

## Corrigé partiel du T. D. B7

### Polynômes

① Calculer la division euclidienne de  $A$  par  $B$  dans les cas suivants :

- a.  $A = X^3 + 3X^2 + X - 3$        $B = X + 5$   
 b.  $A = 2X^4 + 4X^3 - 5X + 1$        $B = 2X^2 + 1$   
 c.  $A = 3X^2 + 6X + 5$        $B = iX + 1 + i$

a. On obtient :  $Q = X^2 - 2X + 11$      $R = -58$

$$\begin{array}{r|l}
 X^3 + 3X^2 + X - 3 & X + 5 \\
 \underline{X^3 + 5X^2} & \\
 -2X^2 & \\
 \underline{-2X^2 - 10X} & \\
 11X & \\
 \underline{11X + 55} & \\
 -58 & 
 \end{array}$$

b. On obtient :  $Q = X^2 + 2X - \frac{1}{2}$      $R = -7X + \frac{3}{2}$

$$\begin{array}{r|l}
 2X^4 + 4X^3 - 5X + 1 & 2X^2 + 1 \\
 \underline{2X^4 + X^2} & \\
 4X^3 - X^2 & \\
 \underline{4X^3 + 2X} & \\
 -X^2 - 7X & \\
 \underline{-X^2 - \frac{1}{2}} & \\
 -7X + \frac{3}{2} & 
 \end{array}$$

c. On obtient :  $Q = -3iX + (3 - 3i)$      $R = -1$

$$\begin{array}{r|l}
 3X^2 + 6X + 5 & iX + 1 + i \\
 \underline{3X^2 + (3 - 3i)X} & \\
 (3 + 3i)X & \\
 \underline{(3 + 3i)X + 6} & \\
 -1 & 
 \end{array}$$

② L'algorithme de Hörner évalue un polynôme de degré  $n$  en un scalaire  $x$  grâce à la formule :

$$P(x) = (\cdots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \cdots + a_0)$$

- Programmer l'algorithme de Hörner en **Python**.
- Compter le nombre d'opérations nécessaires pour spécialiser un polynôme de degré  $n$  avec cet algorithme, puis avec l'algorithme naïf. Comparer ces deux méthodes.

```
def Specialisation(P,x):
    """Évalue le polynôme P en x en utilisant l'algorithme de Hörner."""
    y=P[-1]
    for k in range(len(P)-2,-1,-1):
        y*=x
        y+=P[k]
    return y
```

On obtient pour complexités  $2n$  et  $\frac{n(n+3)}{2}$ , donc en  $O(n)$  et  $O(n^2)$  respectivement, ce qui montre que l'algorithme de Hörner est plus efficace en temps.

③ Soit  $P = X^7(X - 3)^3$ .

Calculer  $P^{(9)}$  en utilisant la formule de Leibniz.

On obtient  $P^{(9)} = 10!X - 3 \times 9!$ , ce qui se vérifie directement.

④ Appliquer la formule de Taylor pour

- $P = 2X^2 + 7X + 7$  en  $a = -2$
  - $Q = X^3 - 9X^2 + 26X - 24$  en  $a = 3$
- Résoudre l'équation :  $Q(X) = 0$

a.  $P = 1 - (X + 2) + 2(X + 2)^2$

b.  $P = (X + 3)^3 - (X + 3)$

On calcule  $P = (X + 2)(X + 3)(X + 4)$ , donc les racines sont 2, 3 et 4.

⑤ Résoudre l'équation :

$$x^5 - x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 12x = 0$$

$$P = X(X - 2)(X^3 + X^2 - 4X + 6) = X(X - 2)(X + 3)(X^2 - 2X + 2)$$

Les racines sont 0, 2,  $-3$ ,  $1 + i$  et  $-i$ .

⑥ Factoriser :

$$P = 2X^6 + 7X^5 + X^4 - 14X^3 - 8X^2 + 7X + 5$$

Pour ceci, trouver deux racines évidentes et déterminer leurs ordres de multiplicité.

On obtient  $P = (X - 1)^2(X + 1)^3(2X + 5)$ .

⑦ Résoudre le système :

$$\begin{cases} xy = 24 \\ x^2 + y^2 = 73 \end{cases}$$

Le système implique  $(x + y)^2 = 73 + 2 \times 24 = 121$ , donc  $x + y = \pm 11$ .

Ainsi  $x$  et  $y$  sont les racines des polynômes  $X^2 \pm 11X + 24$

Solutions :  $\{3, 8\}$  et  $\{-3, -8\}$

⑧ En considérant le polynôme unitaire dont  $x, y, z$  sont les racines, résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ xy + xz + yz = -16 \\ xyz = 20 \end{cases}$$

$x, y, z$  sont les racines de  $P = X^3 + X^2 + 6X - 20 = (X + 2)(X^2 - 3X - 10)$ .

Les solutions sont  $\{x, y, z\} = \{-2, -2, 5\}$ .

⑨ Factoriser le polynôme :

$$P = X^3 - (1 + 6i)X - (6 - 2i)$$

On obtient  $P = (X - i)(X^2 + iX - (2 + 6i)) = (X - i)(X - 2 - i)(X + 2 + 2i)$ .

⑩ Calculer le PGCD de  $A$  et  $B$  dans les cas suivants :

- a.  $A = X + 2$                        $B = 6X + 11$   
 b.  $A = 4X^2 - 1$                      $B = 2X^2 + 5X - 3$   
 c.  $A = 2X^3 - X^2 - X - 3$          $B = 4X^2 + 4X - 15$   
 d.  $A = X^n - \alpha^n$                      $B = (X - \alpha)^n$   
 avec  $(\alpha, n) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{N}^*$

- a. 1      b.  $X - \frac{1}{2}$       c.  $X - \frac{3}{2}$       d.  $X - \alpha$

⑪ Déterminer des coefficients de Bézout pour :

$$A = (X - 4)(X - 1) \quad \text{et} \quad B = (X - 2).$$

$U = -\frac{1}{2}$  et  $V = \frac{1}{2}(X - 3)$  conviennent.

⑫ Soit  $A, B, C$  trois polynômes non-nuls avec  $C$  unitaire.

Démontrer que  $(AC) \vee (BC) = (A \vee B)C$ .

On utilise  $(A \vee B)\mathbb{K}[X] = A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X]$ .

Il faut justifier que si  $P\mathbb{K}[X] = Q\mathbb{K}[X]$  alors  $P$  et  $Q$  sont associés.

On obtient que  $(AC) \vee (BC)$  et  $(A \vee B)C$  sont associés. Comme ils sont unitaires alors ils sont égaux.

**1** Donner la forme développée du polynôme  $P$  puis la forme factorisée du polynôme  $Q$  avec :

$$P = (X^3 + X^2 + X + 1) \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k X^k \quad \text{et} \quad Q = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left( \frac{1}{k+1} + \frac{n+2}{k+2} X \right) X^k$$

On obtient  $P = 1 + X^2 + X^{2n+1} + X^{2n+3}$  et  $Q = (X + 1)^{n+1}$ .

**2** Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de  $A$  par  $B$  dans les cas suivants :

a.  $A = X^6 + 1 \quad B = X^3 + X^2 + X + 1$

b.  $A = 2X^4 - 11X^3 + 7X^2 + 6X - 2$

$B = 2X^2 - 5X + 2$

c.  $A = X^{20} - 2X^{15} + 3X^{10} - 4X^5 + 5$

$B = X^7 + X^2$

d.  $A = X^5 + iX^4 \quad B = X^2 + 1$

e.  $A = 2X^3 - (1+i)X^2 - iX - (1-i)$

$B = iX + 1$

a.  $Q = X^3 - X^2 \quad R = X^2 + 1$

b.  $Q = X^2 - 3X - 5 \quad R = -13X + 8$

c.  $Q = X^{13} - 3X^8 + 6X^3 \quad R = -10X^5 + 5$

d.  $Q = X^3 + iX^2 - X - i \quad R = X + i$

e.  $Q = -2iX^2 + (1+i)X + (i-2) \quad R = 1$

**3** Soit  $n$  un entier naturel,  $\theta$ ,  $a$ ,  $b$  trois scalaires avec  $a \neq b$ .

Déterminer le reste de la division euclidienne de :

a.  $X^n$  par  $(X - a)$ , puis par  $(X - a)(X - b)$ , puis par  $(X - a)^2$

b.  $((\sin \theta)X + \cos \theta)^n$  par  $X^2 + 1$

c.  $X^{2n} + X^n + 1$  par  $X^2 + X + 1$

a. Les restes sont respectivement :

- $R_n = a^n$  (spécialiser en  $a$ )

- $R_n = \frac{1}{a-b} [(a^n - b^n)X - (ba^n - ab^n)] = \frac{1}{a-b} [a^n(X - b) - b^n(X - a)]$

(Spécialiser en  $a$  et en  $b$ )

- $R_n = a^{n-1} [nX + (1-n)a] = na^{n-1}(X - a) + a^n$

(Spécialiser en  $a$ , dériver, spécialiser en  $a$ . Ou utiliser la formule de Taylor).

b.  $R_n = (\sin(n\theta)X + \cos(n\theta))$  (spécialiser en  $\pm i$ ).

c.  $R_n = 3$  si  $n$  est multiple de 3, 0 sinon (spécialiser en  $j$  et  $j^2$ ).

4 On définit la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{2x^3 + 7x^2 - 2x + 5}{x^2 + 6x + 13}$$

Grâce à une division euclidienne :

- Démontrer que  $f$  possède une asymptote en  $\pm\infty$  et en donner une équation.
- Calculer une primitive de  $f$ .

a. La division euclidienne du numérateur par le dénominateur donne :

$$f(x) = 2x - 5 + \frac{2x + 70}{x^2 + 6x + 13}$$

La droite d'équation  $y = 2x - 5$  est donc asymptote à la courbe.

b. On obtient :  $F(x) = x^2 - 5x + \ln(x^2 + 6x + 13) + 32 \arctan \frac{x+3}{2}$

5 Soit  $a, b$  deux réels et  $n$  un entier naturel. Soit  $R = PQ$  avec :

$$P = (X - a)^n \quad \text{et} \quad Q = (X - b)^n$$

- Donner  $P^{(k)}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .
- Calculer  $R^{(n)}$ . Simplifier son expression dans le cas où  $a = b$ .
- En déduire la valeur de :  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$

Obtient :  $\sum_{k=0}^n \left( \binom{n}{k} \right)^2 = \binom{2n}{n}$

6 On considère les polynômes :

$$A = X^9 - X^8 - 4X^7 + 7X^6 + X^5 - 10X^4 + 6X^3 + 3X^2 - 4X + 1$$

$$B = X^5 - X^4 - 2X^3 + 2X^2 + X - 1$$

Factoriser  $B$  et démontrer qu'il divise  $A$ .

$B = (X - 1)^3(X + 1)^2$ , 1 est bien racine triple de  $A$  et  $-1$  est bien racine double de  $A$ .

7 Déterminer un polynôme  $P$  de degré minimal tel que  $P+10$  soit divisible par  $(X-2)^2$  et  $P-12$  soit divisible par  $(X+2)^2$ .

On obtient  $P = \frac{11}{16}X^3 - \frac{33}{4}X + 1$ .

8 À quelle condition nécessaire et suffisante sur  $(\lambda, \mu)$  le polynôme  $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$  est-il divisible par  $(X+2)^2$ ?

On obtient  $\lambda = -\frac{15}{2}$        $\mu = -10$

Le quotient est alors  $Q = X^2 - 3X + (\lambda + 8)$ .

**9** Factoriser dans  $\mathbb{C}[X]$  et dans  $\mathbb{R}[X]$  les polynômes suivants.

$$P_1 = (X^2 - X + 1)^2 + 1$$

$$P_2 = X^4 + X^2 - 6$$

$$P_3 = X^7 - 125X^4 - 16X^3 + 2000$$

$$P_4 = 2X^3 - 2X^2 - 9X - 9$$

$$P_5 = (X^2 + X - 4)^2 + (X - 7)^2$$

$$P_6 = X^5 - 4X^3 + 10X^2 - 13X + 6$$

$$P_1 = (X + i)(X - 1 - i)(X - i)(X - 1 + i)$$

$$= (X^2 + 1)(X^2 - 2X + 2)$$

$$P_2 = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})(X - i\sqrt{3})(X + i\sqrt{3})$$

$$= (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})(X^2 + 3)$$

$$P_3 = (X - 2)(X + 2)(X - 2i)(X + 2i)(X - 5)(X - 5j)(X - 5j^2)$$

$$= (X - 2)(X + 2)(X^2 + 4)(X - 5)(X^2 + 5X + 25)$$

$$P_4 = 2(X - 3)(X + 1 - \frac{i}{\sqrt{2}})(X + 1 + \frac{i}{\sqrt{2}})$$

$$= 2(X - 3)(X^2 + 2X + \frac{3}{2})$$

$$P_5 = (X - 2 + i)(X - 2 - i)(X + 3 + 2i)(X + 3 - 2i)$$

$$= (X^2 - 4X + 5)(X^2 + 6X + 13)$$

$$P_6 = (X - 1)^2(X + 3)(X - \frac{1+i\sqrt{7}}{2})(X - \frac{1-i\sqrt{7}}{2})$$

$$= (X - 1)^2(X + 3)(X^2 - X + 2)$$

**10** Factoriser dans  $\mathbb{C}[X]$  et dans  $\mathbb{R}[X]$  les polynômes suivants.

$$P_1 = X^6 - 1$$

$$P_2 = X^3 + 1$$

$$P_3 = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$$

$$P_4 = X^4 + X^2 + 1$$

$$P_5 = X^8 - 1$$

$$\begin{aligned} P_1 &= \prod_k (X - e^{ik\frac{\pi}{3}}) \quad k = 0, \dots, 5 \\ &= (X - 1)(X + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2 &= (X + 1)(X + j)(X + j^2) \\ &= (X + 1)(X^2 - X + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3 &= (X + 1)(X - j)(X + j)(X - j^2)(X + j^2) \\ &= (X + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_4 &= (X - \zeta)(X - \zeta^2)(X - \zeta^4)(X - \zeta^5) \quad \zeta = e^{i\frac{\pi}{3}} \\ &= (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_5 &= \prod_k (X - e^{ik\frac{\pi}{4}}) \quad k = 0, \dots, 7 \\ &= (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1) \end{aligned}$$

**11** Soit  $n$  un entier strictement supérieur à 2 et :

$$P_n = X^n - nX + 1$$

- Démontrer que  $P_n$  n'a que des racines simples.
- Déterminer le nombre de ses racines réelles en fonction de  $n$ .

a.  $P'_n = nX^{n-1} - n$ , ses racines sont les  $\zeta \in \mathbb{U}_{n-1}$ .

$$P_n(\zeta) = (1 - n)\zeta + 1 \neq 0$$

b. Si  $n$  est pair,  $P_n$  a deux racines, si  $n$  est impair  $P_n$  a trois racines.

**12** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Démontrer que  $1 + X + X^n$  n'a que des racines simples.

Les racines  $\zeta$  de  $P'$  vérifient  $\zeta^{n-1} = \frac{1}{n}$ , elles ne peuvent être racines de  $P$ .

**13** Déterminer tous les polynômes vérifiant :

- $P \circ P = P$
- $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$
- $P(X + 1) = P(X)$
- $(X + 3)P(X) = XP(X + 1)$
- $P'^2 = 4P$
- $(X^2 + 1)P'' - 6P = 0$

- $X$  et  $a_0 \in \mathbb{K}$
- $P = \lambda(X^2 - 1)$  avec  $\lambda \in \mathbb{K}$ .
- $P = a_0 \in \mathbb{K}$
- On démontre que  $P = X(X + 1)(X + 2)Q$  puis avec la question précédente :  
 $P = \lambda X(X + 1)(X + 2)$  où  $\lambda \in \mathbb{K}$ .
- $P = 0$  ou  $P = (X + \alpha)^2$  avec  $\alpha \in \mathbb{K}$
- Chercher le coefficient dominant. On obtient  $P = \lambda(X^3 + X)$  avec  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

**14** Soit  $P$  un polynôme non-nul vérifiant l'égalité :

$$(E) : P(X^2) = P(X + 1)P(X).$$

- Démontrer que si  $\alpha$  est une racine de  $P$  alors  $\alpha^{2^n}$  est racine de  $P$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
  - Démontrer que toute racine non-nulle de  $P$  est de module 1.
  - Démontrer que toute racine de  $P$  différente de 1 est élément de  $1 + \mathbb{U}$ .
  - En déduire que seuls 0 et 1 peuvent être racines de  $P$ .
  - En déduire l'ensemble des polynômes vérifiant l'égalité (E).
- Si  $\alpha$  est racine alors  $\alpha^2$  est racine, puis  $\alpha^{2^n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . par récurrence.
  - Comme le nombre de racines est fini, alors il existe  $m$  et  $n$  distincts tels que  $\alpha^{2^m} = \alpha^{2^n}$ , donc  $|\alpha| = 1$ .
  - Si  $\alpha$  est racine, alors  $(\alpha - 1)^2$  est racine, donc nul ou élément de  $\mathbb{U}$ . Donc  $\alpha - 1$  est élément de  $\mathbb{U}$ .
  - Si  $e^{i\frac{\pi}{3}}$  est racine, alors  $j$  est racine, mais  $j$  n'est pas dans  $1 + \mathbb{U}$ . Donc seuls 0 et 1 sont racines.
  - En posant  $P = \lambda X^a(X - 1)^b$ , on obtient  $\lambda = 0$  ou 1 et  $a = b$ , donc  $P = [X(X - 1)]^a$ , ou  $P = 0$ .



**15** Démontrer que, pour tout  $P \in \mathbb{K}[X]$  :

$$P(X+1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(X)}{k!}$$

Utiliser la formule du binôme pour  $X^n$ , puis la linéarité.

Sinon on raisonne par récurrence sur  $n = \deg P$ , en posant  $P = a_n X^n + Q$ .

On peut aussi appliquer la formule de Taylor.

**16** Résoudre l'équation

$$x^3 - 8x^2 + 23x - 28 = 0$$

sachant que la somme de deux des solutions est égale à la troisième.

On obtient  $\mathcal{S} = \{4, 2 \pm i\sqrt{3}\}$ .

**17** Factoriser le polynôme

$$8X^3 - 12X^2 - 2X + 3$$

sachant que ses racines sont en progression arithmétique.

On obtient  $P = (2X+1)(2X-1)(2X-3)$ .

**18** Soit  $a, b, c$  trois scalaires et  $\alpha, \beta, \gamma$  les trois racines du polynôme  $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ .

a. Exprimer  $\alpha + \beta + \gamma$ ,  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$  et  $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$  en fonction de  $a, b, c$ .

b. Application : résoudre le système

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 29 \\ x^3 + y^3 + z^3 = -29 \end{cases}$$

a. On obtient  $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -a \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = a^2 - 2b \\ \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -a^3 + 3ab - 3c \end{cases}$

b.  $a = -1, b = -14, c = 24$ , donc  $x, y, z$ , sont les racines de

$$P = X^3 - X^2 - 14X + 24 = (X-2)(X^2 + X - 12)$$

Solutions :  $\{x, y, z\} = \{2, 3, -4\}$ .

**19** Déterminer tous les réels  $x, y, z$  tels que :

$$x + y + z = xy + xz + yz = 3$$

Les scalaires  $x, y, z$  sont racines d'un polynôme  $P = X^3 - 3X^2 + 3x + a$  où  $a$  est un réel.

On calcule  $P = (X-1)^3 + a + 1$ .

Les racines complexes sont donc  $1 - \sqrt[3]{a+1}, 1 - j\sqrt[3]{a+1}, 1 - j^2\sqrt[3]{a+1}$ .

Comme  $x, y, z$  sont réels alors  $a = -1$  obligatoirement donc  $x = y = z = 1$ .

**20** Soit  $A$  et  $B$  deux polynômes.

- Démontrer que :  $A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] = (A \wedge B)\mathbb{K}[X]$
- Soit  $C$  un autre polynôme. A-t-on :  $(AC) \wedge (BC) = (A \wedge B)C$  ?

a. Inclusion directe : si un polynôme s'écrit  $AU + BV$  alors il est multiple de  $A \wedge B$ .

Inclusion indirecte : utiliser la relation de Bézout.

b. En utilisant la question précédente on démontre que les polynômes  $(AC) \wedge (BC)$  et  $(A \wedge B)C$  sont associés.

Ils sont égaux si et seulement si  $C$  est unitaire.

**21** Soit  $m$  et  $n$  deux entiers naturels non-nuls, soit  $r$  le reste de la division euclidienne de  $n$  par  $m$ , et  $d = n \wedge m$ .

a. Soit  $A, B, C$  trois polynômes. On suppose qu'il existe un polynôme  $V$  tel que  $A + BV + C = 0$ . Démontrer que  $A \wedge B = B \wedge C$ .

b. Démontrer que  $X^m - 1$  divise  $X^n - X^r$ .

En déduire que  $X^r - 1$  est le reste de la division euclidienne de  $X^n - 1$  par  $X^m - 1$ .

c. Démontrer que :

$$(X^n - 1) \wedge (X^m - 1) = (X^m - 1) \wedge (X^r - 1)$$

puis que  $(X^n - 1) \wedge (X^m - 1) = (X^d - 1)$ .

a. On démontre que  $A \wedge B$  et  $B \wedge C$  sont diviseurs l'un de l'autre, donc associés, puis ils sont unitaires.

b.  $X^n - X^r = X^r(X^{qm} - 1)$  et  $X^m - 1$  divise  $X^{qm} - 1$ .

Ensuite  $X^n - 1 = X^r(X^{qm} - 1) + X^r - 1$ .

c. On utilise la question précédente puis l'algorithme d'Euclide.

**22** Soit  $m$  et  $n$  deux entiers naturels non-nuls, et  $d = m \wedge n$ .

a. Soit  $a$  un diviseur de  $n$ . Justifier que  $\mathbb{U}_a \subseteq \mathbb{U}_n$ .

b. Démontrer que  $\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_m = \mathbb{U}_d$ .

c. En déduire que  $(X^n - 1) \wedge (X^m - 1) = (X^d - 1)$ .

a. Comme  $a$  divise  $n$  alors :  $\zeta^a = 1 \implies \zeta^n = 1$ .

b. L'inclusion indirecte est conséquence de la question précédente.

L'inclusion directe se démontre grâce à la relation de Bézout.

c. On utilise  $(X^n - 1) = \prod_{\zeta \in \mathbb{U}_n} (X - \zeta)$ .

Les racines communes de  $X^n - 1$  et  $X^m - 1$  sont les éléments de  $\mathbb{U}_d$ .

**23** Soit  $A_1, \dots, A_n$  une famille de polynômes premiers entre eux deux à deux. Pour tout  $k = 1, \dots, n$  on pose :

$$B_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n A_i$$

Démontrer que les polynômes  $B_1, \dots, B_n$  sont premiers entre eux dans leur ensemble.

Soit  $P$  irréductible divisant tous les  $B_k$ . Alors il divise  $B_1$ , donc il existe  $i \neq 1$  tel que  $P$  divise  $A_i$ .

Mais  $P$  divise  $B_i$ , donc il existe  $j \neq i$  tel que  $P$  divise  $A_j$ . Donc  $P$  divise  $A_i \wedge A_j$ , ce qui impose  $P = 1$ .

**24 Polynômes de Tchebychev**

Soit  $(P_n)$  la suite de polynômes définie par  $P_0 = 1$ ,  $P_1 = X$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$$

- Calculer  $P_n$  pour  $n$  compris entre 0 et 5.
- Déterminer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le degré de  $P_n$ .
- Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(nx) = P_n(\cos x)$$

- Quelles sont les racines du polynôme  $P_n$  ?

- $P_2 = 2X^2 - 1$      $P_3 = 4X^3 - 3X$      $P_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$      $P_5 = 16X^5 - 20X^3 + 5X$
- On démontre par récurrence double :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \deg P_n = n$
- On utilise encore une démonstration par récurrence double.
- Les  $n$  racines de  $P_n$  sont  $\cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)$  pour  $k$  allant de 0 à  $n - 1$ , donc les cosinus de  $\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}, \dots, \frac{(2n-1)\pi}{2n}$ .

**25** Polynômes d'interpolation de Lagrange

Soit  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  trois scalaires distincts et :

$$P_0 = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)$$

$$P_1 = (X - \alpha_0)(X - \alpha_2)$$

$$P_2 = (X - \alpha_0)(X - \alpha_1)$$

a. Calculer  $P_i(\alpha_j)$  pour tous  $i$  et  $j$  allant de 0 à 2.

Pour tout  $i = 0, 1, 2$  on pose :  $L_i = P_i/P_i(\alpha_i)$

b. Démontrer que pour tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{K}_2[X]$  :

$$P = \sum_{i=0}^2 P(\alpha_i)L_i$$

c. Soit  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$  trois scalaires. Démontrer qu'il existe un et un seul polynôme de degré au plus 2 tel que pour tout  $i = 0, 1, 2$  :  $P(\alpha_i) = \beta_i$ .

d. Application : déterminer l'unique parabole passant par les points de coordonnées  $(-1, 1), (2, 1), (4, 11)$ .

a.  $P_i(\alpha_j) = 0$  si  $i \neq j$ , sinon  $P_0(\alpha_0) = (\alpha_0 - \alpha_1)(\alpha_0 - \alpha_2)$ , etc.

b. Par définition des  $L_i$  :  $L_i(\alpha_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Posons  $Q = \sum_{i=0}^2 P(\alpha_i)L_i$ . Alors  $Q(\alpha_i) = P(\alpha_i)$  pour  $i = 0, 1, 2$ .

Le polynôme  $P - Q$  est de degré au plus 2 et admet au moins trois racines donc il est nul.

c. Soit  $P = \sum_{k=0}^2 \beta_k L_k$ . Alors  $P$  est de degré au plus 2 et vérifie  $P(\alpha_i) = \beta_i$  pour tout  $i = 0, 1, 2$ .

Ceci démontre l'existence.

Si  $P$  est un polynôme de degré au plus 2 vérifiant  $P(\alpha_i) = \beta_i$  pour tout  $i = 0, 1, 2$ ,

alors  $P = \sum_{k=0}^2 \beta_k L_k$  d'après la question précédente.

Ceci démontre l'unicité.

d. D'après la question précédente le polynôme  $P = L_0 + L_1 + 11L_2$  convient.

On obtient  $P = X^2 - X - 1$ .