ce qui montre que la suite (u_n) converge vers $e^{\frac{5}{2}}$.

i. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ notons $z_n = 1 + i\frac{\pi}{n}$, si bien que $u_n = z_n^n$.
Si θ est un argument de z_n compris entre $-\pi$ et π alors $\tan\theta = \frac{\pi}{n}$, donc $\theta = \arctan\frac{\pi}{n}$.
De plus le module de z_n est $|z_n| = \sqrt{1+\frac{\pi^2}{n^2}}$, donc on peut écrire la forme exponentielle de u_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \left(1+\frac{\pi^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{in\arctan\frac{\pi}{n}}$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = e^{\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{\pi^2}{n^2}\right) + in\arctan\frac{\pi}{n}}$$

Comme $\left(\frac{\pi^2}{n^2}\right)$ converge vers 0 alors : $\ln\left(1+\frac{\pi^2}{n^2}\right) \sim \frac{\pi^2}{n^2}$
Ceci montre que $\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{\pi^2}{n^2}\right) \sim \frac{\pi^2}{2n}$ et donc cette suite tend vers 0.
Ensuite on utilise l'équivalence $\arctan u \underset{(0)}{\sim} u$. En effet, comme la fonction arc-tangente est dérivable en 0 alors :

$$\lim_{u\to 0} \frac{\arctan u - \arctan 0}{u-0} = \arctan'(0) \qquad \text{donc} \qquad \lim_{u\to 0}\frac{\arctan u}{u} = 1$$

Ceci donne $\arctan\frac{\pi}{n} \sim \frac{\pi}{n}$, puis $n\arctan\frac{\pi}{n} \sim \pi$, donc cette suite tend vers π.
Par somme et composition de limites la suite (u_n) converge vers $e^{i\pi} = -1$.

22 Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers un réel a élément de $[0,1[$. Le but de cet exercice est de démontrer que la suite (u_n) converge vers 0.

a. On pose $b = \frac{1+a}{2}$. Justifier qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant p \quad u_{n+1} \leqslant b u_n$

b. Pour tout entier naturel n, donner une majoration de u_{n+p} en fonction de b, n et u_p.

c. Conclure.

Seconde démonstration :

d. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang, puis qu'elle est convergente, et enfin que sa limite ne peut être non-nulle.

Applications :

e. Démontrer que la suite $(n!)$ est négligeable devant la suite (n^n).

f. Démontrer que pour tout réel $\alpha > 1$ la suite (n^n) est négligeable devant la suite $((n!)^\alpha)$.

a. Soit $\varepsilon = b - a$. Alors $\varepsilon = \frac{1-a}{2}$ et comme $a < 1$ alors $\varepsilon > 0$.
La suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers a donc par définition de la convergence il existe un entier p tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant p \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - a\right| \leqslant \varepsilon$$

Ceci donne $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - a \leqslant b - a$ puis $u_{n+1} \leqslant b u_n$ car u_n est positif, par supposition de l'énoncé.
On a donc justifié qu'il existe un entier p tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant p \quad \Longrightarrow \quad u_{n+1} \leqslant b u_n$$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit la propriété :

$$\mathcal{P}_n \qquad u_{n+p} \leqslant b^n u_p$$

On démontre par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
<u>Initialisation.</u> Pour $n = 0$ la propriété est : $u_p \leqslant b^0 u_p$. Elle est valide car $b^0 = 1$.
<u>Hérédité.</u> Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ la propriété est valide.
D'après la question précédente, comme $n + p \geqslant p$ alors

$$u_{n+p+1} \leqslant b u_{n+p}$$

L'hypothèse de récurrence est :

$$u_{n+p} \leqslant b^n u_p$$

On obtient par transitivité :

$$u_{n+p+1} \leqslant b^{n+1} u_p$$

Ceci montre que la propriété est vraie au rang $n+1$, et donc justifie l'hérédité.
<u>Conclusion.</u> Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+p} \leqslant b^n u_p$

c. La suite (u_n) est supposée strictement positive, donc la question précédente donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 < u_{n+p} \leqslant b^n u_p$$

On remarque que $b < 1$. En effet par hypothèse $a < 1$ donc $b = \frac{a+1}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$.
Ceci implique que la suite $(b^n u_p)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
Par théorème d'encadrement la suite $(u_{n+p})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
Par décalage la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

d. La suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a. Comme $a < 1$ alors à partir d'un certain rang $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$.
En effet, si on pose $\varepsilon = 1 - a$ alors $\varepsilon > 0$ donc à partir d'un certain rang :

$$a - \varepsilon \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant a + \varepsilon = 1$$

Comme (u_n) est strictement positive, alors ceci montre qu'à partir d'un certain rang : $u_{n+1} \leqslant u_n$
Or la suite (u_n) est minorée par 0. Elle est décroissante à partir d'un certain rang et minorée par 0 donc par théorème elle converge.
Soit ℓ sa limite.
Comme la suite (u_n) est positive alors par théorème de comparaison $\ell \geqslant 0$. En effet :

$$(\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0) \quad \Longrightarrow \quad \lim u_n \leqslant 0$$

On raisonne par l'absurde en supposant que $\ell > 0$.
Dans ce cas par décalage (u_{n+1}) converge vers ℓ, puis par quotient $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers $\frac{\ell}{\ell} = 1$. Or nous savons que $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers a et que $a < 1$. Cette contradiction montre que $\ell = 0$.
Nous avons donc de nouveau démontré que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

e. Posons $u_n = \frac{n!}{n^n}$. Ceci est défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la suite (u_n) est strictement positive et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{n!} \frac{n^n}{(n+1)^{(n+1)}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$$

Ceci donne

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)}$$

Comme $-\frac{1}{n+1} \to 0$ alors par équivalence usuelle : $\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \sim -\frac{1}{n+1}$
Par produit $n \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \sim -\frac{n}{n+1} \sim -1$. Ceci montre que $\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right)$ converge vers -1 puis la fonction exponentielle étant continue, que $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers e^{-1}.
Comme la suite (u_n) est strictement positive et $e^{-1} \in [0, 1[$, alors on peut appliquer le résultat démontré dans les question précédentes. Il implique que la suite (u_n) converge vers 0.
Ainsi $\frac{n!}{n^n}$ converge vers 0 donc par définition la suite $(n!)$ est négligeable devant la suite (n^n) : $n! = o(n^n)$

f. Soit α un réel tel que $\alpha > 1$. On pose maintenant, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{n^n}{(n!)^\alpha}$
On calcule, toujours pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)^{(n+1)}}{n^n}\frac{(n!)^\alpha}{((n+1)!)^\alpha} = \frac{(n+1)^n}{n^n}(n+1)\left(\frac{1}{(n+1)}\right)^\alpha = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$$

On écrit alors : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$
Comme $\frac{1}{n} \to 0$ alors par équivalence usuelle : $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$
Par produit $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim 1$. La suite $\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$ converge donc vers 1, puis l'exponentielle étant continue : $\left(e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)$ converge vers $e^1 = e$.
La suite $\left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right)$ converge vers 0 car $\alpha - 1 > 0$.
Par produit la suite $\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ converge vers 0.
Ainsi la suite $\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ converge vers un élément de $[0,1[$, la suite (v_n) est strictement positive, donc d'après le résultat démontré dans les premières questions de l'exercice la suite (v_n) converge vers 0.
Ceci montre que la suite (n^n) est négligeable devant la suite $((n!)^\alpha)$: $n^n = o((n!)^\alpha)$

23 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{1+nu_n}$$

a. Démontrer que la suite (u_n) converge.
b. Déterminer sa limite.
c. Démontrer que $u_n = O\left(\frac{1}{(n-1)!}\right)$.

On démontre par quotient que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.
Par récurrence elle est positive, donc minorée par 0.
Par théorème, la suite (u_n) est décroissante minorée par convergente.
Comme la suite (u_n) est minorée par 0 alors par théorème de comparaison sa limite est positive :

$$(\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant 0) \qquad \Longrightarrow \qquad \lim u_n \geqslant 0$$

Notons $\ell = \lim u_n$.
On écrit : $\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_{n+1} = \dfrac{u_n \times \frac{u_n}{n}}{\frac{1}{n}+u_n}$
Supposons que $\ell > 0$. Alors $\frac{u_n}{n} \to 0$ et $\left(\frac{1}{n}+u_n\right) \to \ell$ donc par produit et quotient $u_{n+1} \to 0$. Or par décalage (u_{n+1}) converge aussi vers ℓ. Cette contradiction montre que $\ell = 0$.
Ainsi la suite (u_n) converge vers 0.
On démontre que $u_n = O\left(\frac{1}{(n-1)!}\right)$, en utilisant $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\frac{1}{u_n}+n} \leqslant \frac{1}{n}$.

24 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

a. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$ il existe un unique réel $u_n \in [0, 1]$ tel que $f_n(u_n) = 0$.

b. Démontrer que pour tout $n \geqslant 2$: $\frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{2}{n}$
Que peut-on en déduire pour la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$?

c. Donner un équivalent simple de (u_n).

a. La fonction f_n est dérivable, de dérivée : $f_n'(x) = n(x^{n-1} - 1)$.
Elle est donc strictement décroissante sur l'intervalle $[0, 1]$.
Elle est continue car polynomiale.
De plus $f_n(0) = 1$, $f_n(1) = 2 - n$ donc elle réalise une bijection de $[0, 1]$ dans $[2 - n, 1]$.
Soit $n \geqslant 2$. Alors $2 - n \leqslant 0$, donc $0 \in [2 - n, 1]$, et donc par définition d'une bijection il existe un et un seul $x_n \in [0, 1]$ tel que $f_n(u_n) = 0$.

b. Comme $f_n(u_n) = 0$ alors $(u_n)^n = nu_n - 1$. Or $u_n \in [0, 1]$ donc $(u_n)^n \in [0, 1]$, et donc $nu_n - 1 \in [0, 1]$. Ceci donne $0 \leqslant nu_n - 1 \leqslant 1$, d'où le résultat.
On peut aussi remarquer que $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^n} > 0$ et $f_n(\frac{2}{n}) = \left(\frac{2}{n}\right)^n - 1 < 0$, donc $f_n(\frac{1}{n}) > f_n(u_n) > f_n(\frac{2}{n})$ et comme f_n est strictement décroissante alors $\frac{1}{n} < u_n < \frac{2}{n}$.
On en déduit par encadrement que la suite (u_n) converge vers 0.

c. On peut également écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{1}{n^n} \leqslant u_n^n \leqslant \left(\frac{2}{n}\right)^n = e^{n \ln \frac{2}{n}}$$

Par encadrement la suite $(u_n)^n$ converge vers 0 donc $(nu_n - 1)$ aussi, et ainsi $u_n \sim \frac{1}{n}$.

25 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $f_n(x) = x^n + x - 1$.

a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un unique $u_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f_n(u_n) = 0$.

b. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

c. Déterminer sa limite.

a. La fonction f_n est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ car sa dérivée est $f_n'(x) = nx^{n-1} + 1$.
Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]-1, +\infty[$.
Il existe donc un et un seul réel $u_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f_n(u_n) = 0$.

b. Comme $f_n(u_n)$ alors $u_n^n = 1 - u_n$, puis $f_{n+1}(u_n) = -(1 - u_n)^2$.
Comme f_{n+1} est strictement croissante et $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$ alors $u_n < u_{n+1}$.
La suite (u_n) est donc croissante.
Comme $f_n(n) = 1$ alors u_n est majorée par 1.
Par théorème, la suite (u_n) est croissante majorée donc elle converge.

c. Soit ℓ sa limite. Alors $\ell \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ car $u_1 = \frac{1}{2}$.
Si $\ell < 1$ alors u_n^n tend vers 0, donc u_n tend vers 1. Ainsi u_n tend vers 1.

26 Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une *suite de Cauchy* si :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall (p,q) \in \mathbb{N} \qquad (p \geqslant N \quad \text{et} \quad q \geqslant N) \quad \Longrightarrow \quad |u_p - u_q| \leqslant \varepsilon$$

a. Démontrer que si une suite est convergente alors elle est de Cauchy.

b. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy.

(i) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

(ii) En déduire qu'elle est convergente.

a. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente, et soit ℓ sa limite.
Démontrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
Soit $\varepsilon > 0$. Alors $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ alors :

$$\exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \left(n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad |u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Soit p et q deux entiers. D'après ce qui précède, si $p \geqslant N$ et $q \geqslant N$ alors :

$$|u_p - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{et} \qquad |u_q - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

D'après l'inégalité triangulaire :

$$|(u_p - \ell) - (u_q - \ell)| \leqslant |u_p - \ell| + |u_q - \ell|$$

On en déduit :

$$|u_p - u_q| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

On a démontré que :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall (p,q) \in \mathbb{N} \qquad (p \geqslant N \quad \text{et} \quad q \geqslant N) \quad \Longrightarrow \quad |u_p - u_q| \leqslant \varepsilon$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une suite de Cauchy.

b. *(i)* La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, donc en particulier pour $\varepsilon = 1$, comme $\varepsilon > 0$ alors :

$$\exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall (p,q) \in \mathbb{N} \qquad (p \geqslant N \quad \text{et} \quad q \geqslant N) \quad \Longrightarrow \quad |u_p - u_q| \leqslant 1$$

Si $q = N$ alors $q \geqslant N$ donc :

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathbb{N} \qquad p \geqslant N \quad &\Longrightarrow \quad |u_p - u_N| \leqslant 1 \\ &\Longrightarrow \quad u_N - 1 \leqslant u_p \leqslant u_N + 1 \end{aligned}$$

Tous les termes u_n de la suite pour $n \geqslant N$ sont dans l'intervalle $[u_N - 1, u_N + 1]$, donc ils forment un ensemble borné.
Les termes pour $0 \leqslant n < N$ sont en nombre fini donc ils forment un ensemble borné également.
Finalement la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

(ii) La suite (u_n) est bornée donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass elle admet une suite extraite convergente.

Notons $(u_{\varphi(n)})$ une telle suite, c'est-à-dire que $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante.

Soit ℓ la limite de la suite extraite $(u_{\varphi(n)})$.

Démontrons que la suite (u_n) converge vers ℓ.

Soit $\varepsilon > 0$.

Alors $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Comme la suite (u_n) est une suite de Cauchy alors :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \qquad \forall (p,q) \in \mathbb{N} \qquad (p \geqslant N_1 \quad \text{et} \quad q \geqslant N_1) \quad \Longrightarrow \quad |u_p - u_q| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit n un entier supérieur ou égal à N_1. Comme la fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante alors par propriété $\varphi(n) \geqslant n$, et donc $\varphi(n) \geqslant N_1$.

Comme $n \geqslant N_1$ et $\varphi(n) \geqslant N_1$ alors : $\left|u_n - u_{\varphi(n)}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Comme la suite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers ℓ alors par définition de la convergence il existe un entier N_2 tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N_2 \quad \Longrightarrow \quad \left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit $N_0 = \operatorname{Max}\{N_1, N_2\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant N_0$ alors $n \geqslant N_1$ et $n \geqslant N_2$ donc :

$$\left|u_n - u_{\varphi(n)}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{et} \qquad \left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Par inégalité triangulaire :

$$\left|(u_n - u_{\varphi(n)}) + (u_{\varphi(n)} - \ell)\right| \leqslant \left|u_n - u_{\varphi(n)}\right| + \left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Ceci donne : $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$

Nous avons démontré que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N_0 \quad \Longrightarrow \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Ceci signifie que la suite (u_n) converge vers ℓ.

Ainsi toute suite de Cauchy est convergente.

Finalement les suites de Cauchy sont les suites convergentes.

27 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée.

Démontrer que la suite (u_n) converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Si (u_n) converge alors sa limite ℓ est valeur d'adhérence.

Si a est une autre valeur d'adhérence alors il existe $(u_{\varphi(n)})$ convergeant vers a. Or toutes les suites extraites de (u_n) convergent vers ℓ, donc $\ell = a$.

Réciproquement supposons que la suite (u_n) admet une et une seule valeur d'adhérence, et notons ℓ celle-ci.

On raisonne par l'absurde en supposant que (u_n) ne converge par vers ℓ. Ceci signifie :

$$\exists \varepsilon > 0 \qquad \forall N \in \mathbb{N} \qquad \exists n \in \mathbb{N} \qquad (n \geqslant N \quad \text{et} \quad |u_n - \ell| > \varepsilon)$$

On fixe un tel ε. Il existe alors une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ dont tous les termes sont hors de l'intervalle $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$.

On construit celle-ci par récurrence :

- Pour $N = 0$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $|u_k - \ell| \geqslant \varepsilon$. On note $\varphi(0)$ cet entier k.
- Si $\varphi(n)$ est un entier donné alors il existe $j \geqslant \varphi(n) + 1$ tel que $|u_j - \ell| \geqslant \varepsilon$. On note $\varphi(n+1)$ cet entier j.

La fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, donc $(u_{\varphi(n)})$ est bien une suite extraite.

Cette suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ est bornée car la suite (u_n) est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass elle admet une suite extraite convergente, que l'on note $u_{\varphi\circ\psi(n)}$.

Soit a la limite de cette dernière suite. Comme :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| > \varepsilon$$

alors par théorème de comparaison $|a - \ell| \geqslant \varepsilon$, ce qui montre que $a \neq \ell$.

Or a est limite d'une suite extraite de (u_n), donc a est valeur d'adhérence de (u_n), alors que (u_n) n'a que ℓ pour valeur d'adhérence.

Cette contradiction montre que la suite (u_n) converge vers ℓ.

28 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite non majorée.
Démontrer qu'il existe une suite extraite de (u_n) tendant vers $+\infty$.

On construit par récurrence une suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{\varphi(n)} \geqslant n$
Initialisation. Comme la suite u_n n'est pas bornée alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $u_m \geqslant 0$. On pose $\varphi(0) = m$, ainsi on a bien $u_{\varphi(0)} \geqslant 0$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'on a déterminé un entier $\varphi(n)$ tel que $u_{\varphi(n)} \geqslant n$.

La suite $(u_k)_{k>\varphi(n)}$ n'est pas majorée. En effet la suite $(u_k)_{0\leqslant k\leqslant\varphi(n)}$ est finie donc majorée, donc si la suite $(u_k)_{k>\varphi(n)}$ était majorée alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ serait majorée, ce qui est supposé faux.

Il existe donc $k > \varphi(n)$ tel que $u_k \geqslant n+1$. On pose $\varphi(n+1) = k$. On a alors bien $u_{\varphi(n+1)} \geqslant n+1$, et $\varphi(n+1) > \varphi(n)$.
Conclusion. On a construit une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{\varphi(n)} \geqslant n$$

La suite $(u_{\varphi(n)})$ ainsi construite est extraite de la suite (u_n) et tend vers $+\infty$ par théorème de comparaison.