

**Corrigé partiel du T. D. A8**  
**Limites et continuité**

⑤ Démontrer l'équivalence :  $1 - \cos u \underset{(0)}{\sim} \frac{u^2}{2}$

Dans les deux cas on utilise l'équivalence  $\sin u \underset{(0)}{\sim} u$ .

Méthode 1. Grâce à la formule  $\cos u = 1 - 2 \sin^2 \frac{u}{2}$  :

$$1 - \cos u = 2 \sin^2 \frac{u}{2} \underset{(0)}{\sim} 2 \left( \frac{u}{2} \right)^2 = \frac{u^2}{2}$$

Méthode 2. Par une quantité conjuguée :

$$1 - \cos u = \frac{1 - \cos^2 u}{1 + \cos u} = \frac{\sin^2 u}{1 + \cos u} \underset{(0)}{\sim} \frac{u^2}{2}$$

⑥ Démontrer que pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  :

$$(1+x)^\alpha \underset{(0)}{=} 1 + \alpha x + o(x)$$

Cette égalité s'écrit  $(1+x)^\alpha - 1 - \alpha x \underset{(0)}{=} o(x)$  et donc revient à :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} - \alpha \right) = 0$$

On écrit :  $(1+x)^\alpha - 1 = e^{\alpha \ln(1+x)} - 1$

Comme  $\lim_{x \rightarrow 0} \alpha \ln(1+x) = 0$  et  $e^u - 1 \underset{(0)}{\sim} u$  alors :

$$e^{\alpha \ln(1+x)} - 1 \underset{(0)}{\sim} \alpha \ln(1+x)$$

Or  $\ln(1+x) \underset{(0)}{\sim} x$  donc par transitivité :

$$e^{\alpha \ln(1+x)} - 1 \underset{(0)}{\sim} \alpha x$$

Ceci montre que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{x} = \alpha$$

On en déduit l'égalité à démontrer.

⑦ Calculer les limites suivantes.

a.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - x^3}{4x^2 - 2x + 1}$

b.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x\sqrt{x} + 5}$

c.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3x^3 + x - 2)^2}{(x - 1)^6}$

d.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - \ln x}{\sqrt{x} + \ln x}$

e.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{3x^5 - 1}$

f.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{3x^5 - 1}$

g.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{4x - 1}{3x + 1} \right)^{(2x+3)}$

h.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left( \frac{x - 1}{x + 1} \right)^{(x-1)}$

i.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos(2x + \frac{\pi}{6})}{\sin(5x + \frac{\pi}{6})}$

j.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{x + 1} \right)^{\frac{x^2}{x+1}}$

a.  $\frac{3 - x^3}{4x^2 - 2x + 1} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{-x^3}{4x^2} = -\frac{x}{4} \xrightarrow{+\infty} -\infty$

b.  $\frac{2x}{x\sqrt{x} + 5} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{2x}{x\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}} \xrightarrow{+\infty} 0$

c.  $\frac{(3x^3 + x - 2)^2}{(x - 1)^6} \underset{(-\infty)}{\sim} \frac{(3x^3)^2}{x^6} = 9 \xrightarrow{-\infty} 9$

d. Par croissances comparées  $\ln x \underset{(+\infty)}{=} \sqrt{x}$  donc  $\frac{\sqrt{x} - \ln x}{\sqrt{x} + \ln x} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1 \xrightarrow{+\infty} 1$

e.  $\frac{e^x}{3x^5 - 1} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{e^x}{3x^5} \xrightarrow{+\infty} +\infty$  par croissances comparées.

f.  $\frac{e^{-x}}{3x^5 - 1} \xrightarrow{+\infty} 0$  (Limite non indéterminée)

g.  $\left( \frac{4x - 1}{3x + 1} \right)^{(2x+3)} = e^{(2x+3) \ln \frac{4x-1}{3x+1}}$

Comme  $\frac{4x - 1}{3x + 1} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{4}{3}$  alors  $(2x + 3) \ln \frac{4x - 1}{3x + 1} \xrightarrow{+\infty} +\infty$  puis

$$\left( \frac{4x - 1}{3x + 1} \right)^{(2x+3)} \xrightarrow{+\infty} +\infty$$

h. On pose  $h = x - 1$ . Si  $x$  tend vers 1 par valeurs supérieures alors  $h$  tend vers 0 par valeurs positives, et :  $\left( \frac{x - 1}{x + 1} \right)^{(x-1)} = \left( \frac{h}{h + 2} \right)^h = e^{h \ln h - h \ln(h+2)}$

Par croissances comparées  $h \ln h \xrightarrow{0} 0$ , et  $h \ln(h + 2) \xrightarrow{0} 0$  donc

$$\left( \frac{x - 1}{x + 1} \right)^{(x-1)} \xrightarrow{1} e^0 = 1$$

i. On pose  $h = x - \frac{\pi}{6}$ . Alors  $x = h + \frac{\pi}{6}$ , si  $x$  tend vers  $\frac{\pi}{6}$  alors  $h$  tend vers 0 et :

$$\frac{\cos(2x + \frac{\pi}{6})}{\sin(5x + \frac{\pi}{6})} = \frac{\cos(2h + \frac{\pi}{2})}{\sin(5h + \pi)} = \frac{-\sin 2h}{-\sin 5h} \underset{(0)}{\sim} \frac{2h}{5h} \xrightarrow{0} \frac{2}{5}$$

j. On pose  $h = \frac{1}{x}$ . Si  $x$  tend vers  $+\infty$  alors  $h$  tend vers 0, et :

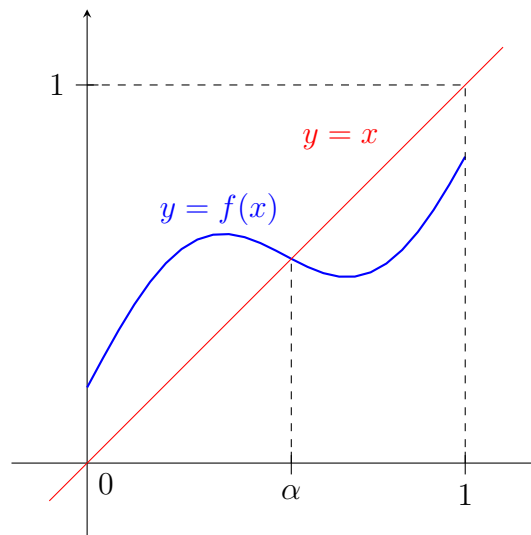
$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{x^2}{x+1}} = \left(\frac{1}{1+h}\right)^{\frac{1}{h(h+1)}} = e^{\frac{1}{h(h+1)} \ln \frac{1}{1+h}} = e^{-\frac{\ln(1+h)}{h(h+1)}}$$

Comme  $\ln(1+h) \underset{(0)}{\sim} h$  alors  $-\frac{\ln(1+h)}{h(h+1)} \underset{(0)}{\sim} -\frac{1}{1+h} \underset{(0)}{\sim} -1$  donc

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{x^2}{x+1}} \xrightarrow{+\infty} e^{-1}$$

⑧ Soit  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  une fonction continue.

Démontrer qu'il existe un réel  $\alpha \in [0, 1]$  tel que  $f(\alpha) = \alpha$ .



On pose pour tout  $x \in [0, 1]$  :  $g(x) = f(x) - x$

La fonction  $f$  est continue, ainsi que la fonction  $x \mapsto x$ , donc par somme la fonction  $g$  est continue.

Comme  $f$  est à valeurs dans l'intervalle  $[0, 1]$  alors  $f(0) \geq 0$  et  $f(1) \leq 1$ , donc  $g(0) = f(0) \geq 0$  et  $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ .

Ainsi :

- $g$  est continue sur l'intervalle  $[0, 1]$ ,
- $g(0)$  et  $g(1)$  sont de signes distincts.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $\alpha \in [0, 1]$  tel que  $g(\alpha) = 0$ .

Ceci donne  $f(\alpha) = \alpha$ .

⑨ Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue admettant  $-\infty$  pour limite en  $-\infty$  et  $+\infty$  en  $+\infty$ . Démontrer que  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ .

Méthode 1. Il est clair que  $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ .

Réciproquement, si  $A$  est un élément de  $\mathbb{R}$  alors :

- Comme  $\lim_{+\infty} f = +\infty$  alors il existe  $x_1 \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x_1) > A$ .
- Comme  $\lim_{-\infty} f = -\infty$  alors il existe  $x_2 \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x_2) < A$ .

Or  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  qui est un intervalle donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe  $x_0$  entre  $x_1$  et  $x_2$  tel que  $f(x_0) = A$ .

Tout réel  $A$  appartient à  $f(\mathbb{R})$  donc  $\mathbb{R} \subseteq f(\mathbb{R})$ , et par double inclusion  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ .

Méthode 2. Comme  $f$  est continue et  $\mathbb{R}$  est un intervalle alors par corollaire du théorème des valeurs intermédiaires  $f(\mathbb{R})$  est un intervalle.

Cet intervalle n'est pas majoré car  $f$  tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$ , ni minoré car  $f$  tend vers  $-\infty$  en  $-\infty$ , donc  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ .

⑩ Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

Démontrer que  $f$  est bornée.

Comme  $f$  tend vers 0 en  $\pm\infty$  alors  $f$  est bornée aux voisinages de  $+\infty$  et de  $-\infty$ .

Il existe donc deux intervalles  $]-\infty, A]$  et  $[B, +\infty[$  sur lesquels  $|f| \leq 1$ .

L'image du segment  $[A, B]$  est un segment  $[m, M]$ , donc  $f$  est bornée sur  $[A, B]$ .

Finalement  $f$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  car  $\mathbb{R} = ]-\infty, A] \cup [A, B] \cup [B, +\infty[$ .

**11** Soit  $f$  une fonction continue et injective sur un intervalle  $I$ .

a. Énoncer en termes logiques la proposition :  $f$  n'est pas strictement monotone.

Soit  $a, b, c$  et  $d$  quatre éléments de  $I$  tels que  $a < b$  et  $c < d$ ,  $f(a) \leq f(b)$  et  $f(c) \geq f(d)$ .

On définit la fonction :

$$g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \longmapsto f(ta + (1 - t)c) - f(tb + (1 - t)d)$$

b. Démontrer qu'il existe  $\tau \in [0, 1]$  tel que  $g(\tau) = 0$ .

c. En déduire une contradiction et conclure.

a. Par définition  $f$  est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante, ce qui s'écrit :

$$(\forall (a, b) \in I^2 \quad a < b \implies f(a) < f(b))$$

ou

$$(\forall (a, b) \in I^2 \quad a < b \implies f(a) > f(b))$$

La négation de cette proposition est :

$$(\exists (a, b) \in I^2 \quad a < b \text{ et } f(a) \geq f(b))$$

et

$$(\exists (a, b) \in I^2 \quad a < b \text{ et } f(a) \leq f(b))$$

Comme  $a$  et  $b$  sont des variables muettes alors on peut écrire que  $f$  n'est pas strictement monotone si et seulement si :

$$(\exists (a, b) \in I^2 \quad a < b \text{ et } f(a) \leq f(b))$$

et

$$(\exists (c, d) \in I^2 \quad c < d \text{ et } f(c) \geq f(d))$$

b. Tout d'abord on remarque que  $ta + (1 - t)c = c + t(a - c)$ , comme  $t \in [0, 1]$  alors  $ta + (1 - t)c$  est entre  $a$  et  $c$ . Comme  $a$  et  $c$  sont dans l'intervalle  $I$  alors  $ta + (1 - t)c$  appartient aussi à  $I$ .

De même,  $tb + (1 - t)d$  appartient à  $I$  pour tout  $t \in [0, 1]$ .

Ceci montre que la fonction  $g$  est bien définie.

De plus on calcule  $g(0) = f(c) - f(d)$  et  $g(1) = f(a) - f(b)$ , donc  $g(0) \geq 0$  et  $g(1) \leq 0$ .

La fonction  $g$  est continue par composition et somme, la fonction  $f$  étant supposée continue.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe  $\tau \in [0, 1]$  tel que  $g(\tau) = 0$ .

c. Comme  $g(\tau) = 0$  alors :

$$f(\tau a + (1 - \tau)c) = f(\tau b + (1 - \tau)d)$$

Comme  $f$  est injective alors  $\tau a + (1 - \tau)c = \tau b + (1 - \tau)d$ , ce qui s'écrit :

$$(b - a)\tau + (d - c)(1 - \tau) = 0$$

Or  $a < b$ ,  $c < d$  et  $0 \leq \tau \leq 1$ , donc toutes ces quantités sont positives. Ainsi  $(b - a)\tau = 0$  et  $(d - c)(1 - \tau) = 0$ , puis  $\tau = 0$  et  $(1 - \tau) = 0$  car  $b - a$  et  $d - c$  ne sont pas nuls. On obtient alors  $\tau = 0$  et  $\tau = 1$ , ce qui est impossible.

Cette contradiction montre qu'il n'existe pas quatre éléments  $a, b, c$  et  $d$  de  $I$  tels que  $a < b$ ,  $c < d$ ,  $f(a) \leq f(b)$  et  $f(c) \geq f(d)$ .

Ainsi  $f$  est strictement monotone.

**12** Soit  $g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{C}$

$$t \longmapsto \frac{e^{it} - 1}{t}$$

Démontrer que  $f$  est continue et prolongeable par continuité en 0.

La forme algébrique de  $f$  est :

$$\forall t \in \mathbb{R}^* \quad f(t) = \frac{\cos t - 1}{t} + i \frac{\sin t}{t}$$

Les fonctions  $\operatorname{Re} f$  et  $\operatorname{Im} f$  sont donc :

$$\begin{array}{l} \operatorname{Re}(f) : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \frac{\cos t - 1}{t} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} \operatorname{Im}(f) : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \frac{\sin t}{t} \end{array}$$

Par quotient ces fonctions sont continues, donc  $f$  est continue.

Pour déterminer la limite de  $f$  en 0 on utilise les équivalences :

$$(\cos t - 1) \underset{(0)}{\sim} -\frac{t^2}{2} \quad \text{et} \quad \sin t \underset{(0)}{\sim} t$$

Elles montrent que :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left( -\frac{t}{2} \right) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

On en déduit :

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = i$$

On peut donc prolonger  $f$  par continuité en posant  $f(0) = i$ .

De plus on remarque que  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{it} - 1}{it} = 1$ , ce qui donne l'équivalence  $e^{it} - 1 \underset{(0)}{\sim} it$ .

Ainsi l'équivalence  $e^u - 1 \underset{(0)}{\sim} u$  est valable aussi si  $u$  est imaginaire pur, et on peut aussi démontrer qu'elle est valable si  $u$  est complexe.

1 Les fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  suivantes sont-elles continues ?

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x+1) & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x}{1-x} & \text{sinon} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{|x(x-1)|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^8-1}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ 8 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

- Par composition de fonctions continues la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .  
Par quotient de fonctions continues la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_-^*$ .  
De plus :

$$\lim_{x \rightarrow 0}^> f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x+1) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0}^< f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1-x} = 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

Donc  $f$  est continue en 0.

Finalement  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

- La fonction valeur absolue est continue, ainsi que les fonctions polynomiales, donc par quotient et composition la fonction  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$ .

Déterminons les limites à gauche et à droite de  $g$  en 0.

Si  $x \in ]0, 1[$  alors  $(x-1) \in ]-1, 0[$ , donc  $x(x-1) < 0$ , et ainsi  $g(x) = \frac{-x(x-1)}{x} = 1-x$ .  
Ceci montre que  $\lim_{x \rightarrow 0}^> g(x) = 1$ .

Si  $x \in ]-\infty, 0[$  alors  $x < 0$  et  $(x-1) < 0$ , donc  $x(x-1) > 0$ , et ainsi  $g(x) = \frac{x(x-1)}{x} = x-1$ . Ceci montre que  $\lim_{x \rightarrow 0}^< g(x) = -1$ .

Or  $g(0) = -1$ , donc  $g$  est continue à gauche en 0, mais pas à droite.

- La fonction  $x \mapsto \frac{x^8-1}{x-1}$  est continue sur  $]1, +\infty[$  par quotient, et la fonction  $x \mapsto 8$  est continue sur  $]-\infty, 1[$ , donc la fonction  $h$  est continue sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

Comme  $h$  est constante que l'intervalle  $]-\infty, 1[$  alors elle est continue à gauche en 1.  
En effet  $\lim_{x \rightarrow 1}^< h(x) = 8 = h(1)$ .

Pour démontrer que  $h(x)$  tend vers 8 lorsque  $x$  tend vers 1 par valeurs supérieures on peut écrire :

$$\forall x > 1 \quad h(x) = \frac{(x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)}{x-1} = (x^4+1)(x^2+1)(x+1)$$

Ainsi  $\lim_{x \rightarrow 1}^> h(x) = 2 \times 2 \times 2 = 8$ .

On peut aussi remarquer que la fonction  $g : x \mapsto x^8$  est dérivable de dérivée  $x \mapsto 8x^7$ , donc en particulier en  $x = 1$  :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x-1} = g'(1) \quad \text{donne} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^8 - 1}{x-1} = 8$$

La fonction  $h$  admet 8 pour limite en 1 à gauche et à droite, et  $h(1) = 8$ , donc  $h$  est continue en 1.

Finalement  $h$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

**2** Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes. Déterminer ensuite sur quel ensemble elles sont prolongeables par continuité.

$$f_1(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \qquad f_2(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{4}{x^2 - 2x - 3}$$

$$f_3(x) = \frac{\ln(4x^2 - 1)}{\ln(2x - 1)} \qquad f_4(x) = \frac{\sqrt{2} \sin x - 1}{\tan x - 1}$$

On rappelle qu'une fonction est prolongeable par continuité en un point si et seulement si elle admet une limite finie en ce point.

- La fonction  $f_1$  est définie sur  $\mathbb{R}^*$ , continue par quotient et composition.

Calculons sa limite en 0. La fonction exponentielle admet pour limites 0 en  $-\infty$  et  $+\infty$  en  $+\infty$ , donc :

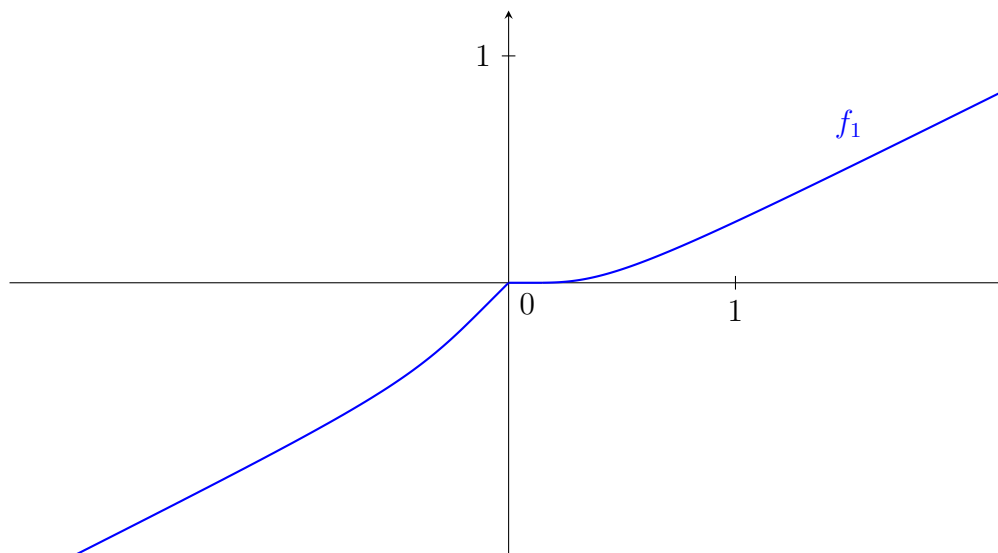
$$\lim_{x \rightarrow 0}^< e^{\frac{1}{x}} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \rightarrow 0}^> e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

Par quotient de limites :

$$\lim_{x \rightarrow 0}^< f_1(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \rightarrow 0}^> f_1(x) = 0$$

On en déduit que la fonction  $f_1$  admet 0 pour limite en 0, et donc elle est prolongeable par continuité en 0, en posant  $f_1(0) = 0$ .

L'allure de la courbe de  $f_1$  est la suivante.



Nous pourrions vérifier qu'elle n'est pas dérivable en 0.



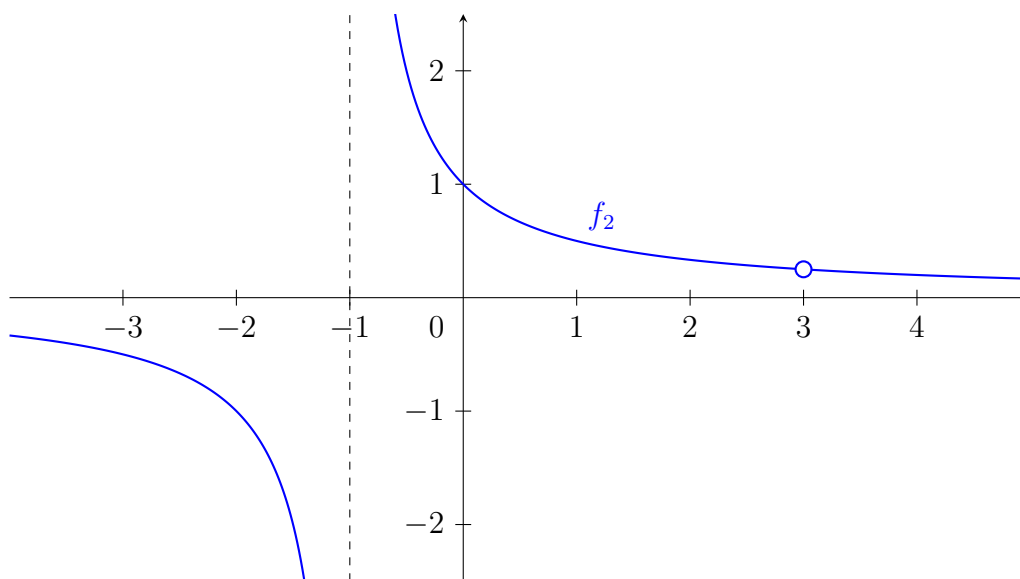
- Comme  $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$  alors la fonction  $f_2$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$ . On peut simplifier son expression :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\} \quad f_2(x) = \frac{x+1}{(x+1)(x-3)} - \frac{4}{(x+1)(x-3)} = \frac{1}{x+1}$$

Ceci montre que la fonction  $f_2$  n'admet pas de limite finie lorsque  $x$  tend vers  $-1$ , mais qu'elle tend vers  $\frac{1}{4}$  lorsque  $x$  tend vers  $3$ .

On peut donc la prolonger par continuité sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ , en posant  $f_2(3) = \frac{1}{4}$ .

L'allure de la courbe de  $f_2$  est la suivante.



- La fonction  $f_3 : x \mapsto \frac{\ln(4x^2-1)}{\ln(2x-1)}$  est définie sur  $\mathcal{D}_3 = ]\frac{1}{2}, 1[ \cup ]1, +\infty[$ . Pour calculer ses limites on écrit :

$$\forall x \in \mathcal{D}_3 \quad f_3(x) = \frac{\ln(2x-1) + \ln(2x+1)}{\ln(2x-1)} = 1 + \frac{\ln(2x+1)}{\ln(2x-1)}$$

Ceci montre que  $\lim_{x \rightarrow 1} f_3(x) = \pm\infty$ , donc  $f_3$  n'est pas prolongeable par continuité en  $x = 1$ .

Ceci donne également  $\lim_{h \rightarrow 0} f_3(h + \frac{1}{2}) = 1$  donc on peut prolonger  $f$  par continuité en  $x = \frac{1}{2}$ , en posant  $f_3(\frac{1}{2}) = 1$ .

- La fonction  $f_4 : \frac{\sqrt{2}\sin x - 1}{\tan x - 1}$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

Elle est périodique de période  $2\pi$ . On étudie donc ses limites aux points  $\pm\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{4}$  et  $\frac{5\pi}{4}$ .  
Lorsque  $x$  tend vers  $\pm\frac{\pi}{2}$  elle tend vers 0, donc on peut la prolonger en posant :  $f(\pm\frac{\pi}{2}) = 0$ .

Lorsque  $x$  tend vers  $\frac{5\pi}{4}$  elle tend vers  $\pm\infty$ , selon que la limite soit à gauche ou à droite, donc on ne peut pas la prolonger par continuité en ce point.

Calculons enfin la limite de  $f_4$  lorsque  $x$  tend vers  $\frac{\pi}{4}$ , en posant  $h = x - \frac{\pi}{4}$ .

$$f_4(x) = f_4\left(h + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}\sin\left(h + \frac{\pi}{4}\right) - 1}{\tan\left(h + \frac{\pi}{4}\right) - 1} = \frac{\sin h + \cos h - 1}{\frac{2 \tan h}{1 - \tan h}}$$

Comme  $\tan h \underset{(0)}{\sim} h$  et  $1 - \tan h \underset{(0)}{\sim} 1$  alors :

$$f\left(h + \frac{\pi}{4}\right) \underset{(0)}{\sim} \frac{1}{2} \left( \frac{\sin h}{h} + \frac{\cos h - 1}{h} \right)$$

On sait que lorsque  $h$  tend vers 0 :  $\frac{\sin h}{h} \rightarrow 1$  et  $\frac{\cos h - 1}{h} \rightarrow 0$ .

On en déduit :  $\lim_{h \rightarrow 0} f_4\left(h + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

On prolonge donc par continuité la fonction  $f_4$  en posant  $f_4\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ .

Finalement on a prolongé  $f_4$  par continuité en posant :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad f\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0 \quad \text{et} \quad f_4\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = \frac{1}{2}$$

La fonction ainsi prolongée est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**3** Calculer les limites suivantes.

- a.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$       b.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 3x - 4} - \sqrt{x^2 - 4x + 2}$
- c.  $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \ln x)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$       d.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 1}{\ln(x + 1)}$       e.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{(\cos 2x)(\cos x - \sin x)}}{x - \frac{\pi}{4}}$
- f.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{ch} 2x) \ln(\operatorname{th} x)$       g.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} 3x}{\operatorname{sh} 2x}$       h.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin \sqrt{x}) \ln 2x$
- i.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x \ln^2 x$       j.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{sh}(\ln \sqrt{x^2 + 1})}{x}$       k.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\tan x)^{\sin x}$
- l.  $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\sin 3x}{\cos \frac{x}{4}}$       m.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2} - x$       n.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln(1+x)}{\ln x} \right)^{x \ln x}$
- o.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-\sqrt{x}}$       p.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2 e^x}$       q.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^x}{a^{x^2}} \quad (a > 1)$
- r.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$       s.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln^5 x - \sqrt{x}$
- t.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\tan 6x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}$       u.  $\lim_{x \rightarrow \pi} (1 + \sin x)^{\frac{1}{\cos \frac{x}{2}}}$       v.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1 + a^{\frac{1}{x}}}{2} \right)^x \quad (a > 0)$
- w.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$       x.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{\lfloor x^2 \rfloor}$       y.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)}$
- z.  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (2x^2 - 3x + 1) \tan(\pi x)$

a. L'encadrement  $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$  montre que :

$$\forall x > 0 \quad 1 - \frac{1}{x} < \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \leq 1$$

Par théorème d'encadrement :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} = 1$

Ceci montre que  $\lfloor x \rfloor$  est équivalente à  $x$  au voisinage de  $+\infty$ , ce qui est assez intuitif.

b. Par quantité conjuguée :

$$\sqrt{x^2 + 3x - 4} - \sqrt{x^2 - 4x + 2} = \frac{7x - 6}{\sqrt{x^2 + 3x - 4} + \sqrt{x^2 - 4x + 2}}$$

Si  $x$  est au voisinage de  $-\infty$  alors  $x$  est négatif, donc  $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ , ce qui donne :

$$\sqrt{x^2 + 3x - 4} - \sqrt{x^2 - 4x + 2} = \frac{7x - 6}{-x \left( \sqrt{1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}} \right)}$$

On en déduit :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 3x - 4} - \sqrt{x^2 - 4x + 2} = -\frac{7}{2}$

c. Tout d'abord on écrit :  $(1 + \ln x)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = e^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) \ln(1 + \ln x)}$

On pose ensuite  $h = x - 1$ . Alors  $x = 1 + h$  et  $h$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers 1, puis :

$$\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) \ln(1 + \ln x) = \tan\left(\frac{\pi h}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \ln(1 + \ln(1 + h))$$

D'une part :

$$\tan\left(\frac{\pi h}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi h}{2}\right)} \underset{(0)}{\sim} -\frac{1}{\left(\frac{\pi h}{2}\right)} = -\frac{2}{\pi h}$$

D'autre part, comme  $\ln(1 + h)$  tend vers 0 lorsque  $h$  tend vers 0 alors :

$$\ln(1 + \ln(1 + h)) \underset{(0)}{\sim} \ln(1 + h) \underset{(0)}{\sim} h$$

On en déduit :

$$\tan\left(\frac{\pi h}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \ln(1 + \ln(1 + h)) \underset{(0)}{\sim} -\frac{2}{\pi}$$

Finalement :  $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \ln x)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = e^{-\frac{2}{\pi}}$

d. Par équivalences usuelles :  $\frac{5^x - 1}{\ln(x + 1)} = \frac{e^{x \ln 5} - 1}{\ln(1 + x)} \underset{(0)}{\sim} \frac{x \ln 5}{x} = \ln 5$

Ainsi :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 1}{\ln(x + 1)} = \ln 5$ .

i. On écrit :  $\frac{x \ln^2 x}{x^2} = \frac{\ln^2 x}{x}$

Par croissances comparées  $\ln^2 x \underset{(+\infty)}{=} o(x)$  donc  $x \ln^2 x \underset{(+\infty)}{=} o(x^2)$  et ainsi :

$$x^2 - x \ln^2 x \underset{(+\infty)}{\sim} x^2$$

Finalement :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x \ln^2 x) = +\infty$ .

l. On pose  $h = x - 2\pi$ . Alors  $x = h + 2\pi$ , et  $h$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $2\pi$ . On calcule :

$$\frac{\sin 3x}{\cos \frac{x}{4}} = \frac{\sin(3h + 6\pi)}{\cos\left(\frac{h}{4} + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\sin 3h}{-\sin \frac{h}{4}} \underset{(0)}{\sim} \frac{3h}{-\frac{h}{4}} = -12$$

En conclusion :  $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\sin 3x}{\cos \frac{x}{4}} = -12$

m. Grâce à l'équivalence  $e^u - 1 \underset{(0)}{\sim} u$  :

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x^3 + x^2} - x &= x \left( \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right) = x \left( e^{\frac{1}{3} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} - 1 \right) \\ &\underset{(+\infty)}{\sim} x \left( \frac{1}{3} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

On obtient donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2} - x = \frac{1}{3}$

n. En posant  $h = \frac{1}{x}$  on obtient :

$$\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x \ln x} = e^{\frac{1}{h} \ln \frac{1}{h} \ln \left(\frac{\ln(1+\frac{1}{h})}{\ln \frac{1}{h}}\right)}$$

On calcule :

$$\frac{1}{h} \ln \frac{1}{h} \ln \left(\frac{\ln(1+\frac{1}{h})}{\ln \frac{1}{h}}\right) = -\frac{\ln h}{h} \ln \left(\frac{\ln(1+h) - \ln h}{-\ln h}\right) = -\frac{\ln h}{h} \ln \left(1 - \frac{\ln(1+h)}{\ln h}\right)$$

Comme  $\frac{\ln(1+h)}{\ln h} \xrightarrow[0]{} 0$  alors :

$$-\frac{\ln h}{h} \ln \left(1 - \frac{\ln(1+h)}{\ln h}\right) \underset{(0)}{\sim} -\frac{\ln h}{h} \left(-\frac{\ln(1+h)}{\ln h}\right) = \frac{\ln(1+h)}{h} \underset{(0)}{\sim} 1$$

On en déduit :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x \ln x} = e$

o. On écrit :  $x^2 e^{-\sqrt{x}} = e^{2 \ln x - \sqrt{x}}$

Par croissances comparées  $\ln x \underset{(+\infty)}{=} o(\sqrt{x})$  donc  $(2 \ln x - \sqrt{x}) \underset{(+\infty)}{\sim} -\sqrt{x}$ .

On en conclut :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-\sqrt{x}} = 0$

En d'autres termes :  $x^2 \underset{(0)}{=} o(e^{\sqrt{x}})$

On aurait aussi pu utiliser le changement de variable  $y = \sqrt{x}$  :

Par croissances comparées :  $y^4 \underset{(0)}{=} o(e^y)$

q. On écrit :

$$\frac{x^x}{a^{x^2}} = e^{x \ln x - x^2 \ln a}$$

Par croissances comparées  $x \ln x \underset{(+\infty)}{=} x^2$  donc  $x \ln x - x^2 \ln a \underset{(+\infty)}{\sim} -x^2 \ln a$ .

Comme  $a > 1$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln a = +\infty$  puis :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^x}{a^{x^2}} = 0$

s. Par croissances comparées  $\ln^5 x \underset{(+\infty)}{=} o(\sqrt{x})$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln^5 x - \sqrt{x}) = -\infty$

w. On écrit :  $\frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x} = e^{\ln^2 x - x \ln(\ln x)}$

Comme  $\ln(\ln x) \xrightarrow{+\infty} +\infty$  alors  $x \underset{(+\infty)}{=} o(x \ln(\ln x))$ .

Par croissances comparées :  $\ln^2 x \underset{(+\infty)}{=} o(x)$ .

Par transitivité :  $\ln^2 x \underset{(+\infty)}{=} o(x \ln(\ln x))$ , puis  $\ln^2 x - x \ln(\ln x) \underset{(+\infty)}{\sim} -x \ln(\ln x)$ .

Finalement :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x} = 0$

z. Posons  $h = x - \frac{1}{2}$ . Alors :

$$(2x^2 - 3x + 1) \tan(\pi x) = (2h^2 - h) \times \frac{-1}{\tan(\pi h)} \underset{(0)}{\sim} -\frac{h(2h-1)}{\pi h} \underset{(0)}{\sim} \frac{1}{\pi}$$

Ceci donne :  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (2x^2 - 3x + 1) \tan(\pi x) = \frac{1}{\pi}$

**5** a. Si  $x$  est un réel strictement positif, calculer :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{x^t - 1}{t}$$

b. Soit  $z$  un nombre complexe non-nul de module  $r$  et d'argument  $\theta$ . Démontrer que la limite

$$\ell = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{r^t e^{i\theta t} - 1}{t}$$

existe et la calculer. Que vaut  $e^\ell$  ?

a. L'équivalence usuelle  $e^u - 1 \underset{(0)}{\sim} u$  donne :

$$\frac{x^t - 1}{t} = \frac{e^{t \ln x} - 1}{t} \underset{(t \rightarrow 0)}{\sim} \frac{t \ln x}{t} = \ln x$$

On en déduit :  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{x^t - 1}{t} = \ln x$

b. On souhaite calculer la limite d'une fonction complexe. Pour ceci on calcule les limites des parties réelles et imaginaires. On écrit d'abord :

$$\frac{r^t e^{i\theta t} - 1}{t} = \frac{r^t \cos \theta t - 1}{t} + i r^t \frac{\sin \theta t}{t}$$

Comme  $r > 0$  alors  $\lim_{t \rightarrow 0} r^t = 1$  puis l'équivalence usuelle  $\sin u \underset{(0)}{\sim} u$  donne :

$$r^t \frac{\sin \theta t}{t} \underset{(t \rightarrow 0)}{\sim} \frac{\theta t}{t} = \theta$$

On en déduit :  $\lim_{t \rightarrow 0} r^t \frac{\sin \theta t}{t} = \theta$

Pour la limite de la partie réelle il faut introduire des termes :

$$\frac{r^t \cos \theta t - 1}{t} = \frac{r^t \cos \theta t - r^t + r^t - 1}{t} = r^t \frac{\cos \theta t - 1}{t} + \frac{r^t - 1}{t}$$

L'équivalence usuelle  $1 - \cos u \underset{(0)}{\sim} \frac{u^2}{2}$  donne :

$$r^t \frac{\cos \theta t - 1}{t} \underset{(t \rightarrow 0)}{\sim} -\frac{(\theta t)^2}{2t} = -\frac{\theta^2 t}{2}$$

On en déduit :  $\lim_{t \rightarrow 0} r^t \frac{\cos \theta t - 1}{t} = 0$

En suite grâce à la question précédente :  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{r^t - 1}{t} = \ln r$

Finalement :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{r^t e^{i\theta t} - 1}{t} = \ln r + i\theta$$

On remarque que  $e^\ell = r e^{i\theta} = z$ , ce qui montre que  $\ell$  pourrait être défini comme la logarithme népérien du complexe  $z$ . Mais cette définition n'est pas correcte, car elle dépend du choix de l'argument  $\theta$  de  $z$ .

**6** Étudier la continuité de :

$$f : x \rightarrow [x] + \sqrt{x - [x]}$$

La fonction partie entière est définie sur  $\mathbb{R}$ , et pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $[x] \leq x$

Ceci montre que  $x - [x]$  est positif pour tout réel  $x$ , donc  $f$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ .

La fonction partie entière est continue sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , donc par soustraction, composition et addition la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .

On étudie maintenant la continuité en un point de  $\mathbb{Z}$ .

Soit  $n$  un entier :  $n \in \mathbb{Z}$ .

Si  $x \in [n, n + 1[$  alors  $[x] = n$ , donc  $f(x) = n + \sqrt{x - n}$ . Ceci montre que :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow n \\ >}} f(x) = n$$

Si  $x \in [n - 1, n[$  alors  $[x] = n - 1$ , donc  $f(x) = n - 1 + \sqrt{x - n + 1}$ . Ceci montre que :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow n \\ <}} f(x) = n$$

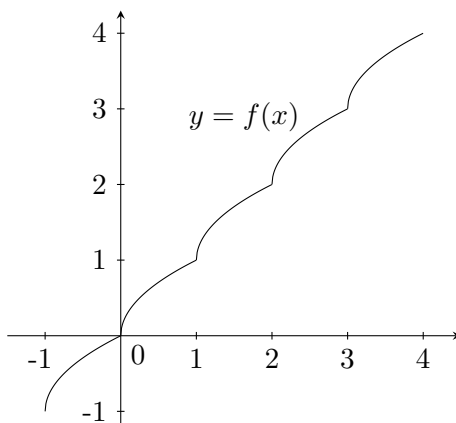
De plus  $f(n) = n$ , et donc on constate donc que :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow n \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow n \\ <}} f(x) = f(n)$$

La fonction  $f$  est donc continue en  $n$ .

Ceci est valable pour tout  $n$  de  $\mathbb{Z}$ , donc finalement  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

On peut représenter  $f$  de la façon suivante :



**7** Donner des équivalents simples au point  $a$  indiqué de chacune des fonctions suivantes.

- a.  $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^3}$  en  $a = 0$   
 b.  $f(x) = \frac{e^{\sin x} - 1}{\cos x - 1}$  en  $a = 0$   
 c.  $f(x) = \frac{\sin(nx) \cos(mx)}{\tan x}$  en  $a = 0$   $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$   
 d.  $f(x) = \frac{\ln x}{(x+1)^3}$  en  $a = 0$  puis en  $a = +\infty$   
 e.  $f(x) = \tan x$  en  $a = \frac{\pi}{2}$   
 f.  $f(x) = x^{\sin x} - 1$  en  $a = 0^+$   
 g.  $g(x) = \cos \sqrt{x} - 1$  en  $a = 0^+$   
 h.  $h(x) = x^{\sin x} - \cos \sqrt{x}$  en  $a = 0^+$   
 i.  $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  en  $a = 0$  puis  $a = 1$   
 j.  $f(x) = \sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln x}$  en  $a = +\infty$

a. Grâce à l'équivalence  $\sin u \underset{(0)}{\sim} u$  :  $\frac{\sin^2 x}{x^3} \underset{(0)}{\sim} \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x}$

b. Grâce aux équivalences  $e^u - 1 \underset{(0)}{\sim} u$  et  $1 - \cos u \underset{(0)}{\sim} \frac{u^2}{2}$  :

$$\frac{e^{\sin x} - 1}{\cos x - 1} \underset{(0)}{\sim} \frac{\sin x}{-\frac{x^2}{2}} \underset{(0)}{\sim} -\frac{2}{x}$$

c. De même :  $\frac{\sin(nx) \cos(mx)}{\tan x} \underset{(0)}{\sim} \frac{(nx) \times 1}{x} = n$

d. En 0 :  $\frac{\ln x}{(x+1)^3} \underset{(0)}{\sim} \frac{\ln x}{1^3} = \ln x$  En  $+\infty$  :  $\frac{\ln x}{(x+1)^3} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{\ln x}{x^3}$

e. On pose  $h = x - \frac{\pi}{2}$ . Alors  $x = h + \frac{\pi}{2}$  et :

$$\tan x = \tan\left(h + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan h} \underset{(0)}{\sim} -\frac{1}{h}$$

On en déduit :  $\tan x \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} -\frac{1}{x - \frac{\pi}{2}}$

Ceci peut être visualisé grâce au schéma de la figure 1.

f. On obtient :  $f(x) \underset{(0^+)}{\sim} x \ln x$

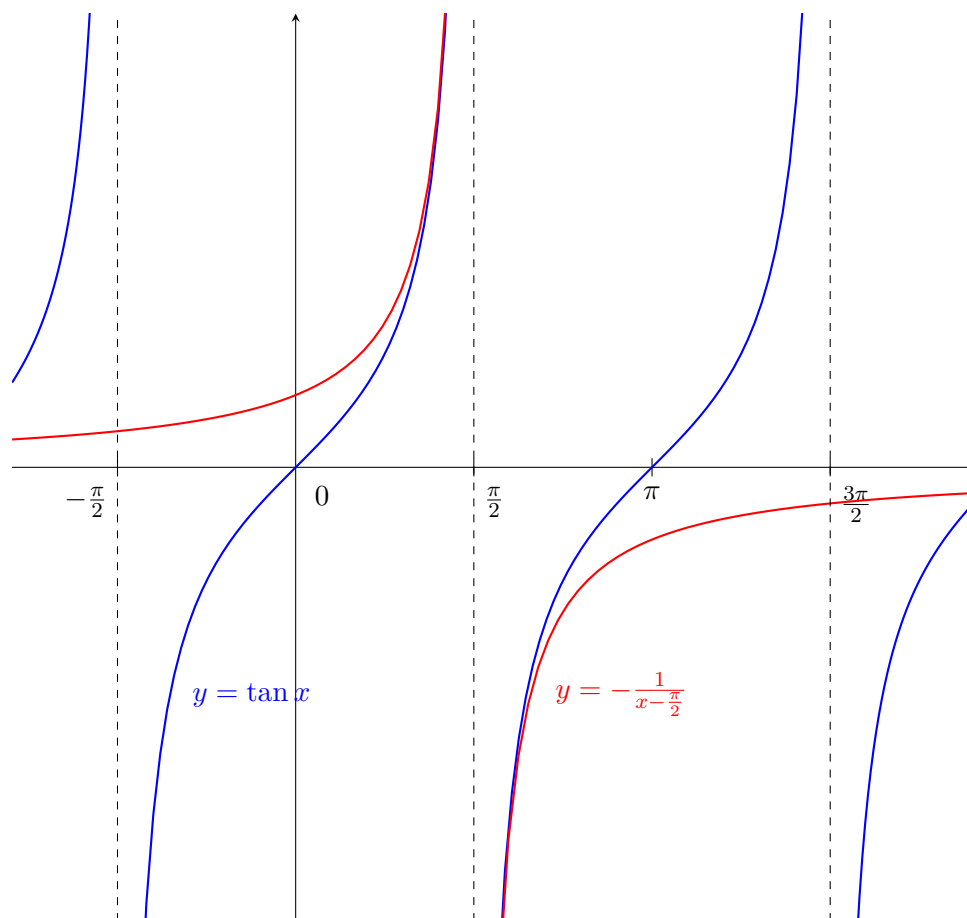
g. On obtient :  $f(x) \underset{(0^+)}{\sim} -\frac{x}{2}$

h. On obtient :  $f(x) \underset{(0^+)}{\sim} x \ln x$

i. On obtient :  $f(x) \underset{(0)}{\sim} \frac{1}{x}$  et  $f(x) \underset{(1)}{\sim} -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$

j. On obtient :  $f(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$



FIGURE 1 – Équivalence de la tangente en  $\frac{\pi}{2}$ 

**8** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies au voisinage de  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $g$  ne s'annulant pas. On suppose que  $f$  et  $g$  sont équivalentes en  $a$  et que  $f$  est strictement positive.

- Démontrer qu'il existe un voisinage de  $a$  sur lequel  $f$  et  $g$  sont strictement positives.
- Démontrer que si  $f$  est bornée au voisinage de  $a$  alors  $g$  est bornée au voisinage de  $a$ .
- Soit  $\alpha$  un réel. Démontrer que  $f^\alpha$  et  $g^\alpha$  sont équivalentes au voisinage de  $a$ .
- Démontrer que si  $f$  est bornée alors  $e^f$  et  $e^g$  sont équivalentes en  $a$ .
- Démontrer que si  $f$  tend vers  $+\infty$  en  $a$  alors  $\ln f$  et  $\ln g$  sont équivalentes en  $a$ .

a. Soit  $I$  un voisinage de  $a$  sur lequel  $f$  et  $g$  sont définies.

Comme  $f$  et  $g$  sont équivalentes en  $a$  alors  $\lim_a \frac{f}{g} = 1$ .

Il existe donc un voisinage  $V_1$  de  $a$  sur lequel  $\frac{f}{g} \geq \frac{1}{2}$ .

En effet, par définition de la limite, pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un voisinage  $V$  de  $a$  tel que pour tout  $x \in I$  :

$$x \in V \quad \Longrightarrow \quad \left| \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right| \leq \varepsilon$$

En particulier pour  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , comme  $\varepsilon > 0$  alors il existe un voisinage  $V_0$  de  $a$  tel que :

$$x \in V_0 \quad \Longrightarrow \quad -\varepsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \leq \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} \geq 1 - \varepsilon = \frac{1}{2}$$

La fonction  $\frac{f}{g}$  est strictement positive sur le voisinage  $V_0$  de  $a$ .

Or  $f$  est strictement positive, donc  $g$  est aussi strictement positive.

b. On considère le même voisinage  $V_0$  que ci-dessus. Pour tout  $x \in I$  :

$$x \in V_0 \quad \Longrightarrow \quad -\varepsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \leq \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{3}{2}$$

Comme  $g$  est strictement positive alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{3}{2} &\quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}g(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2}g(x) \\ &\quad \Longrightarrow \quad \frac{2}{3}f(x) \leq g(x) \leq 2f(x) \end{aligned}$$

Soit  $m$  et  $M$  un minorant et un majorant de  $f$ . Alors :

$$\forall x \in V_0 \quad \frac{2}{3}m \leq g(x) \leq 2M$$

Ceci montre que  $g$  est bornée au voisinage de  $a$ .

c. Si  $f$  et  $g$  sont équivalentes en  $a$  alors  $\lim_a \frac{f}{g} = 1$ . On en déduit :

$$\lim_a \frac{f^\alpha}{g^\alpha} = \lim_a \left( \frac{f}{g} \right)^\alpha = 1$$

Donc  $f^\alpha$  et  $g^\alpha$  sont équivalentes au voisinage de  $a$ .

d. On écrit :  $\frac{e^f}{e^g} = e^{f-g}$

Si  $f$  et  $g$  sont équivalentes alors  $f - g$  ne tend pas nécessairement vers 0, donc il n'est pas vrai en général que  $e^f$  et  $e^g$  sont équivalentes.

Si  $f$  est bornée alors  $g$  est bornée au voisinage de  $a$  d'après la question b.

On peut écrire :  $f - g = g \left( \frac{f}{g} - 1 \right)$

Comme  $f \sim g$  alors  $\frac{f}{g} - 1$  tend vers 0, et comme  $g$  est bornée alors par produit  $g \left( \frac{f}{g} - 1 \right)$  tend vers 0. On en déduit  $\lim_a \frac{e^f}{e^g} = e^0 = 1$ , donc les fonctions  $e^f$  et  $e^g$  sont équivalentes au voisinage de  $a$ .

Contre-exemple. Soit  $f(x) = x + 1$  et  $g(x) = x$ .

Alors  $f$  et  $g$  sont équivalentes au voisinage de  $+\infty$ . Par contre  $\frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = e$ , cette fonction ne tend pas vers 1 lorsque  $a$  tend vers  $+\infty$  donc  $e^{f(x)}$  et  $e^{g(x)}$  ne sont pas équivalentes au voisinage de  $+\infty$ .

e. On a supposé que  $f$  et  $g$  sont équivalentes au voisinage de  $a$ , donc que  $\lim_a \frac{f}{g} = 1$ .

On souhaite démontrer que si  $\lim_a f = +\infty$  alors les fonctions  $\ln f$  et  $\ln g$  sont équivalentes au voisinage de  $a$ , donc que  $\lim_a \frac{\ln f}{\ln g} = 1$ .

On peut écrire :

$$\forall x \in I \quad \frac{\ln f(x)}{\ln g(x)} = \frac{\ln \left( \frac{f(x)}{g(x)} g(x) \right)}{\ln g(x)} = \frac{\ln \frac{f(x)}{g(x)} + \ln g(x)}{\ln g(x)} = 1 + \frac{\ln \frac{f(x)}{g(x)}}{\ln g(x)}$$

Comme  $\lim_a f = +\infty$  et  $f \underset{(a)}{\sim} g$  alors  $\lim_a g = +\infty$ .

Comme  $\lim_a \frac{f}{g} = 1$  alors  $\lim_a \ln \frac{f}{g} = 0$ . On en déduit :  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln f(x)}{\ln g(x)} = 1$

Ainsi les fonctions  $\ln f$  et  $\ln g$  sont équivalentes au voisinage de  $a$ .

Contre-exemple. Soit  $f(x) = x^2$  et  $g(x) = x$ .

Alors  $f$  et  $g$  sont équivalentes au voisinage de 1, car  $\frac{f(x)}{g(x)} = x \xrightarrow[1]{} 1$ .

Mais  $\frac{\ln f(x)}{\ln g(x)} = \frac{\ln(x^2)}{\ln x} = \ln 2$ , cette fonction ne tend pas vers 1 lorsque  $x$  tend vers 1.

Les fonctions  $\ln f$  et  $\ln g$  ne sont donc pas équivalentes au voisinage de 1.

9 Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Soit  $a = f(1)$ .

- Déterminer  $f(0)$ .
- Calculer  $f(n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- Calculer  $f(n)$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .
- Calculer  $f(r)$  pour tout  $r \in \mathbb{Q}$ .
- Démontrer que  $f(x) = ax$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

a. Pour  $x = y = 0$  on obtient  $f(0) = f(0) + f(0)$  donc  $f(0) = 0$ .

b. On démontre par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = an$

Initialisation. On a justifié dans la question précédente que  $f(0) = 0$ .

Hérédité. Supposons que pour un certain  $n \in \mathbb{N}$  on a  $f(n) = an$ .

Alors  $f(n + 1) = f(n) + f(1) = an + a = a(n + 1)$ .

Conclusion. Par récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = an$

c. Soit  $n$  un entier négatif. Alors  $-n$  est un entier naturel, donc d'après la question précédente  $f(-n) = -an$ .

De plus  $f(n) + f(-n) = f(0) = 0$ , donc  $f(n) = -f(-n) = an$ .

On a donc démontré que :  $\forall n \in \mathbb{Z} \quad f(n) = an$

d. Soit  $x$  un réel quelconque. De même que dans la question b on démontre par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(nx) = nf(x)$

Soit  $r = \frac{p}{q}$  un rationnel, avec  $p \in \mathbb{Z}$  et  $q \in \mathbb{N}$ . Alors  $f(qr) = qf(r)$  d'après ce qui précède.

Ceci donne  $f(p) = qf(r)$ . Comme  $p$  est entier alors  $f(p) = ap$ , donc  $f(r) = \frac{ap}{q} = ar$ .

On a donc démontré que :  $\forall r \in \mathbb{Q} \quad f(r) = ar$

e. Soit  $x$  un réel quelconque.

Comme  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$  alors il existe une suite  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de rationnels convergeant vers  $x$ .

On a alors :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(r_n) = ar_n$ .

Comme  $f$  est continue alors :  $f(\lim r_n) = \lim f(r_n)$

Ceci donne  $f(x) = \lim(ar_n)$ , donc par produit  $f(x) = a \lim r_n = ax$ .

On a donc démontré que :  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = ax$

**10** On considère la fonction  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$   

$$x \mapsto \sin \frac{1}{x}$$

a. Soit  $u_n = \frac{1}{n\pi}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Donner les limites de  $(u_n)$  et de  $f(u_n)$ .

b. Déterminer une suite  $(v_n)$  tendant vers 0 telle que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(v_n) = 1$

c. La fonction  $f$  admet-elle une limite en 0 ?

a. La suite  $(u_n)$  converge vers 0 et la suite  $(f(u_n))$  converge vers 0 car elle est constante égale à 0. En effet pour tout  $n \in \mathbb{N} : f(u_n) = \sin(n\pi) = 0$ .

b. Posons, pour tout  $n \in \mathbb{N} : v_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ .

Alors la suite  $(v_n)$  converge vers 0, et pour tout  $n \in \mathbb{N} : f(v_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$ .

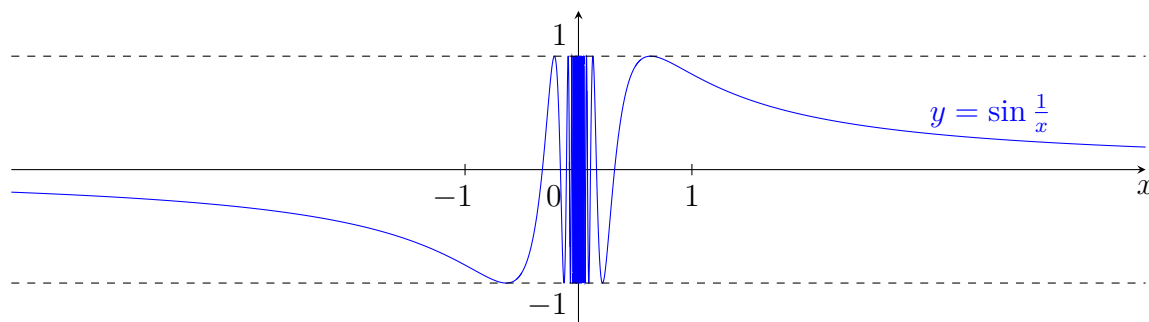
c. On raisonne par l'absurde, en supposant que la fonction  $f$  admet une limite en 0, et on note  $\ell$  celle-ci, avec  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ .

Comme les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers 0 alors par composition les suites  $(f(u_n))$  et  $(f(v_n))$  convergent vers cette limite  $\ell$ .

Or la suite  $(f(u_n))$  converge vers 0 et la suite  $(f(v_n))$  converge vers 1, ce qui donne  $\ell = 0 = 1$  par unicité de la limite.

Cette contradiction montre que  $f$  n'admet pas de limite en 0.

La courbe de  $f$  est la suivante :



**11** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue en 0 telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(2x) = f(x)$$

Démontrer que  $f$  est constante.

Indication : étudier les  $f\left(\frac{x}{2^n}\right)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

La relation  $f(2x) = f(x)$  donne, en remplaçant  $x$  par  $\frac{x}{2}$  :  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f\left(\frac{x}{2}\right) = f(x)$ .

Soit  $x$  un réel quelconque fixé. On démontre par récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$

La suite  $\left(\frac{x}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0 et la fonction  $f$  est continue en 0 donc par composition de limites la suite  $\left(f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f(0)$ .

Or la suite  $\left(f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante égale à  $f(x)$ .

On en déduit  $f(x) = f(0)$ , et comme ceci est vrai pour tout réel  $x$  alors  $f$  est constante.

**12** Soit  $D$  une partie de  $\mathbb{R}$  et  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Soit  $K$  un réel.

On dit que  $f$  est  $K$ -lipschitzienne si :

$$\forall (x, y) \in D^2 \quad |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

On dit que  $f$  est lipschitzienne s'il existe  $K \in \mathbb{R}$  telle que  $f$  est  $K$ -lipschitzienne.

- Démontrer que si  $f$  est lipschitzienne alors  $f$  est continue.
- En considérant la fonction carré démontrer que la réciproque est fautive.
- Démontrer que si  $f$  est dérivable et lipschitzienne alors sa dérivée est bornée.

Remarquons que si  $f$  est  $K$ -lipschitzienne alors  $K$  est positif, comme on peut le voir avec l'inégalité ci-dessus dans le cas où  $(x, y) = (1, 0)$ .

- Soit  $K$  un réel tel que  $f$  est  $K$ -lipschitzienne.

Soit  $a$  un point de  $D$ . Alors :

$$\forall x \in D \quad |f(x) - f(a)| \leq K|x - a| \tag{1}$$

Par théorème d'encadrement, comme  $\lim_{x \rightarrow a} |x - a| = 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x) - f(a)| = 0$ , et donc :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Ainsi  $f$  est continue en  $a$ , et comme ceci est vrai pour tout  $a \in D$  alors  $f$  est continue sur  $D$ .

- Soit  $f$  la fonction carré de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Supposons que  $f$  est  $K$ -lipschitzienne pour un certain réel  $K$ . Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x) - f(0)| \leq K|x - 0|$$

Ceci donne :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \leq K|x|$$

Pour  $x = K + 1$  elle donne  $(K + 1)^2 \leq K(K + 1)$ , donc  $K + 1 \leq K$ , ce qui est une absurdité. Donc  $f$  n'est pas lipschitzienne.

Ainsi il existe une fonction continue non lipschitzienne.

- Soit  $f$  dérivable et  $K$ -lipschitzienne pour un certain réel  $K$ .

Soit  $a$  un élément de  $D$ . L'inégalité (1) donne :

$$\forall x \in D \setminus \{a\} \quad \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| \leq K$$

Comme  $f$  est dérivable en  $a$  alors le membre de gauche tend vers  $f'(a)$  lorsque  $x$  tend vers  $a$ , et donc par théorème de comparaison :

$$\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| = \lim_{x \rightarrow a} K \quad \text{puis} \quad |f'(a)| \leq K$$

Ceci montre que la fonction  $|f'|$  est majorée par  $K$ , donc  $f'$  est bornée.

**13** Cet exercice fait suite au précédent.

Une fonction  $f$  est dite contractante si elle est  $K$ -lipschitzienne pour un réel  $K \in [0, 1[$ .  
Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction contractante.

a. Soit  $g = f - \text{Id}_{\mathbb{R}}$ .

Démontrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f(0) - K|x| - x \leq g(x) \leq f(0) + K|x| - x$$

En déduire les limites de  $g$  en  $\pm\infty$ .

b. Démontrer que  $f$  admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe un réel  $\alpha$  tel que  $f(\alpha) = \alpha$ .

c. Démontrer que ce point fixe est unique.

d. Soit  $(u_n)$  une suite telle :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$ .

Démontrer que cette suite converge vers le point fixe de  $f$ .

a. Comme  $f$  est  $K$ -lipschitzienne alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $|f(x) - f(0)| \leq K|x|$ .

Ceci donne :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(0) - K|x| \leq f(x) \leq f(0) + K|x|$$

On en déduit bien :

$$f(0) - K|x| - x \leq g(x) \leq f(0) + K|x| - x$$

Si  $x$  est positif alors  $|x| = x$  donc :

$$\forall x \geq 0 \quad g(x) \leq f(0) - (1 - K)x$$

Comme  $K \in [0, 1[$  alors  $(1 - K) > 0$  et donc par théorème de comparaison  $g$  tend vers  $-\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

De même  $g$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$ .

b. L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. Par somme  $g$  est continue, donc l'image de  $\mathbb{R}$  par  $g$  est un intervalle. D'après la question précédente il n'est ni minoré ni majoré, donc  $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ .

Comme  $0 \in \mathbb{R}$  alors il admet un antécédent par  $g$ , donc il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $f(\alpha) = \alpha$ .

c. Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux points fixes de  $f$ . Alors  $f(\alpha) = \alpha$  et  $f(\beta) = \beta$ . Or :

$$|f(\alpha) - f(\beta)| \leq K|\alpha - \beta|$$

Ceci donne  $|\alpha - \beta| \leq K|\alpha - \beta|$ . Si  $|\alpha - \beta|$  n'est pas nul alors  $1 \leq K$ , alors que  $K$  est supposé strictement inférieur à 1. Cette contradiction montre que  $\alpha = \beta$ .

d. Comme  $f$  est  $K$ -lipschitzienne,  $u_{n+1} = f(u_n)$  et  $f(\alpha) = \alpha$  alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq K|u_n - \alpha|$$

On démontre par récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| \leq K^n|u_0 - \alpha|$

Comme  $|K| < 1$  alors  $(K^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0, par théorème d'encadrement la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\alpha$ .

**14** Soit  $a, b$  deux réels tels que  $a < b$ .

- a. Soit  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  continue. Démontrer que  $f$  possède un point fixe.  
 b. Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Démontrer qu'il existe  $c \in [a, b]$  tel que :

$$5f(c) = 2f(a) + 3f(b)$$

- a. On pose pour tout  $x \in [a, b]$  :  $g(x) = f(x) - x$

La fonction  $f$  est continue, ainsi que la fonction  $x \mapsto x$ , donc par somme la fonction  $g$  est continue.

Comme  $f$  est à valeurs dans l'intervalle  $[a, b]$  alors  $f(a) \geq a$  et  $f(b) \leq b$ , donc  $g(a) = f(a) - a \geq 0$  et  $g(b) = f(b) - b \leq 0$ .

Ainsi :

- $g$  est continue sur l'intervalle  $[a, b]$ ,
- $g(a)$  et  $g(b)$  sont de signes distincts.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $\alpha \in [a, b]$  tel que  $g(\alpha) = 0$ .

Ceci donne  $f(\alpha) = \alpha$ .

- b. Pour tout  $x \in [a, b]$  on pose :

$$g(x) = 5f(x) - 2f(a) - 3f(b)$$

La fonction  $g$  est continue car  $f$  est continue.

On calcule  $g(a) = 3(f(a) - f(b))$  et  $g(b) = 2(f(b) - f(a))$ , donc  $g(b) = -\frac{3}{2}g(a)$ , ce qui montre que  $g(a)$  et  $g(b)$  sont de signes opposés.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $g(c) = 0$ , ce qui donne  $5f(c) = 2f(a) + 3f(b)$ .

**15** Démontrer que :

- a. Il existe une infinité de réels  $x$  tels que  $\tan x = x$ .  
 b. Il existe une infinité de réels  $x$  tels que  $\cos x = e^x$ .

- a. La fonction  $f : x \mapsto \tan x - x$  est définie et continue sur le domaine de définition de la tangente, donc sur chaque intervalle  $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$  pour  $n \in \mathbb{Z}$ .

Ses limites sur chacun de ces intervalles sont  $-\infty$  et  $+\infty$  donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'image de chacun de ces intervalles est  $\mathbb{R}$ .

Ainsi pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  il existe  $x_n \in \left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$  tel que  $\tan x_n = x_n$ .

Les  $x_n$  sont distincts car les intervalles sont disjoints.

- b. Soit  $f(x) = \cos x - e^x$ . Alors  $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a  $f(-2n\pi) = 1 - e^{-2n\pi} > 0$  et  $f((-2n-1)\pi) = -1 - e^{-(2n+1)\pi} < 0$ .

On conclut grâce au théorème des valeurs intermédiaires.



**18** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue non constante telle que  $f(a) = f(b)$ .

Soit  $y$  un élément non extremum de  $f([a, b])$ .

Démontrer que  $y$  admet au moins deux antécédents par  $f$ .

Par énoncé  $y \in ]m, M[$ .

Si  $y > f(a)$  alors  $M > f(a)$ , soit  $c$  un antécédent de  $M$ . On applique le théorème des valeurs intermédiaires sur  $[a, c]$  et sur  $[c, b]$ .

Si  $y < f(a)$  on procède de même avec un antécédent de  $m$ .

**20** Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , continue et périodique.

a. Démontrer que  $f$  est bornée.

b. On suppose que  $f$  admet une limite en  $+\infty$ . Que dire de  $f$  ?

Indication : utiliser une suite.

Soit  $T$  une période de  $f$ . Alors  $T > 0$ .

a. Comme  $f$  est continue et  $[0, T]$  est un segment alors  $f$  est bornée sur  $[0, T]$ .

Comme  $f$  est périodique de période  $T$  alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$  les valeurs de  $f$  sur l'intervalle  $[nT, (n+1)T]$  sont les mêmes que sur l'intervalle  $[0, T]$ . Donc  $f$  est bornée sur  $[nT, (n+1)T]$ .

Ainsi  $f$  est bornée sur  $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [nT, (n+1)T]$  donc sur  $\mathbb{R}$ .

b. Soit  $\ell$  la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

Soit  $x$  un réel, et pour tout  $n \in \mathbb{N} : u_n = x + nT$ . Comme  $f$  est  $T$ -périodique alors  $f(u_n) = f(x)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

De plus  $\lim u_n = +\infty$  donc par composition de limites  $\lim f(u_n) = \ell$ . Or la suite  $f(u_n)$  est constante égale à  $f(x)$  donc  $f(x) = \ell$ .

La fonction  $f$  est donc constante égale à  $\ell$ .

**21** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $[0, 1]$  telles que  $f > g$ .

a. Démontrer qu'il existe un réel  $a$  strictement positif tel que :

$$\forall x \in [0, 1] \quad f(x) \geq g(x) + a$$

b. Montrer que ce résultat est faux si on remplace  $[0, 1]$  par  $]0, 1[$ .

a. Soit  $h = f - g$ . Alors  $h$  est continue et strictement positive sur  $[0, 1]$ .

Comme  $[0, 1]$  est un segment alors  $h$  est bornée sur ce segment est atteint son minimum. Soit  $a$  ce minimum. Il existe donc  $x_0 \in [0, 1]$  tel que  $h(x_0) = a$ . Comme  $h > 0$  alors  $a > 0$ . Pour tout  $x \in [0, 1]$  on a  $h(x) \geq h(x_0) = a$ , donc  $f(x) \geq g(x) + a$ .

b. Soit  $f(x) = x$  et  $g(x) = 0$ . Alors  $f(x) > g(x)$  sur  $]0, 1[$ , mais on n'a pas  $f(x) \geq g(x) + a$  pour un  $a > 0$  car  $f(x) - g(x) = x \in ]0, 1[$ .

**22** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

- Démontrer que si  $f(0) < 0$  et  $f$  admet une limite strictement positive en  $+\infty$  alors il existe  $c \in \mathbb{R}_+$  tel que  $f(c) = 0$ .
- Démontrer que si  $f$  tend vers  $+\infty$  en  $\pm\infty$  alors  $f$  admet un minimum.
- Démontrer que si  $f$  tend vers 0 en  $\pm\infty$  et  $f$  prend au moins une valeur strictement positive et une valeur strictement négative alors  $f$  est bornée et atteint ses bornes.

a. Méthode 1. Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  alors par définition de la limite :

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists B \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [a, +\infty[ \quad (x \geq B \implies f(x) \leq A)$$

En particulier pour  $A = -1$ , on obtient qu'il existe  $b \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall x \in [a, +\infty[ \quad (x \geq b \implies f(x) \leq -1)$$

Posons  $d = \max\{a, b\}$ . Alors  $d \in [a, +\infty[$  et  $d \geq b$ , donc  $f(d) \leq -1$ .

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme

- $f$  est continue sur l'intervalle  $[a, d]$
- $f(a) > 0$  et  $f(d) < 0$

alors il existe  $c \in ]a, d[$  tel que  $f(c) = 0$ .

Comme  $a < c < d$  alors  $c$  appartient bien à l'intervalle  $[a, +\infty[$ .

Méthode 2. Par corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. En conséquence  $f([a, +\infty[)$  est un intervalle.

Comme  $f(a) > 0$  alors cet intervalle contient au moins un réel positif.

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  alors cet intervalle n'est pas minoré.

Il contient donc au moins un réel négatif.

L'intervalle  $f([a, +\infty[)$  contient un réel positif et un réel négatif, c'est un intervalle, donc il contient 0.

Ainsi il existe  $c \in [a, +\infty[$  tel que  $f(c) = 0$ .

b. Soit  $A = f(0) + 1$ .

Comme  $\lim_{-\infty} f = +\infty$  et  $\lim_{+\infty} f = +\infty$  alors il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que :

$$\forall x \leq a \quad f(x) \geq A \quad \text{et} \quad \forall x \geq b \quad f(x) \geq A$$

Ainsi  $f$  est minorée par  $A$  sur le voisinage  $]-\infty, a]$  de  $-\infty$  et le voisinage  $[b, +\infty[$  de  $+\infty$ .

Ces deux voisinages ne contiennent pas 0, donc  $[a, b]$  est non-vide. Comme  $f$  est continue alors son image par  $f$  est un segment  $[m, M]$ .

De plus  $m \leq f(0) < A$  donc  $m$  minore  $f$  sur  $\mathbb{R}$  et  $m$  est atteint.

c. Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $f(a) > 0$  et  $f(b) < 0$ .

Soit  $\varepsilon = \frac{1}{2} \min\{f(a), -f(b)\}$ .

Comme  $f(a)$  et  $-f(b)$  sont strictement positifs, alors  $\varepsilon$  est strictement positif :  $\varepsilon > 0$

Comme  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$  et  $\varepsilon > 0$  alors par définition de la limite :

$$\begin{aligned} \exists c \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x \leq c &\implies |f(x)| \leq \varepsilon \\ \exists d \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x \geq d &\implies |f(x)| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

On sait que  $\varepsilon \leq \frac{1}{2}f(a)$  et  $\varepsilon \leq -\frac{1}{2}f(b)$ . On en déduit :  $\frac{1}{2}f(b) \leq -\varepsilon$  et  $\varepsilon \leq \frac{1}{2}f(a)$   
Ainsi pour tout réel  $x$  :

$$x \in ]-\infty, c] \cup [d, +\infty[ \quad \frac{1}{2}f(b) \leq f(x) \leq \frac{1}{2}f(a)$$

Ceci montre que  $a$  et  $b$  n'appartiennent pas à l'ensemble  $]-\infty, c] \cup [d, +\infty[$ , donc  $a \in [c, d]$  et  $b \in [c, d]$ .

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment,  $f$  est continue, donc  $f([a, d])$  est un segment, que nous notons  $[m, M]$ .

Comme  $a$  et  $b$  appartiennent au segment  $[c, d]$  alors :

$$m \leq f(b) < 0 < f(a) \leq M$$

On en déduit, pour tout réel  $x$  :

$$\begin{array}{ll} \text{Si } x \in ]-\infty, c] \cup [d, +\infty[ & \text{alors } m \leq f(b) < \frac{1}{2}f(b) \leq f(x) \leq \frac{1}{2}f(a) < f(a) \leq M \\ \text{Si } x \in [c, d] & \text{alors } m \leq f(x) \leq M \end{array}$$

La fonction  $f$  est donc bornée sur  $\mathbb{R}$ . Comme  $m$  et  $M$  appartiennent à l'image du segment  $[c, d]$  par  $f$  alors il existe deux réels  $x_1$  et  $x_2$  dans ce segment tels que  $f(x_1) = m$  et  $f(x_2) = M$ .

Donc  $f$  est bornée et atteint ses bornes.

**23** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(x) - f(y)| \geq |x - y|$$

Démontrer que  $f$  est bijective.

Si  $f(x) = f(y)$  alors  $x = y$ , donc  $f$  est injective.

Or  $f$  est continue. Par théorème, comme  $f$  est continue et bijective sur l'intervalle  $\mathbb{R}$  alors  $f$  est strictement monotone.

Si  $f$  est croissante alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (x \geq 0 \implies f(x) \geq f(0) + x) \quad \text{et} \quad (x \leq 0 \implies f(x) \leq f(0) + x)$$

Si  $f$  est décroissante alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (x \geq 0 \implies f(x) \leq f(0) - x) \quad \text{et} \quad (x \leq 0 \implies f(x) \geq f(0) - x)$$

Dans les deux cas les limites en  $\pm\infty$  sont  $\pm\infty$ .

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle, donc  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , et ainsi  $f$  est surjective.

En conclusion  $f$  est bijective de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

**24** Soit  $a, b, c, d$  quatre réels tels que  $a < b$  et  $c < d$ . Soit  $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$  croissante et surjective.

Démontrer que  $f$  est continue.

*On pourra utiliser la théorème de la limite monotone.*

On démontre que  $f$  est continue à gauche, la démonstration de la continuité à droite est similaire.

Soit  $x_0 \in ]a, b]$ , et  $y_0 = f(x_0)$ .

La fonction  $f$  est croissante majorée sur  $[a, x_0[$ , donc elle admet une limite finie  $\ell$  à gauche en  $x_0$ , et cette limite est la borne supérieure de  $f$  sur l'intervalle  $[a, x_0[$  :

$$\ell = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ <}} f(x) = \text{Sup}_{[a, x_0[} f$$

On a alors  $c \leq \ell \leq y_0$ .

En effet par croissance de  $f$  :

$$\forall x \in [a, x_0] \quad f(a) \leq f(x) \leq f(x_0)$$

Comme  $f(a) \in [c, d]$  alors  $f(a) \geq c$ , et donc  $c \leq f(x) \leq y_0$ , ce qui donne par théorème de comparaison  $c \leq \ell \leq y_0$ .

On suppose que  $\ell < y_0$  et on pose  $y_1 = \frac{\ell + y_0}{2}$ .

Alors  $y_1 \in [c, y_0] \subseteq [c, d]$ . Comme  $f$  est surjective alors  $y_1$  admet un antécédent  $x_1$  par  $f$ .

Si  $x_1 < x_0$  alors  $f(x_1) \leq \ell$  car  $\ell$  est la borne supérieure de  $f$  sur l'intervalle  $[a, x_0[$ .

Si  $x_1 \geq x_0$  alors  $f(x_1) \geq f(x_0) = y_0$  par croissance de  $f$ .

Or  $f(x_1) = y_1 = \frac{\ell + y_0}{2}$ , donc  $\ell < y_1 < y_0$ . Dans les deux cas on obtient une contradiction.

Cette contradiction montre que  $\ell = y_0$ , donc  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0)$ .

Ainsi  $f$  est continue à gauche en  $x_0$ .

Ceci est valable pour tout  $x_0 \in ]a, b]$ , donc  $f$  est continue à gauche sur  $]a, b]$ .

On démontre de même que  $f$  est continue à droite sur  $[a, b]$ , donc finalement  $f$  est continue.