Corrigé partiel du T. D. B8
Espaces vectoriels

5 Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.
Donner une condition nécessaire et suffisante pour avoir l'égalité $F = F + G$.

On démontre que pour tous sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E :

$$F = F + G \qquad \Longleftrightarrow \qquad G \subseteq F$$

Supposons que $F = F + G$.
Soit v un élément de G. Comme $0_E \in F$ alors $0_E + v \in F + G$. Donc $v \in F$.

Supposons que $G \subseteq F$.
L'inclusion $F \subseteq F + G$ est toujours valide.
Réciproquement si $w \in F + G$, alors il existe $u \in F$ et $v \in G$ tels que $w = u + v$.
Comme $G \subseteq F$ alors $v \in F$. Comme F est un sous-espace vectoriel alors il est stable par addition, donc comme u et v appartiennent à F alors $u + v \in F$. Ainsi $w \in F$.
Ceci montre que $F + G \subseteq F$, et donc par double inclusion $F = F + G$.

On a démontré que $F = F + G$ si et seulement si $G \subseteq F$.

6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathcal{T}_n(\mathbb{K}) + \mathcal{T}'_n(\mathbb{K})$.
Cette somme est-elle directe ?

On démontre que $\mathcal{T}_n(\mathbb{K}) + \mathcal{T}'_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Comme $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}'_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\mathcal{T}_n(\mathbb{K}) + \mathcal{T}'_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Démontrons que réciproquement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \subseteq \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) + \mathcal{T}'_n(\mathbb{K})$.
Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire une matrice de taille (n, n) à coefficients dans $\mathbb{K}$. Notons $(m_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ les coefficients de M. Alors $M = T_1 + T_2$ avec

$$T_1 = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & \cdots & m_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & m_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ m_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{n\,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Comme T_1 est triangulaire supérieure et T_2 est triangulaire inférieure alors $M \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) + \mathcal{T}'_n(\mathbb{K})$.

Ceci montre que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \subseteq \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) + \mathcal{T}'_n(\mathbb{K})$, et donc par double inclusion $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) + \mathcal{T}'_n(\mathbb{K})$.

Cette somme n'est pas directe car la décomposition ci-dessus n'est pas unique en général. Par exemple pour $n = 3$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

De façon équivalente cette somme n'est pas directe car :

$$\mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T}'_n(\mathbb{K}) = \mathcal{D}_n(\mathbb{K}) \neq \left\{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}\right\}$$

En effet, une somme $F + G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.

7 Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Soit F l'ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, G l'ensemble des fonctions impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a. Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

b. Démontrer que F et G sont supplémentaires.
(Raisonner par analyse-synthèse.)

a. Démontrons que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

(i) Les fonctions paires ou impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donc F et G sont inclus dans E.

(ii) La fonction nulle $f : x \mapsto 0$ est paire et impaire, car :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(-x) = 0 = f(x) \qquad f(-x) = 0 = -f(x)$$

Ceci montre que $0_E \in F$ et $0_E \in G$.

(iii) Soit f_1 et f_2 deux éléments de F, c'est-à-dire deux fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et λ un réel. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (\lambda f_1 + f_2)(-x) = \lambda f_1(-x) + f_2(-x) = \lambda f_1(x) + f_2(x) = (\lambda f_1 + f_2)(x)$$

Ceci montre que la fonction $\lambda f_1 + f_2$ est paire, *i.e.*, $\lambda f_1 + f_2 \in F$.

De même on démontre que pour toutes fonctions g_1 et g_2 de G et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\lambda g_1 + g_2 \in G$.

Les ensembles F et G sont donc stables par combinaisons linéaires.

D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

b. Démontrons d'abord que $F \cap G = \{0_E\}$.

Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E alors ils contiennent son vecteur nul 0_E, donc $\{0_E\} \subseteq F \cap G$.

Soit $f \in F \cap G$. Alors f est une fonction paire et impaire, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(-x) = f(x) \qquad \text{et} \qquad f(-x) = -f(x)$$

Ceci montre que $f(x) = -f(x)$, donc $f(x) = 0$, ceci pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc f est la fonction nulle.
On a démontré que $F \cap G \subseteq \{0_E\}$, donc par double inclusion $F \cap G = \{0_E\}$.

Démontrons maintenant que $F + G = E$.

Comme F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E, et donc $F + G \subseteq E$.

Soit $h \in E$. Définissons

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{h(x)+h(-x)}{2} \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{h(x)-h(-x)}{2} \end{array}$$

On calcule que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(-x) = f(x) \qquad g(-x) = -g(x) \qquad f(x) + g(x) = h(x)$$

Ceci montre que f est paire, g est impaire, et $h = f + g$.
Ainsi $f \in F$, $g \in G$, et $h \in F + G$.
On a démontré que $E \subseteq F + G$. Par double inclusion $E = F + G$.

Finalement, par théorème, comme $F \cap G = \{0_E\}$ et $F + G = E$ alors F et G sont supplémentaires dans E : $\quad E = F \oplus G$.

Remarque. Les fonctions f et g ci-dessus peuvent être obtenues par analyse.
En effet, si la fonction h (quelconque) s'écrit $h = f + g$ avec f paire et g impaire, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad h(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{et} \qquad h(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) - g(x)$$

En en déduit par somme et soustraction :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad 2f(x) = h(x) + h(-x) \qquad \text{et} \qquad 2g(x) = h(x) - h(-x)$$

Ainsi les fonctions $f : x \mapsto \frac{1}{2}(h(x) + h(-x))$ et $g : x \mapsto \frac{1}{2}(h(x) - h(-x))$ sont imposées.
Il reste à vérifier que f est paire, g est impaire, et $h = f + g$.
Ceci montre également l'unicité de la décomposition, rendant superflue la démonstration de $F \cap G = \{0_E\}$.

12 Soit : $E = \mathbb{R}^2 \qquad u_1 = (2,1) \qquad u_2 = (1,2)$.

a. Démontrer que (u_1, u_2) est une base de E.

b. Calculer les coordonnées dans cette base des vecteurs $v = (13,11)$ et $w = (-5,1)$.

a. Pour démontrer que la famille (u_1, u_2) est une base de E on démontre que tout vecteur de E s'exprime de façon unique comme combinaison linéaire de u_1 et u_2.

On aurait aussi pu démontrer que la famille (u_1, u_2) est libre et génératrice, comme dans les deux exercices suivants.

Soit $u = (x, y)$ un élément de E. Soit λ_1 et λ_2 deux scalaires. Alors par équivalences :

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \iff (x,y) = \lambda_1(2,1) + \lambda_2(1,2) \iff \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = x \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = y \end{cases}$$

Ce système est de Cramer car son déterminant est égal à 3, donc il admet une unique solution.

On en déduit :

$$\forall u \in E \quad \exists!(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \quad u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$$

Ceci signifie que la famille (u_1, u_2) est une base de E.

b. Pour déterminer les coordonnées des vecteurs v et w on résout le système ci-dessus avec $(x, y) = (13, 11)$ puis $(x, y) = (-5, 1)$.

Dans le cas général on obtient, après calcul :

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = x \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = y \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{3}(2x - y) \\ \lambda_2 = \frac{1}{3}(-x + 2y) \end{cases}$$

On obtient $(\lambda_1, \lambda_2) = (5,3)$ pour $(x,y) = (13,11)$ puis $(\lambda_1, \lambda_2) = \left(-\frac{11}{3}, \frac{7}{3}\right)$ pour $(x,y) = (-5,1)$.

Les coordonnées de v et de w dans la base $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ sont donc respectivement $(5,3)$ et $\left(-\frac{11}{3}, \frac{7}{3}\right)$.

On peut vérifier ceci. Par exemple :

$$5u_1 + 3u_2 = 5(2,1) + 3(1,2) = (10,5) + (3,6) = (13,11) = v$$

13 Soit $E = \mathbb{R}^4$. On note $\mathcal{B}$ la famille des vecteurs :

$$u_1 = (2,1,0,0) \qquad u_2 = (0,0,0,1)$$
$$u_3 = (1,0,1,1) \qquad u_4 = (0,0,1,0).$$

a. Démontrer que la famille $\mathcal{B}$ est libre.

b. Exprimer les quatre vecteurs de la base canonique de E en fonction des u_i.

c. En déduire que la famille $\mathcal{B}$ est génératrice de E.

d. Déterminer les coordonnées dans cette base des vecteurs :

$$v_1 = (8,2,4,4) \quad \text{et} \quad v_2 = (-1,-2,1,8).$$

a. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ un élément de $\mathbb{R}^4$ tel que :

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = 0_E$$

Alors :

$$(2\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_1, \lambda_3 + \lambda_4, \lambda_2 + \lambda_3) = (0, 0, 0, 0)$$

Ceci donne le système :

$$\begin{cases} 2\lambda_1 \quad + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Après résolution ce système donne : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$

On a donc démontré :

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4 \qquad \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = 0_E \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0_{\mathbb{R}}$$

Ceci signifie exactement que la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est libre.

b. On remarque que $e_3 = u_4$ et $e_4 = u_2$. Ensuite $e_1 = u_3 - u_2 - u_4$, puis :

$$e_2 = u_1 - 2e_1 = u_1 - 2(u_3 - u_2 - u_4) = u_1 + 2u_2 - 2u_3 + 2u_4$$

c. La base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) est une famille génératrice de E car c'en est une base. La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) engendre la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) donc elle engendre E tout entier.

Plus précisément : nous venons de démontrer que e_1, e_2, e_3 et e_4 sont combinaisons linéaires de u_1, u_2, u_3, u_4, ce qui s'écrit :

$$(e_1, e_2, e_3, e_4) \subseteq \text{Vect}\left((u_1, u_2, u_3, u_4)\right)$$

Si $\mathcal{F}$ est une famille de vecteur, alors $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant cette famille. Cette propriété s'énonce :

Pour tout sous-espace vectoriel G si $\mathcal{F} \subseteq G$ alors $\text{Vect}(\mathcal{F}) \subseteq G$

En effet, G est un sous-espace vectoriel de E donc il est stable par combinaisons linéaires.

On en déduit :

$$\text{Vect}\left((e_1, e_2, e_3, e_4)\right) \subseteq \text{Vect}\left((u_1, u_2, u_3, u_4)\right)$$

Or la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est génératrice de E donc :

$$\text{Vect}\left((e_1, e_2, e_3, e_4)\right) = E$$

De plus les vecteurs u_1, u_2, u_3, u_4 appartiennent à E donc :

$$\text{Vect}\left((u_1, u_2, u_3, u_4)\right) \subseteq E$$

Par double inclusion :

$$\text{Vect}\left((u_1, u_2, u_3, u_4)\right) = E$$

Ceci signifie exactement que la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est génératrice de E.

d. On remarque directement que ;

$$(8,2,4,4) = 2(2,1,0,0) + 4(1,0,1,1)$$

Ceci donne $v_1 = 2u_1 + 4u_3$, et donc les coordonnées de v_1 dans la base (u_1, u_2, u_3, u_4) sont $(2,0,4,0)$.
Pour le vecteur $v_2 = (-1,-2,1,8)$ on pourrait résoudre le système obtenu en posant :

$$v_2 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4$$

Mais on peut aussi utiliser les résultats de la question b. Comme $v_2 = (-1,-2,1,8)$ alors :

$$v_2 = -e_1 - 2e_2 + e_3 + 8e_4$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} v_2 &= -(u_3 - u_2 - u_4) - 2(u_1 + 2u_2 - 2u_3 + 2u_4) + (u_4) + 8(u_2) \\ &= -2u_1 + 5u_2 + 3u_3 - 2u_4 \end{aligned}$$

Ceci montre que les coordonnées du vecteur v_2 dans la base (u_1, u_2, u_3, u_4) sont : $(-2,5,3,-2)$

14 On considère la famille :

$$\mathcal{B} = (3,\ 2 - X,\ 1 + 2X + X^2).$$

a. Démontrer que 1, X et X^2 sont combinaisons linéaires des éléments de $\mathcal{B}$.

b. En déduire que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

c. Donner les coordonnées dans cette base du polynôme $2 + 2X + 2X^2$.

a. On note $P_0 = 3$, $P_1 = 2 - X$, $P_2 = 1 + 2X + X^2$, si bien que $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$.
On constate alors :

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{3}P_0 \\ X &= -P_1 + 2 = \frac{2}{3}P_0 - P_1 \\ X^2 &= P_2 - 1 - 2X = P_2 - \frac{1}{3}P_0 - \frac{4}{3}P_0 + 2P_1 = -\frac{5}{3}P_0 + 2P_1 + P_2 \end{aligned}$$

Ceci montre que 1, X et X^2 sont combinaisons linéaires de P_0, P_1, P_2.

b. Comme la famille $\mathcal{B}$ est de degrés échelonnés alors elle est libre.
De plus nous venons de démontrer que :

$$(1, X, X^2) \subseteq \text{Vect}\,(\mathcal{B})$$

Comme Vect $(\mathcal{B})$ est un espace vectoriel alors il est stable par combinaisons linéaires et donc :

$$\text{Vect}\left((1, X, X^2)\right) \subseteq \text{Vect}\,(\mathcal{B})$$

La famille $(1, X, X^2)$ engendre $\mathbb{K}_2[X]$, et $\mathcal{B}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{K}_2[X]$, donc

$$\mathbb{K}_2[X] \subseteq \text{Vect}\,(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{K}_2[X]$$

Par double inclusion Vect $(\mathcal{B}) = \mathbb{K}_2[X]$ et donc $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_2[X]$.
Nous avons justifié qu'elle est libre, donc elle est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

c. Soit $P = 2 + 2X + 2X^2$.
On utilise les calculs de la question a. On a exprimé les vecteurs de la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{K}_2[X]$ en fonctions des vecteurs de $\mathcal{B}$, on peut donc en déduire l'expression de tout vecteur de $\mathbb{K}_2[X]$ en fonction des vecteurs de $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} P &= 2 \times 1 + 2X + 2X^2 \\ &= 2\Big(\frac{1}{3}P_0\Big) + 2\Big(\frac{2}{3}P_0 - P_1\Big) + 2\Big(-\frac{5}{3}P_0 + 2P_1 + P_2\Big) \\ &= -\frac{4}{3}P_0 + 2P_1 + 2P_2 \end{aligned}$$

Ceci montre que les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ sont $\left(-\frac{4}{3}, 2, 2\right)$.

(15) Soit $E = \mathbb{R}^3$, A et B les plans d'équations respectives :

$$2x + y - 5z = 3 \qquad \text{et} \qquad x + 2y + z = 7.$$

a. Donner un point et la direction de A et de B.

b. Décrire de même $A \cap B$.

On obtient :

$$\begin{aligned} A &= (0, 3, 0) + \text{Vect}\,((1, -2, 0), (0, 5, 1)) \\ B &= (0, 0, 7) + \text{Vect}\,((1, 0, -1), (0, 1, -2)) \\ A \cap B &= (7, -1, -2) + \text{Vect}\,((11, -7, 3)). \end{aligned}$$

1 Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?
$F_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant y\}$
$F_7 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x - \pi y = 0\}$
$F_8 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \in \mathbb{Q}\}$
$F_9 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2\}$
$F_{10} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$

.

- F_6 n'est pas un sous-espace vectoriel.
  Par exemple $u = (2, 1)$ appartient à F_6 car $2 \geqslant 1$, mais pour $\lambda = -1$ alors $\lambda u = (-2, -1)$ n'appartient pas à F_6 car $-2 < -1$.
- F_7 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
  En effet, un élément $u = (x, y)$ appartient à F_7 si et seulement si $x = \frac{\pi}{4} y$, ce qui montre que :
  $$F_7 = \left\{ \left(\frac{\pi}{4} y, y \right) \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\left(\frac{\pi}{4}, 1 \right) \right) = \mathrm{Vect}\left((\pi, 4) \right)$$
  Comme $(\pi, 4)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^2$ alors F_7 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
- F_8 n'est pas un sous-espace vectoriel.
  Par exemple $u = (1, 0)$ appartient à F_8 car $1 \in \mathbb{Q}$. Mais pour le scalaire $\lambda = \sqrt{2}$ alors $\lambda u = \left(\sqrt{2}, 0\right)$ n'appartient pas à F_8 car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
- F_9 n'est pas un sous-espace vectoriel.
  Par exemple les vecteurs $u = (1, 1)$ et $v = (1, -1)$ appartiennent à F_9 car $1^2 = (-1)^2$, mais leur somme $u + v = (2, 0)$ n'appartient pas à F_9 car $2^2 \neq 0^2$.
- F_{10} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
  Il est délicat de prouver la stabilité par somme, elle ne serait d'ailleurs pas vérifiée s'il s'agissait d'un sous-ensemble de $\mathbb{C}^2$.

  Mais ici, comme x et y sont réels alors l'équation $x^2 + y^2 = 0$ n'est valide que pour le couple $(x, y) = (0, 0)$, donc $F_{10} = \{0_E\}$, ce qui montre que F_{10} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

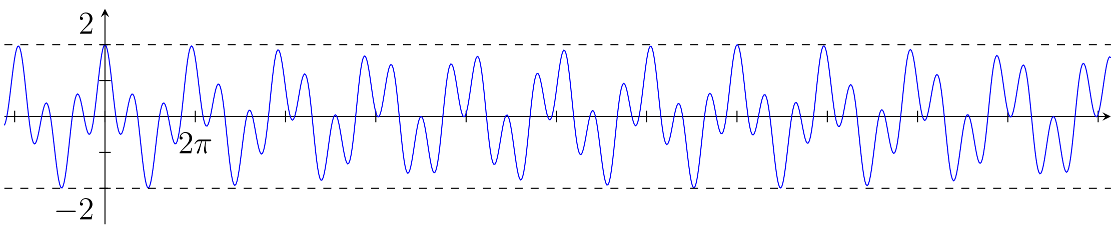
2 Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?
F_8 : ensemble des suites arithmétiques
F_9 : ensemble des suites géométriques.

- F_8 est un sous-espace vectoriel de E.
  On démontre ceci grâce à la caractérisation des sous-espaces vectoriels.
  (i) $F_8 \subseteq E$ car une suite arithmétique est une suite.
  (ii) $0_E \in F_8$ car la suite nulle est arithmétique, de raison 0.
  (iii) Soit u et v deux éléments de F_8, et λ un scalaire. Notons r la raison de u et r' celle de v, si bien que :
  $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = u_0 + nr \qquad \text{et} \qquad v_n = v_0 + nr'$$
  Ceci donne :
  $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (\lambda u_n + v_n) = (\lambda u_0 + v_0) + n(\lambda r + r')$$
  La suite $\lambda u + v$ est donc arithmétique de raison $\lambda r + r'$.
  On a prouvé que :
  $$\forall (u,v) \in F_8^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \lambda u + v \in F_8$$
  Grâce à la caractérisation des sous-espaces vectoriels, F_8 est un sous-espace vectoriel de E.
- F_9 n'est pas un sous-espace vectoriel.
  Par exemple la suite $u = (2^n) = (1, 2, 4, 8, \dots)$ appartient à F_9, la suite $v = (3^n) = (1,3, 9, 27, \dots)$ également, mais leur somme :
  $$u + v = (2^n + 3^n) = (2, 5, 13, \dots)$$
  n'appartient pas à F_9. En effet, elle n'est pas géométrique car $\frac{5}{2} \neq \frac{13}{5}$.

3 Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?
F_4 : ensemble des fonctions 2π-périodiques
F_5 : ensemble des fonctions périodiques.

- F_4 est un sous-espace vectoriel de E.
  L'ensemble F_4 est une partie de E, il contient la fonction nulle car elle est 2π-périodique.
  Soit f et g deux fonctions 2π-périodiques et $\lambda \in \mathbb{R}$.
  Alors la fonction $(\lambda f + g)$ est 2π-périodique :
  $$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \qquad (\lambda f + g)(x + 2\pi) &= \lambda f(x + 2\pi) + g(x + 2\pi) \\ &= \lambda f(x) + g(x) \qquad \text{car } f \text{ et } g \text{ sont } 2\pi\text{-périodiques} \\ &= (\lambda f + g)(x). \end{aligned}$$
  On a prouvé que : $\forall (f,g) \in F_4 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda f + g \in F_4$.
  D'après la caractérisation, F_4 est un sous-espace vectoriel de E.

- F_5 n'est pas un sous-espace vectoriel de E.
  Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $\quad f(x) = \cos x \quad$ et $\quad g(x) = \cos(\pi x)$.
  Ces fonctions appartiennent à F_5 car f est 2π-périodique et g est 2-périodique.
  On démontre par l'absurde que $f + g$ n'est pas périodique.
  Supposons que $T \in \mathbb{R}_+^*$ est une période de $f + g$.
  Alors $(f + g)(T) = (f + g)(0)$, ce qui donne :
  $$\cos T + \cos(\pi T) = 2.$$
  On peut écrire ceci : $(1 - \cos x) + (1 - \cos(\pi T)) = 0$.
  Comme $\cos T \leqslant 1$ et $\cos(\pi T) \leqslant 1$ alors $(1 - \cos x) \geqslant 0$ et $(1 - \cos(\pi T)) \geqslant 0$.
  La somme de deux réels positifs est nulle si et seulement si ces deux réels sont nuls, donc :
  $$\cos T = 1 \qquad \text{et} \qquad \cos(\pi T) = 1.$$
  Il existe donc deux entiers k et ℓ tels que $T = 2k\pi$ et $\pi T = 2\ell\pi$.
  Comme T est strictement positif alors k est strictement positif, donc par quotient de ces deux égalités $\pi = \dfrac{\ell}{k}$.
  Ceci est impossible car π est irrationnel.
  Cette contradiction montre que $(f + g)$ n'est pas périodique.
  L'ensemble F_5 n'est pas stable par addition donc il n'est pas un sous-espace vectoriel de E.
  Représentation graphique de la courbe de la fonction $f + g$ sur l'intervalle $[-2\pi, 22\pi]$:



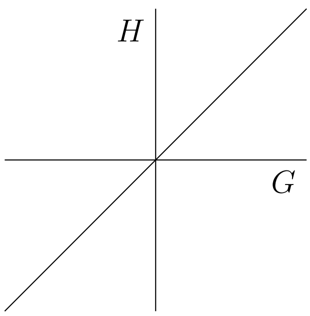
4 Soit E un espace vectoriel, F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E.
Démontrer que :
a. $(F \cap G) + (F \cap H) \subseteq F \cap (G + H)$,
b. $F + (G \cap H) \subseteq (F + G) \cap (F + H)$.
c. Les inclusions ci-dessus sont en général strictes.

a. Soit u un vecteur de $(F \cap G) + (F \cap H)$.
Alors il existe $v \in F \cap G$ et $w \in F \cap H$ tels que $u = v + w$.
Comme $v \in F$ et $w \in F$ alors $v + w \in F$, donc $u \in F$.
Comme $v \in G$ et $w \in H$ alors $v + w \in G + H$, donc $u \in G + H$.
Ainsi $u \in F$ et $u \in G + H$ donc $u \in F \cap (G + H)$.
On a démontré que $(F \cap G) + (F \cap H) \subseteq F \cap (G + H)$.

b. Soit $u \in F + (G \cap H)$.
Alors il existe $v \in F$ et $w \in G \cap H$ tels que $u = v + w$.
Comme $v \in F$ et $w \in G$ alors $v + w \in F + G$, donc $u \in F + G$.
Comme $v \in F$ et $w \in H$ alors $v + w \in F + H$, donc $u \in F + H$.
Ainsi $u \in F + G$ et $u \in F + H$ donc $u \in (F + G) \cap (F + H)$.
On a démontré que $F + (G \cap H) \subseteq (F + G) \cap (F + H)$.

c. On considère les trois sous-espaces vectoriels suivants de $E = \mathbb{R}^2$:

$$F = \text{Vect}\,((1,1)) \qquad G = \text{Vect}\,((1,0)) \qquad H = \text{Vect}\,((0,1))$$



On constate que :

$$F \cap G = \{0_E\} \qquad F \cap H = \{0_E\} \qquad \text{donc} \qquad (F \cap G) + (F \cap H) = \{0_E\}$$

puis :

$$G + H = E \qquad \text{donc} \qquad F \cap (G + H) = F$$

L'inclusion (a) s'écrit $\{0_E\} \subseteq F$, elle est stricte.
Ensuite :

$$G \cap H = \{0_E\} \qquad \text{donc} \qquad F + (G \cap H) = F$$

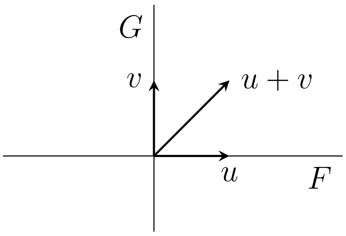
puis :

$$F + G = E \qquad F + H = E \qquad \text{donc} \qquad (F + G) \cap (F + H) = E$$

L'inclusion (b) s'écrit $F \subseteq E$, elle est stricte.
Les inclusions démontrées dans les questions précédentes sont donc strictes en général.

$\boxed{5}$ Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Démontrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$.

On démontre dans cet exercice que l'union de deux sous-espaces vectoriels n'est en général pas un sous-espace vectoriel. Ceci peut être constaté dans l'exemple suivant :



Ici $u \in F$ et $v \in G$, donc $u \in F \cup G$ et $v \in F \cup G$. Par contre $u + v$ n'appartient ni à F ni à G donc $u + v$ n'appartient pas à $F \cup G$.

Pour démontrer l'équivalence demandée, on démontre deux implications.

Sens indirect. Supposons que $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$.

Si $F \subseteq G$ alors $F \cup G = G$, si $G \subseteq F$ alors $F \cup G = F$.

Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E alors dans les deux cas $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Sens direct Supposons que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E.

On raisonne par l'absurde, en supposant que F n'est pas inclus dans G et G n'est pas inclus dans F.

Ceci signifie qu'il existe $u \in F \setminus G$ et $v \in G \setminus F$.

Mais alors $u \in F$ et $v \in G$, donc u et v appartiennent à $F \cup G$. Or celui-ci est un sous-espace vectoriel donc il est stable par somme et donc $u + v \in F \cup G$.

Ainsi $u + v \in F$ ou $u + v \in G$.

Si $u+v \in F$ alors $(u+v)-u$ est combinaison linéaire de deux vecteurs de F, donc $v \in F$, ce qui contredit l'hypothèse $v \in G \setminus F$.

Si $u+v \in G$ alors $(u+v)-v$ est combinaison linéaire de deux vecteurs de G, donc $u \in G$, ce qui contredit l'hypothèse $u \in F \setminus G$.

On ne peut donc avoir $u + v \in F \cup G$.

Cette contradiction montre que si $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E alors $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$.

Les deux sens sont démontrés, donc $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$.

6 Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ on note F le sous-espace vectoriel engendré par :

$$u_1 = (1, -3, 5, 2) \qquad \text{et} \qquad u_2 = (1, -1, -4, 3).$$

a. Le vecteur $v = (2, -10, 26, 2)$ est-il élément de F ?

b. Soit G l'ensemble des vecteurs (x, y, z, t) de F tels que $y = 0$. Démontrer que G est un sous-espace vectoriel de E.

a. Le vecteur v appartient à $F = \operatorname{Vect}(u_1, u_2)$ si et seulement si il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $v = \alpha u_1 + \beta u_2$. Ceci s'écrit :

$$(2, -10, 26, 2) = \alpha(1, -3, 5, 2) + \beta(1, -1, -4, 3)$$

Cette égalité équivaut au système :

$$S : \begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ -3\alpha - \beta = -10 \\ 5\alpha - 4\beta = 26 \\ 2\alpha + 3\beta = 2 \end{cases}$$

Les opérations $(L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1)$, $(L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1)$, $(L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1)$ donnent :

$$S \iff \begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ 2\beta = -4 \\ -9\beta = 16 \\ \beta = -2 \end{cases}$$

On arrive ensuite à :

$$S \iff \begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \beta = -2 \\ 0 = 2 \end{cases}$$

Ce système est incompatible, donc v n'appartient pas à F.

b. Soit $u = (x, y, z, t)$ un vecteur E. Alors u appartient à G si et seulement si $u \in F$ et $y = 0$.
Tout d'abord $u \in F$ si et seulement si il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u = \alpha u_1 + \beta u_2$, *i.e.*, :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x \\ -3\alpha - \beta = y \\ 5\alpha - 4\beta = z \\ 2\alpha + 3\beta = t \end{cases}$$

Dans ce cas $y = 0$ si et seulement si $\beta = -3\alpha$. Alors $u = \alpha u_1 - 3\alpha u_2 = \alpha(u_1 - 3u_2)$.
On pose $w = u_1 - 3u_2 = (-2, 0, 17, -7)$, alors les éléments de G sont les vecteurs αw où $\alpha \in \mathbb{R}$.
Ainsi $G = \operatorname{Vect}(w)$, comme $w \in E$ alors G est un sous-espace vectoriel de E.

7 On définit dans $\mathbb{R}^4$:

$$u_1 = (1,2,0,0) \qquad u_2 = (1,0,2,-2)$$
$$v_1 = (1,1,1,-1) \qquad v_2 = (0,1,-1,1).$$

Démontrer que $\text{Vect}\,(u_1,u_2) = \text{Vect}\,(v_1,v_2)$.

On constate que :

$$u_1 + u_2 = (2,2,2,-2) = 2v_1 \qquad u_1 - u_2 = (0,2,-2,2) = 2v_2$$

Ceci donne $v_1 = \frac{1}{2}(u_1+u_2)$ et $v_2 = \frac{1}{2}(u_1-u_2)$, donc v_1 et v_2 sont combinaisons linéaires de u_1 et u_2 :

$$(v_1,v_2) \subseteq \text{Vect}\,(u_1,u_2)$$

Or $\text{Vect}\,(u_1,u_2)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, donc il est stable par combinaisons linéaires, et ainsi :

$$\text{Vect}\,(v_1,v_2) \subseteq \text{Vect}\,(u_1,u_2)$$

On peut aussi utiliser l'argument que $\text{Vect}\,(v_1,v_2)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant v_1 et v_2, $\text{Vect}\,(u_1,u_2)$ est un sous-espace vectoriel de E contenant v_1 et v_2, donc $\text{Vect}\,(v_1,v_2) \subseteq \text{Vect}\,(u_1,u_2)$.

Pour l'inclusion réciproque on constate que $v_1+v_2 = u_1$ et $v_1 - v_2 = u_2$ donc :

$$(u_1,u_2) \subseteq \text{Vect}\,(v_1,v_2)$$

Comme $\text{Vect}\,(v_1,v_2)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ alors il est stable par combinaisons linéaires et donc :

$$\text{Vect}\,(u_1,u_2) \subseteq \text{Vect}\,(v_1,v_2)$$

Par double inclusion :

$$\text{Vect}\,(u_1,u_2) = \text{Vect}\,(v_1,v_2)$$

9 Soit $E = \mathbb{R}^3$ puis :

F l'ensemble des triplets (x,y,z) tels que $x = y$,

G l'ensemble des triplets tels que $y = z$.

a. Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

b. Démontrer que $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ sont éléments de $F+G$.
En déduire que $E = F+G$.

c. Cette somme est-elle directe ?

a. On écrit :

$$F = \{\,(x,y,z) \in E \mid x = y\} = \{\,(x,x,z) \mid (x,z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\,((1,1,0),(0,0,1))$$
$$G = \{\,(x,y,z) \in E \mid y = z\} = \{\,(x,y,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\,((1,0,0),(0,1,1))$$

On note pour la suite $u_1 = (1,1,0)$ et $v_1 = (0,1,1)$. On rappelle que selon les notations usuelles pour la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$e_1 = (1,0,0) \qquad e_2 = (0,1,0) \qquad e_3 = (0,0,1)$$

Les vecteurs u_1, e_3, e_1, et v_1 appartiennent à E. Comme $F = \operatorname{Vect}(u_1, e_3)$ et $G = \operatorname{Vect}(e_1, v_1)$ alors F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

b. Comme $e_1 = 0_E + e_1$ avec $0_E \in F$ et $e_1 \in G$ alors $e_1 \in F + G$.
Comme $e_2 = u_1 - e_1$ avec $u_1 \in F$ et $e_1 \in G$ alors $e_2 \in F + G$.
Comme $e_3 = e_3 + 0_E$ avec $e_3 \in F$ et $0_E \in G$ alors $e_3 \in F + G$.
Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E alors $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E. Il est donc stable par combinaisons linéaires.
Or il contient la famille (e_1, e_2, e_3) donc il contient le sous-espace vectoriel qu'elle engendre : $\operatorname{Vect}(e_1, e_2, e_3) \subseteq F + G$.
Ceci donne $E \subseteq F + G$, et comme $F + G \subseteq E$ alors $E = F + G$.

c. L'intersection entre F et G est :

$$F \cap G = \{(x,y,z) \in E \mid x = y = z\} = \{(x,x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

Cette intersection n'est pas réduite au vecteur nul puisqu'elle contient au moins le vecteur $(1,1,1)$, donc F et G ne sont pas en somme directe.
Ainsi la somme $E = F + G$ n'est pas directe.
On aurait aussi pu remarquer que la décomposition d'un vecteur de E comme somme d'un vecteur et F et d'un vecteur de G n'est pas unique. Par exemple :

$$e_2 = u_1 - e_1 = -e_3 + v_1 \quad \text{avec} \quad (u_1, e_3) \in F^2 \quad \text{et} \quad (e_1, v_1) \in G^2$$

$\boxed{\textbf{10}}$ On définit les vecteurs suivants de $E = \mathbb{R}^4$:

$$\begin{array}{ll} u_1 = (1,0,0,0) & u_2 = (1,1,0,0) \\ v_1 = (1,1,1,0) & v_2 = (1,1,1,1). \end{array}$$

On pose ensuite :

$$F = \operatorname{Vect}(u_1, u_2) \qquad \text{et} \qquad G = \operatorname{Vect}(v_1, v_2).$$

Démontrer que $E = F \oplus G$.

Remarquons tout d'abord que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E car les vecteurs u_1, u_2, v_1, v_2 appartiennent à E.
On rappelle l'équivalence :

$$E = F \oplus G \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ F + G = E \end{cases}$$

Il faut donc démontrer deux égalités d'ensembles, soit quatre inclusions.

- $\{0_E\} \subseteq F \cap G$: Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E alors leur intersection est un sous-espace vectoriel de E, donc elle contient le vecteur nul.

- $F \cap G \subseteq \{0_E\}$: Soit $u \in F \cap G$.
  Comme $u \in F$ alors il existe $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$.
  Comme $u \in G$ alors il existe $(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2$.
  L'égalité $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2$ donne :

$$(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, 0, 0) = (\beta_1 + \beta_2, \beta_1 + \beta_2, \beta_1 + \beta_2, \beta_2)$$

  Par identification on en déduit $\beta_2 = \beta_1 = \alpha_2 = \alpha_1 = 0$, donc $u = 0_E$.
  On a démontré que $F \cap G \subseteq \{0_E\}$.

Par double inclusion on obtient $F \cap G = \{0_E\}$.

- $F + G \subseteq E$: Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E alors $F + G \subseteq E$.
- $E \subseteq F + G$: Soit $u = (x, y, z, t)$ un vecteur de E.
  On cherche à démontrer qu'il existe un couple de vecteurs (v, w) de $F \times G$ tel que $u = v + w$. Or $F = \operatorname{Vect}(u_1, u_2)$ et $G = \operatorname{Vect}(v_1, v_2)$, donc ceci signifie qu'il existe quatre scalaires α_1, α_2, β_1, β_2 tels que :

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2$$

  Cette égalité équivaut au système :

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 = x \\ \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 = y \\ \beta_1 + \beta_2 = z \\ \beta_2 = t \end{cases}$$

  Lequel admet pour solution :

$$\begin{cases} \alpha_1 = x - y \\ \alpha_2 = y - z \\ \beta_1 = z - t \\ \beta_2 = t \end{cases}$$

  On peut vérifier :

$$\begin{aligned} &(x-y)u_1 + (y-z)u_2 + (z-t)v_1 + tv_2 \\ &\qquad = (x-y)(1,0,0,0) + (y-z)(1,1,0,0) + (z-t)(1,1,1,0) + t(1,1,1,1) \\ &\qquad = (x-y,0,0,0) + (y-z,y-z,0,0) + (z-t,z-t,z-t,0) + (t,t,t,t) \\ &\qquad = (x-z,y-z,0,0) + (z,z,z,t) \\ &\qquad = (x,y,z,t) \end{aligned}$$

  On en déduit :

$$\begin{aligned} v &= (x-z,y-z,0,0) = (x-y)u_1 + (y-z)u_2 && \text{donc} \quad v \in F \\ w &= (z-t,z-t,z-t,t) = (z-t)v_1 + tv_2 && \text{donc} \quad w \in G \end{aligned}$$

  De plus $u = v + w$, donc on a bien démontré que $u \in F + G$.
  Ceci montre que $E \subseteq F + G$.

Par double inclusion on obtient $F + G = E$.

Finalement, comme $F \cap G = \{0_E\}$ et $F + G = E$ alors $E = F \oplus G$.

Ceci signifie que pour tout vecteur u de E il existe un unique $v \in F$ et un unique $w \in G$ tels que $u = v + w$.

Ces vecteurs v et w ont été explicités ci-dessus, bien que cela n'ait pas été demandé. Il suffisait de remarquer que le système ci-dessus admet une solution.

$\boxed{\textbf{11}}$ Dans chacun des cas suivants, démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

a. $E = \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$
$F = \text{Vect}\,(u_0)$ où $u_0 = (1, 1, \dots, 1)$
$G = \{(x_1, \dots, x_n) \in E \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$.

c. $E = \mathbb{R}_1[X]$
$F = \{\, P \in E \mid \ P(2) = 0\}$
$G = \{\, P \in E \mid \ P(3) = 0\}$.

a. Comme $F = \text{Vect}\,(u_0)$ avec $u_0 \in E$ alors F est un sous-espace vectoriel de E.

On démontre que G est un sous-espace vectoriel de E :

(i) $G \subseteq E$ par définition de G.

(ii) Le vecteur nul $0_E = (0, \dots, 0)$ appartient à G car $0 + \cdots + 0 = 0$.

(iii) Soit $u = (x_1, \dots, x_n)$ et $v = (y_1, \dots, y_n)$ deux vecteurs de G et λ un scalaire. Alors :

$$\lambda u + v = (\lambda x_1 + y_1, \dots, \lambda x_n + y_n)$$

La somme de ses coordonnées est :

$$(\lambda x_1 + y_1) + \cdots + (\lambda x_n + y_n) = \lambda(x_1 + \cdots + x_n) + (y_1 + \cdots + y_n) = 0$$

En effet u et v appartiennent à G donc $x_1 + \cdots + x_n = y_1 + \cdots + y_n = 0$.

Ceci justifie que $\lambda u + v$ appartient à G. On a donc démontré que :

$$\forall (u, v) \in G^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \lambda u + v \in G$$

D'après la caractérisation, G est un sous-espace vectoriel de E.

On aurait aussi pu écrire :

$$G = \text{Vect}\,((1, 0, \dots, 0, -1), (0, 1, 0, \dots, 0, -1), \dots (0, \dots, 0, 1, -1))$$

Démontrons maintenant que $E = F \oplus G$.

- $F \cap G = \{0_E\}$:
  Soit u un vecteur de $F \cap G$.
  Comme $u \in F$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda u_0$, et alors $u = (\lambda, \dots, \lambda)$.
  Comme $u \in G$ alors $\lambda + \cdots + \lambda = 0$, *i.e.*, $n\lambda = 0$, ce qui donne $\lambda = 0$ car n est non-nul.

Ainsi $u = 0_E$, ce qui montre que $F \cap G \subseteq \{0_E\}$.
L'inclusion réciproque est vraie car F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, donc ils contiennent le vecteur nul de E.
Nous avons démontré que : $F \cap G = \{0_E\}$

- $F + G = E$:
  Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E alors $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E, donc $F + G \subseteq E$.
  Il reste à démontrer que $E \subseteq F + G$.
  Soit $u = (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur de E.

  [*La partie qui suit est une phase d'analyse, elle ne figurera pas dans la rédaction de la solution.*
  Supposons que $u \in F + G$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v \in G$ tels que $u = \lambda u_0 + v$.
  Si on note $v = (y_1, \dots, y_n)$ alors on obtient : $\forall i = 1, \dots, n \quad x_i = \lambda + y_i$
  De plus $v \in G$ donc $y_1 + \cdots + y_n = 0$. Ceci donne $(x_1 - \lambda) + \cdots + (x_n - \lambda) = 0$, puis $(x_1 + \cdots + x_n) = n\lambda$.
  On doit donc poser $\lambda = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$, et pour tout $i = 1, \dots, n$: $y_i = x_i - \lambda$.]

  Soit $\lambda = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$, puis pour tout $i = 1, \dots, n$: $y_i = x_i - \lambda$. Enfin soit $v = (y_1, \dots, y_n)$.
  Alors :
  $$y_1 + \cdots + y_n = (x_1 - \lambda) + \cdots + (x_n - \lambda) = (x_1 + \cdots + x_n) - n\lambda = 0$$
  Ceci montre que $v \in G$. De plus
  $$v = (x_1 - \lambda, \dots, x_n - \lambda) = (x_1, \dots, x_n) - (\lambda, \dots, \lambda) = u - \lambda u_0$$
  Ceci donne $u = \lambda u_0 + v$. Comme $\lambda u_0 \in F$ et $v \in G$, alors $u \in F + G$.
  On a démonté que $E \subseteq F + G$.
  Par double inclusion : $F + G = E$

Comme $F \cap G = \{0_E\}$ et $F + G = E$ alors par théorème $E = F \oplus G$.

On peut ajouter que l'on sait décomposer un vecteur selon cette somme directe.
Posons par exemple $n = 5$, et $u = (8, 3, -4, 5, -2)$.
On calcule alors $\lambda = \frac{1}{5}(8 + 3 - 4 + 5 - 2) = 2$, puis $v = u - \lambda u_0 = (6, 1, -6, 3, -4)$. On a alors $u = \lambda u_0 + v$ car :
$$(8, 3, -4, 5, -2) = (2, 2, 2, 2, 2) + (6, 1, -6, 3, -4)$$
Le vecteur v appartient à G car la somme de ses coefficients est nulle, donc u est bien décomposé selon la somme $E = F \oplus G$.

c. Les polynômes de degré au plus 1 qui vérifient $P(2) = 0$ sont les polynômes $P = \lambda(X - 2)$ où λ est un scalaire quelconque. On en déduit que $F = \text{Vect}\,(X - 2)$, et de même $G = \text{Vect}\,(X - 3)$, donc F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
Le seul polynôme de degré au plus 1 qui admet deux racines distinctes est le polynôme nul, donc $F \cap G = \{0_E\}$.

Démontrons que $F + G = E$.

On remarque : $(X-2)-(X-3)=1$ donc $1 \in F+G$

$3(X-2)-2(X-3)=X$ donc $X \in F+G$

Ainsi $(1, X) \subseteq F + G$. Or $F + G$ est un espace vectoriel donc il est stable par combinaisons linéaires, et ainsi $\mathrm{Vect}\,(1, X) \subseteq F + G$.

Enfin comme $E = \mathrm{Vect}\,(1, X)$ et $F + G \subseteq E$ alors $F + G = E$.

Par théorème, comme $F \cap G = \{0_E\}$ et $F + G = E$ alors $E = F \oplus G$.

On peut ajouter que la décomposition dans cette somme directe d'un polynôme quelconque $P = aX+b$ de E est $P = (3a+b)(X-2)-(2a+b)(X-3)$ avec $(3a+b)(X-2) \in F$ et $(2a+b)(X-3) \in G$.

12 Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, $F = \mathbb{R}_1[X]$ et :

$$G = \{\, P \in E \mid P(1) = P'(1) = 0\}.$$

a. Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

b. Démontrer que F et G sont en somme directe.

c. En utilisant la formule de Taylor ou la division euclidienne, démontrer que $E = F+G$.

d. Donner la décomposition de X^3, X^2, X et 1 dans cette somme directe

a. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, donc c'est un espace vectoriel.

Ainsi $\mathbb{R}_1[X]$ et $\mathbb{R}_3[X]$ sont des espaces vectoriels. Or $\mathbb{R}_1[X] \subseteq \mathbb{R}_3[X]$ (si un polynôme est de degré au plus 1 alors il est de degré au plus 3) donc $\mathbb{R}_1[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$, *i.e.,* F est un sous-espace vectoriel de E.

Deux méthodes pour démontrer que G est un sous-espace vectoriel de E :

Méthode 1. Par la caractérisation.

(i) $G \subseteq E$ par définition de G.

(ii) $0_E \in G$. En effet, si P est le polynôme nul alors $P(1) = P'(1) = 0$.

(iii) Soit P et Q deux polynômes de G. Alors $P(1) = P'(1) = Q(1) = Q'(1) = 0$.
Soit λ un scalaire. Alors

$$\begin{aligned} &(\lambda P + Q)(1) = \lambda P(1) + Q(1) = 0 \\ \text{et} \quad &(\lambda P + Q)'(1) = (\lambda P' + Q')(1) = \lambda P'(1) + Q'(1) = 0 \end{aligned}$$

On en déduit que $\lambda P + Q$ appartient à G.

On a donc démontré que :

$$\forall (P, Q) \in G^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \lambda P + Q \in G$$

D'après la caractérisation G est un sous-espace vectoriel de E.

Méthode 2. En explicitant G.

Un polynôme P vérifie $P(1) = P'(1) = 0$ si et seulement si 1 est racine double de ce polynôme, donc si et seulement si ce polynôme est multiple de $(X-1)^2$, donc si et seulement si il existe un polynôme Q tel que $P = (X-1)^2Q$.

Si de plus P est de degré au plus 3 alors Q est de degré au plus 1, et dans ce cas il existe deux réels a et b tel que $Q = aX + b$.
On en déduit que $G = \{(X-1)^2(aX+b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ et donc :

$$\begin{aligned} G &= \left\{ aX(X-1)^2 + b(X-1)^2 \;\middle|\; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \operatorname{Vect}\left(X(X-1)^2, (X-1)^2\right) \end{aligned}$$

Les polynômes $X(X-1)^2$ et $(X-1)^2$ appartiennent à E car ils sont de degrés au plus 3, donc G est un sous-espace vectoriel de E.

b. Il faut démontrer que $F \cap G = \{0_E\}$.
Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E, donc $\{0_E\} \subseteq F \cap G$.
Démontrons l'inclusion réciproque. Soit P un élément de $F \cap G$. D'après la question précédente, comme $P \in G$ alors $P(1) = P'(1) = 0$, donc 1 est racine double de P, ce qui montre qu'il existe un polynôme Q tel que $P = (X-1)^2 Q$.
Si Q est non-nul alors il est de degré positif ou nul, donc :

$$\deg P = \deg((X-1)^2 Q = \deg(X-1)^2 + \deg Q = 2 + \deg Q \geqslant 2$$

Or $P \in F$ donc $\deg P \leqslant 1$. Cette contradiction montre que Q est nul, et donc P est nul.
Ainsi $F \cap G \subseteq \{0_E\}$, puis par double inclusion $F \cap G = \{0_E\}$.
Ceci signifie que F et G sont en somme directe.

c. Comme F et G sont des sous-espace vectoriel de E alors $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E, et donc $F + G \subseteq E$.
Démontrons l'inclusion réciproque. Soit P un élément de E, donc un polynôme de degré au plus 3.
On utilise les deux méthodes suggérées pour prouver que $P \in F + G$.

Méthode 1. On applique la formule de Taylor au polynôme P en $a = 1$:
Comme P et de degré au plus 3 alors :

$$P = P(1) + P'(1)(X-1) + \frac{P''(1)}{2}(X-1)^2 + \frac{P'''(1)}{6}(X-1)^3$$

On pose :

$$Q_1 = P(1) + P'(1)(X-1) \qquad \text{et} \qquad Q_2 = \frac{P''(1)}{2}(X-1)^2 + \frac{P'''(1)}{6}(X-1)^3$$

On constate que Q_1 est de degré au plus 1, donc $Q_1 \in F$.
De plus Q_2 est multiple de $(X-1)^2$ donc $Q_2 \in G$.
Ainsi $P = Q_1 + Q_2$ avec $Q_1 \in F$ et $Q_2 \in G$, donc $P \in F + G$.

Méthode 2. La division euclidienne de P par $(X-1)^2$ est définie car $(X-1)^2$ est non-nul. Elle montre qu'il existe deux polynômes Q et R tels que :

$$P = (X-1)^2 Q + R \qquad \text{et} \qquad \deg R < \deg(X-1)^2$$

Comme $(X-1)^2Q$ est multiple de $(X-1)^2$ alors il appartient à G.
Comme $\deg R < 2$ alors R appartient à F.
Ainsi $P = R + (X-1)^2Q$ avec $R \in F$ et $(X-1)^2Q \in G$, donc $P \in F+G$.

Nos avons démontré que tout polynôme P de E appartient à $F+G$, donc $E \subseteq F+G$.
Par double inclusion $E = F+G$.

d. Nous savons que $F \cap G = \{0_E\}$ et $E = F+G$, donc $E = F \oplus G$.
Ainsi, comme 1, X, X^2, X^3 appartiennent à E alors ils s'écrivent de façon unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.
D'après la question précédente on peut utiliser la formule de Taylor ou la division euclidienne pour obtenir cette décomposition.
Mais les deux premiers sont de degré au plus 1, donc il suffit d'écrire

$$1 = 1 + 0 \qquad \text{et} \qquad X = X + 0$$

En effet, 1 et X appartiennent à F, 0 appartient à G.
Pour X^2, la division euclidienne par $(X-1)^2 = X^2 - 2X + 1$ donne :

$$X^2 = (X-1)^2 + (2X-1)$$

Effectivement $(X-1)^2 \in G$ et $2X-1 \in F$.
Pour X^3, la division euclidienne par $(X-1)^2 = X^2 - 2X + 1$ donne :

$$X^3 = (X+2)(X-1)^2 + (3X-2)$$

Effectivement $(X+2)(X-1)^2 \in G$ et $3X-2 \in F$.
En résumé on a obtenu les décompositions suivantes selon la somme $E = F \oplus G$:

$$\begin{array}{rcl} 1 &=& 1 + 0_E \\ X &=& X + 0_E \\ X^2 &=& (2X-1) + (X^2 - 2X + 1) \\ X^3 &=& (3X-2) + (X^3 - 3X + 2) \end{array}$$

13 Soit $E = \mathbb{K}[X]$. Pour tout $a \in \mathbb{K}$ on pose :

$$E_a = \{ P \in E \mid P(a) = 0 \}.$$

a. Justifier que pour tout $a \in E$, E_a est un sous-espace vectoriel de E.

b. Démontrer que si $a \neq b$ alors $E = E_a + E_b$.

c. Cette somme est-elle directe ?

b. D'après le théorème de Bézout, comme $(X-a)$ et$(X-b)$ sont premiers entre eux il existe U et V tels que $1 = (X-a)U + (X-b)V$.
Donc pour tout $P \in E$: $\quad P = (X-a)UP + (X-b)VP \in E_a + E_b$

c. $E_a \cap E_b = (X-a)(X-b)\mathbb{K}[X] \neq \{0_E\}$ donc la somme n'est pas directe.

14 Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0,\pi]$ dans $\mathbb{R}$, F l'ensemble des fonctions f de E vérifiant $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = f(\pi)$ et $G = \mathrm{Vect}_E(\cos, \sin)$.

a. Démontrer que E est un espace vectoriel et que F et G en sont deux sous-espaces vectoriels.

b. Démontrer que pour tout $f \in E$ il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f - \alpha \cos - \beta \sin \in F$.

c. Démontrer que $E = F \oplus G$.

a. L'ensemble E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([0,\pi], \mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions de $[0,\pi]$ dans $\mathbb{R}$. En effet, il est inclus dans cet ensemble, il contient la fonction nulle (de $[0,\pi]$ dans $\mathbb{R}$) car celle-ci est continue, et enfin les combinaisons linéaires de fonctions continues sont continues.

Comme E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([0,\pi], \mathbb{R})$ alors E est un espace vectoriel.

Démontrons que F est un sous-espace vectoriel de E :

(i) $F \subseteq E$ par définition de F.

(ii) $0_E \in F$ car si f est la fonction nulle de $[0,\pi]$ dans $\mathbb{R}$ alors $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = f(\pi)$.

(iii) Soit f et g deux fonctions de F, et λ un scalaire.

Par définition des opérations sur les fonctions :

$$\forall t \in [0,\pi] \quad (\lambda f + g)(t) = \lambda f(t) + g(t)$$

Or f et g appartiennent à F donc :

$$f(0) = f(\tfrac{\pi}{2}) = f(\pi) \qquad \text{et} \qquad g(0) = g(\tfrac{\pi}{2}) = g(\pi)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} & \lambda f(0) + g(0) = \lambda f(\tfrac{\pi}{2}) + g(\tfrac{\pi}{2}) = \lambda f(\pi) + g(\pi) \\ \text{donc} \quad & (\lambda f + g)(0) = (\lambda f + g)(\tfrac{\pi}{2}) = (\lambda f + g)(\pi) \end{aligned}$$

Ceci montre que $(\lambda f + g)$ appartient à F.

On a démontré que :

$$\forall (f,g) \in F^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \lambda f + g \in F$$

D'après la caractérisation, F est un sous-espace vectoriel de E.

Par définition $G = \mathrm{Vect}_E(\cos, \sin)$. Ceci signifie que G est l'ensemble des combinaisons linéaires des fonctions cosinus et sinus dans E. Ainsi cos et sin désignent les restrictions des fonctions cosinus et sinus à l'intervalle $[0,\pi]$. Ces fonctions appartiennent à E car elles sont continues, donc G est un sous-espace vectoriel de E.

b. Soit f une fonction continue de $[0,\pi]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tous réels α et β, la fonction $f - \alpha \cos - \beta \sin$ appartient à F si et seulement si :

$$f(0) - \alpha \cos(0) - \beta \sin(0) = f(\tfrac{\pi}{2}) - \alpha \cos(\tfrac{\pi}{2}) - \beta \sin(\tfrac{\pi}{2}) = f(\pi) - \alpha \cos(\pi) - \beta \sin(\pi)$$

Ceci donne :

$$f(0) - \alpha = f(\tfrac{\pi}{2}) - \beta = f(\pi) + \alpha$$

Ce qui équivaut à :

$$\alpha = \frac{1}{2}(f(0) - f(\pi)) \qquad \beta = f(\tfrac{\pi}{2}) - \frac{1}{2}(f(0) + f(\pi))$$

Ainsi, pour α et β prenant ces valeurs, la fonction $f - \alpha\cos - \beta\sin$ appartient à F.

c. Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E alors $F \cap G$ contient le vecteur nul de E, et $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E, donc :

$$\{0_E\} \subseteq F \cap G \qquad \text{et} \qquad F + G \subseteq E$$

Démontrons les inclusions réciproques.
Soit f un élément de $F \cap G$.
Comme $f \in G$ alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f = \alpha\cos + \beta\sin$.
Comme $f \in F$ alors $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = f(\pi)$, ce qui donne :

$$\alpha\cos 0 + \beta\sin 0 = \alpha\cos\tfrac{\pi}{2} + \beta\sin\tfrac{\pi}{2} = \alpha\cos\pi + \beta\sin\pi$$

On en déduit $\alpha = \beta = -\alpha$, donc $\alpha = \beta = 0$.
En conséquence f est la fonction nulle, et donc $F \cap G \subseteq \{0_E\}$.
On a démontré par double inclusion que : $F \cap G = \{0_E\}$

Soit f un élément de E. D'après la question précédente il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f - \alpha\cos - \beta\sin \in F$.
Supposons que α et β prennent ces valeurs. Alors :

$$f = (f - \alpha\cos - \beta\sin) + (\alpha\cos + \beta\sin) \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} (f - \alpha\cos - \beta\sin) \in F \\ (\alpha\cos + \beta\sin) \in G \end{cases}$$

Ceci montre que $f \in F + G$. On en déduit l'inclusion $E \subseteq F + G$, puis par double inclusion : $E = F + G$.

Comme $F \cap G = \{0_E\}$ et $E = F + G$ alors $E = F \oplus G$.

15 Les familles suivantes sont-elles libres ?
$\mathcal{F}_1 = ((1,1,0),(1,0,1),(0,1,1))$ dans $\mathbb{R}^3$
$\mathcal{F}_2 = ((1,1,a),(1,a,1),(a,1,1))$ dans $\mathbb{R}^3$ $(a \in \mathbb{R})$
$\mathcal{F}_3 = ((1,6,5),(7,2,5),(9,2,6))$ dans $\mathbb{R}^3$
$\mathcal{F}_4 = ((1,3,4),(4,9,8),(16,27,16))$ dans $\mathbb{R}^3$
$\mathcal{F}_5 = ((2,1,-1,-2),(6,4,4,6),(0,1,7,12))$ dans $\mathbb{R}^4$
$\mathcal{F}_6 = (u_i = (3,\dots,3,\underset{(i)}{1},3,\dots,3) \mid i = 1\dots n)$ dans $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$
Démontrer que les familles $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_6$ sont génératrices.

- On démontre que la famille $\mathcal{F}_1$ est libre.
  Soit u_1, u_2, u_3 ses trois vecteurs.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Ceci donne :

$$\begin{aligned} & \lambda_1(1,1,0) + \lambda_2(1,0,1) + \lambda_3(0,1,1) = (0,0,0) \\ \text{puis} \quad & (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3) = (0,0,0) \end{aligned}$$

  On résout le système obtenu :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

  La solution est $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0)$.
  On a donc démontré :

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \qquad \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0_{\mathbb{R}}$$

  La famille $\mathcal{F}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est donc libre.
- Démontrons que la famille $\mathcal{F}_1$ est génératrice de $E = \mathbb{R}^3$.
  Soit $u = (x, y, z)$ un vecteur de E. L'équation

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$$

  équivaut au système :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = x \\ \lambda_1 + \lambda_3 = y \\ \lambda_2 + \lambda_3 = z \end{cases}$$

  Ce système est de rang trois, nous l'avons démontré dans la partie précédente. Il admet donc une solution. On en déduit :

$$\forall u \in E \qquad \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \quad u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$$

  Ceci signifie exactement que la famille $\mathcal{F}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est génératrice de E.
  En fait le système est de Cramer, et donc le triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ est unique, ce qui démontre directement que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base.
- On démontre que la famille $\mathcal{F}_2$ est libre si et seulement si $a \notin \{-2, 1\}$.
  On peut remarquer dès le départ que la famille est liée si $a = 1$, puisqu'alors ses trois vecteurs sont égaux. On sait aussi qu'elle est libre si $a = 0$, il s'agit de la famille $\mathcal{F}_1$.
  On va donc démontrer qu'il existe un autre cas où la famille est liée, le cas où $a = -2$.
  On note encore u_1, u_2, et u_3 les trois vecteurs de la famille $\mathcal{F}_2$.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Alors :

$$\lambda_1(1,1,a) + \lambda_2(1,a,1) + \lambda_3(a,1,1) = (0,0,0)$$

Ceci donne le système :

$$S: \quad \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + a\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + a\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ a\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Les opérations élémentaires $(L_2 \leftarrow L_2 - L_1)$ puis $(L_3 \leftarrow L_3 - aL_1)$ donnent :

$$S \sim \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + a\lambda_3 = 0 \\ (a-1)\lambda_2 + (1-a)\lambda_3 = 0 \\ (1-a)\lambda_2 + (1-a^2)\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

L'opération élémentaire $(L_3 \leftarrow L_3 + L_1)$ donne :

$$S \sim \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + a\lambda_3 = 0 \\ (a-1)\lambda_2 + (1-a)\lambda_3 = 0 \\ (2-a-a^2)\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

On calcule que $(2-a-a^2) = (1-a)(a+2)$. Ce polynôme en a est nul si $a = 1$ ou $a = -2$. On peut donc conclure :

- Si $a = 1$ la famille $\mathcal{F}_2$ est libre car ses trois vecteurs sont égaux.
- Si $a = -2$ alors le système donne $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. Effectivement on vérifie que :

$$u_1 + u_2 + u_3 = (1,1,-2) + (1,-2,1) + (-2,1,1) = (0,0,0)$$

  Ainsi la famille est liée, par exemple car $u_3 = -(u_1 + u_2)$.
- Si $a \neq 1$ et $a \neq -2$ alors $(a-1) \neq 0$ et $(2-a-a^2) \neq 0$ donc le système est de rang 3, et il admet pour unique solution $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0)$.
  On en déduit :

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \qquad \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0_{\mathbb{R}}$$

  La famille $\mathcal{F}_2$ est donc libre dans ce cas.

- La famille $\mathcal{F}_3$ est liée.
  En effet on constate que :

$$13(7,2,5) - 10(9,2,6) = (91,26,65) - (90,20,60) = (1,6,5)$$

  Cette égalité a été obtenue en cherchant à démontrer que la famille est libre, de la façon suivante.
  On note encore u_1, $_2$, u_3 les vecteurs de $\mathcal{F}_3$, et on suppose que λ_1, λ_2, λ_3 sont trois scalaires tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. On résout alors le système obtenu :

$$S: \quad \begin{cases} \lambda_1 + 7\lambda_2 + 9\lambda_3 = 0 \\ 6\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 5\lambda_1 + 5\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 + 7\lambda_2 + 9\lambda_3 = 0 \\ -40\lambda_2 - 52\lambda_3 = 0 \\ -30\lambda_2 - 39\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 + 7\lambda_2 + 9\lambda_3 = 0 \\ 10\lambda_2 + 13\lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 + \quad - \frac{1}{10}\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \frac{13}{10}\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

On constate que les triplets $\left(\frac{1}{10}\lambda_3, -\frac{13}{10}\lambda_3, \lambda_3\right)$ sont solutions. En particulier si on pose $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, -13, 10)$ alors :

$$u_1 - 13u_2 + 10u_3 = 0$$

Ceci montre que $u_1 = 13u_2 - 10u_3$, et confirme que la famille $\mathcal{F}_3 = (u_1, u_2, u_3)$ est liée.

- Démontrons que la famille $\mathcal{F}_4$ est libre.
  On note u_1, u_2, u_3 ses trois vecteurs.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ un triplet de scalaires tel que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$.
  Ceci donne le système :
$$\begin{cases} x + 4y + 16z = 0 \\ 3x + 9y + 27z = 0 \\ 4x + 8y + 16z = 0 \end{cases}$$
  On applique l'algorithme du pivot de Gauss sur sa matrice, en commençant par les opérations $(L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2)$ et $(L_3 \leftarrow \frac{1}{4}L_3)$:
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 \\ 3 & 9 & 27 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
  Cette matrice est de rang 3, de taille $(3, 3)$, donc elle est inversible. Ainsi le système ci-dessus est de Cramer, et donc il admet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$ pour unique solution.
  On a démontré que :
$$\forall (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \qquad \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0_{\mathbb{R}}$$
  Ceci montre que la famille $\mathcal{F}_4$ est libre.
- Pour la famille $\mathcal{F}_5$ on note u_1, u_2, u_3 ses vecteurs, puis on remarque que :
$$u_2 - 3u_1 = (6, 4, 4, 6) - (6, 3, -3, -6) = (0, 1, 7, 12) = u_3$$
  Ainsi u_3 est combinaison linéaire de u_1 et u_2, donc la famille $\mathcal{F}_5$ est liée.
- On démontre que la famille $\mathcal{F}_6$ est libre.
  Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_{\mathbb{R}^n}$. Ceci équivaut au système :
$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + \cdots + 3\lambda_n = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + 3\lambda_n = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots \\ 3\lambda_1 + 3\lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 0 \end{cases}$$
  La matrice de ce système est la matrice de taille (n, n) dont tous les coefficients sont égaux à 3 sauf ceux de la diagonale qui valent 1.
  La somme des toutes les lignes donne :
$$(3n - 2)(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) = 0$$

Comme $3n - 2$ est non-nul alors $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0$, et donc :

$$3\lambda_1 + 3\lambda_2 + \cdots + 3\lambda_n = 0$$

En soustrayant la ligne i à cette égalité on obtient $2\lambda_i = 0$, et donc $\lambda_i = 0$.
On a démontré :

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \qquad \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_{\mathbb{R}^n} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0_{\mathbb{R}}$$

La famille $\mathcal{F}_6$ est libre.

- Démontrons maintenant qu'elle est génératrice de $E = \mathbb{R}^n$.
  Pour ceci on démontre qu'elle engendre la base canonique de E. On rappelle que celle-ci est composée des vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ où e_i est le vecteur dont toutes les composantes sont nulles sauf celle d'indice i qui vaut 1.
  On pose $s = u_1 + \cdots + u_n$. Alors s est combinaison linéaire des u_i donc $s \in \text{Vect}\,(\mathcal{F}_6)$, et
  $$s = (3n - 2, \ldots, 3n - 2) = (3n - 2)(1, \ldots, 1)$$
  Soit i en entier compris entre 1 et n. Alors
  $$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{3n-2}s - u_i\right) = \frac{1}{2}((3, \ldots, 3) - u_i) = e_i$$
  Ceci montre que $e_i \in \text{Vect}\,(\mathcal{F}_6)$.
  On en déduit :
  $$(e_1, \ldots, e_n) \subseteq \text{Vect}\,(\mathcal{F}_6)$$
  Comme $\text{Vect}\,(\mathcal{F}_6)$ est un sous-espace vectoriel de E alors il est stable par combinaisons linéaires, donc :
  $$\text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_n) \subseteq \text{Vect}\,(\mathcal{F}_6)$$
  Or la base canonique de E engendre E donc :
  $$E \subseteq \text{Vect}\,(\mathcal{F}_6)$$
  L'inclusion réciproque est immédiate car les u_i sont des vecteurs de E. Ainsi $E = \text{Vect}\,(\mathcal{F}_6)$, *i.e.*, la famille $\mathcal{F}_6$ est génératrice de E.

$\boxed{\textbf{16}}$ Soit $E = \mathbb{R}^4$ et :

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z,t) \in E \mid 2x+y+t=0\} \\ G &= \{(x,y,z,t) \in E \mid x-z-3t=0\}. \end{aligned}$$

a. Donner la dimension de F, G puis $F \cap G$.

b. Déterminer $F + G$.

a. Pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel il faut en donner une base.

- Pour F on écrit :

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z,t) \in E \mid t = -2x-y\} = \left\{(x,y,z,-2x-y) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left((1,0,0,-2),(0,1,0,-1),(0,0,1,0)\right) \end{aligned}$$

  On note $u_1 = (1,0,0,-2)$, $u_2 = (0,1,0,-1)$, $u_3 = (0,0,1,0)$. Alors la famille (u_1,u_2,u_3) est une famille génératrice de F.
  Démontrons qu'elle est libre. Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_E$.
  On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda_1 & = 0 \\ \lambda_2 & = 0 \\ \lambda_3 & = 0 \\ -2\lambda_1 - \lambda_2 & = 0 \end{cases}$$

  Il admet pour unique solution $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = (0,0,0)$. On a démontré :

$$\forall (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \qquad \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_E \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0_{\mathbb{R}}$$

  La famille (u_1,u_2,u_3) est donc libre.
  Cette famille est libre et génératrice de F donc c'est une base de F.
  Elle contient trois vecteurs donc F est de dimension 3.

- Pour G :

$$\begin{aligned} G &= \{(x,y,z,t) \in E \mid z = x-3t\} = \left\{(x,y,x-3t,t) \mid (x,y,t) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left((1,0,1,0),(0,1,0,0),(0,0,-3,1)\right) \end{aligned}$$

  On note $v_1 = (1,0,1,0)$, $v_2 = (0,1,0,0)$, $v_3 = (0,0,-3,1)$. La famille (v_1,v_2,v_3) est une famille génératrice de G.
  On démontre qu'elle est libre comme ci-dessus.
  Elle est libre et génératrice de G donc c'est une base de G.
  Elle contient trois vecteurs donc G est de dimension 3.

- Pour la dimension de $F \cap G$ on en cherche une base.
  Cet espace est l'ensemble des vecteurs (x,y,z,t) de E vérifiant les deux équations $2x+y+t=0$ et $x-z-3t=0$. On résout le système :

$$\begin{cases} 2x + y + t = 0 \\ x - z - 3t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - z - 3t = 0 \\ y + 2z + 7t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z + 3t \\ y = -2z - 7t \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} F \cap G &= \left\{ (z+3t, -2z-7t, z, t) \mid (z,t) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \operatorname{Vect}\left((1,-2,1,0),(3,-7,0,1)\right) \end{aligned}$$

On pose $w_1 = (1,-2,1,0)$ et $w_2 = (3,-7,0,1)$. Alors la famille (w_1, w_2) est génératrice de $F \cap G$.
Elle contient deux vecteurs, lesquels ne sont pas colinéaires, donc elle est libre.
Elle est libre et génératrice de $F \cap G$ donc c'est une base de $F \cap G$.
Elle contient deux vecteurs donc $F \cap G$ est de dimension 2.

b. Pour $F+G$, comme $F = \operatorname{Vect}(u_1,u_2,u_3)$ et $G = \operatorname{Vect}(v_1,v_2,v_3)$ alors :

$$F+G = \operatorname{Vect}(u_1,u_2,u_3,v_1,v_2,v_3)$$

On remarque que $u_3 = e_3$, et $v_2 = e_2$, donc e_2 et e_3 appartiennent à $F+G$.
Ensuite $u_2 = (0,1,0,-1)$ donc $e_4 = e_2 - u_2$, et ainsi e_4 appartient à $F+G$.
Finalement $v_1 = (1,0,1,0)$ donc $e_1 = v_1 - e_3$, et donc e_1 appartient aussi à $F+G$.
Comme $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E contenant la base canonique de E alors $F+G=E$.

17 Soit $E = \mathbb{R}^4$ et :

$$\begin{aligned} F &= \operatorname{Vect}\left((1,3,1,2),(2,4,2,3)\right) \\ G &= \left\{ (x,y,z,t) \in E \mid x+t = y+z \right\}. \end{aligned}$$

Donner la dimension de F, G, $F \cap G$ puis $F+G$.

Réponses :

Le sous-espace vectoriel F admet pour base (u_1,u_2) avec $u_1 = (1,3,1,2)$ et $u_2 = (2,4,2,3)$.
Le sous-espace vectoriel G admet pour base (v_1,v_2,v_3) avec $v_1 = (1,0,0,-1)$, $v_2 = (0,1,0,1)$, et $v_3 = (0,0,1,1)$.
Le sous-espace vectoriel $F \cap G$ admet pour base (w_1) avec $w_1 = (1,1,1,1)$.
Pour obtenir cette dernière base on écrit $u = \alpha u_1 + \beta u_2$ où $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.
Alors $u = (\alpha+2\beta, 3\alpha+4\beta, \alpha+2\beta, 2\alpha+3\beta)$, donc u appartient à G si et seulement si il vérifie son équation $x+t = y+z$, ce qui donne $\alpha = \beta$.
On en déduit que $F \cap G = \operatorname{Vect}(u_1 - u_2) = \operatorname{Vect}((1,1,1,1))$.
Par propriété de la somme $F+G = \operatorname{Vect}(u_1,u_2,v_1,v_2,v_3)$.
On remarque que $u_1 - v_1 - 3v_2 - v_3 = -e_4$, donc $e_4 \in F+G$.
Ensuite $e_1 = v_1 + e_4$, $e_2 = v_2 - e_4$, $e_3 = v_3 - e_4$, donc e_1, e_2, e_3 appartiennent à $F+G$.
Finalement $F+G$ contient les quatre vecteurs de la base canonique de E, donc il contient E, et ainsi $F+G=E$.

18 Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et :

$$\begin{aligned} F &= \{ P \in E \mid P(1) = P(2) = 0\} \\ G &= \{ P \in E \mid P(3) = P(4) = 0\}. \end{aligned}$$

a. Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E et donner une base de chacun d'entre eux.

b. Démontrer que F et G sont supplémentaires.

a. Un polynôme P de E appartient à F si et seulement si $P(1) = P(2) = 0$, ce qui signifie que 1 et 2 en sont racines, et donc il existe un polynôme Q tel que $P = (X-1)(X-2)Q$. Comme P appartient à E alors son degré est inférieur ou égal à 3 et donc Q est de degré inférieur ou égal à 1. Ainsi il existe deux scalaires a et b tels que $Q = aX + b$. Ceci montre que :

$$F = \left\{ (aX + b)(X - 1)(X - 2) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} F &= \left\{ aX(X - 1)(X - 2) + b(X - 1)(X - 2) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \operatorname{Vect}\left(X(X - 1)(X - 2), (X - 1)(X - 2)\right) \end{aligned}$$

Ceci montre que F est un sous-espace vectoriel de E, car les polynômes $X(X-1)(X-2)$ et $(X - 1)(X - 2)$ appartiennent à E.

De plus la famille $(X(X - 1)(X - 2), (X - 1)(X - 2))$ est génératrice de F.
Ses deux polynômes sont de degrés échelonnés (2 et 3), donc elle est libre.
Elle est libre et génératrice de F donc c'est une base de F.
Elle contient deux vecteurs donc F est de dimension 2.

On démontre de la même façon que la famille $(X(X - 3)(X - 4), (X - 3)(X - 4))$ est une base de G, et donc G est de dimension 2 également.

b. Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E alors ils contiennent son vecteur nul, et donc $\{0_E\} \subseteq F \cap G$.
Réciproquement, soit P un élément de $F \cap G$.
Comme $P \in F$ alors $P(1) = P(2) = 0$. Comme $P \in G$ alors $P(3) = P(4) = 0$.
Ainsi P contient 4 racines. Or P est de degré au plus 3 car il appartient à E, donc P est le polynôme nul. En effet, un polynôme non-nul de degré n admet au plus n racines distinctes.
Ceci montre que $F \cap G \subseteq \{0_E\}$, et par double inclusion : $F \cap G = \{0_E\}$
Ainsi F et G sont en somme directe.

Pour prouver qu'ils sont supplémentaires il reste à démontrer que $F \oplus G = E$.
Cela revient à prouver que pour tout $P \in E$ il existe quatre scalaires a, b, c, d tel que :

$$P = (aX + b)(X - 1)(X - 2) + (cX + d)(X - 3)(X - 4)$$

En spécialisant en 1, 2, 3, 4 on aboutit au système linéaire :

$$\begin{cases} \qquad\qquad\quad 6c + 6d = P(1) \\ \qquad\qquad\quad 4c + 2d = P(2) \\ 6a \ + 2b \qquad\qquad\ = P(3) \\ 24a + 6b \qquad\qquad = P(4) \end{cases}$$

On démontre que ce système est de Cramer, donc il admet une solution (a, b, c, d).
Le polynôme $P - (aX + b)(X - 1)(X - 2) + (cX + d)(X - 3)(X - 4)$ est de degré au plus 3, il admet 4 racines donc il est nul, et ainsi $P = (aX + b)(X - 1)(X - 2) + (cX + d)(X - 3)(X - 4)$.
On pourra justifier plus tard ceci de façon beaucoup plus rapide grâce à un argument de dimension :
Comme F et G sont en somme directe alors : $\dim(F + G) = \dim F + \dim G$
Ceci donne $\dim(F + G) = 4$. Or $\dim E = 4$. Ainsi :

$$F + G \subseteq E \qquad \text{et} \qquad \dim(F + G) = \dim E$$

Par théorème ceci implique $F + G = E$.

19 Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

a. Soit F l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = 2u_{n+1} + 15u_n.$$
Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E et en donner une base.

b. Même question avec les suites telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = 8u_{n+1} - 16u_n.$$

a. On peut démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E en utilisant la caractérisation des sous-espaces vectoriels, mais ceci ne permet pas d'en donner une base.
Il faut pour ceci expliciter les éléments de F.
L'équation caractéristique associée aux suites de F est :
$$\lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0$$
Ses racines sont -3 et 5, donc les suites de F sont les suites vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \alpha(-3)^n + \beta 5^n \qquad \text{où} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$
Posons $(a_n) = ((-3)^n)$ et $(b_n) = (5^n)$. Alors les suites (u_n) de F sont combinaisons linéaires des suites (a_n) est (b_n), donc :
$$F = \left\{ \alpha(a_n) + \beta(b_n) \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect}\left((a_n), (b_n)\right)$$
On en déduit que F est un sous-espace vectoriel de E, car (a_n) et (b_n) appartiennent à E.

D'autre part la famille $((a_n), (b_n))$ est génératrice de F. Démontrons qu'elle est libre.

Soit λ_1, λ_2 deux réels tels que $\lambda_1(a_n) + \lambda_2(b_n) = 0_E$. Ceci signifie :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \lambda_1(-3)^n + \lambda_2 5^n = 0_{\mathbb{R}}$$
Pour $n = 0$ on obtient $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Pour $n = 1$ on obtient $-3\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0$. On résout le système obtenu :
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -3\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 8\lambda_2 = 0 \end{cases} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$
On a démontré que :
$$\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \qquad \lambda_1(a_n) + \lambda_2(b_n) = 0_E \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 0_{\mathbb{R}}$$
Ainsi la famille $((a_n), (b_n))$ est libre. Comme elle est aussi génératrice de F alors c'est une base de F.
On en déduit que F est de dimension 2.

b. On obtient $F = \text{Vect}\left((4^n), (n4^n)\right)$.
On démontre que la famille de suites $((4^n), (n4^n))$ est libre, donc c'est une base de F, et ainsi F est de dimension 2.

20 Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et F le sous-ensemble de E contenant les suites arithmétiques. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et donner sa dimension.

Une suite arithmétique est déterminée par sa raison et son premier terme :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = u_0 + nr \qquad \text{où} \quad (u_0, r) \in \mathbb{R}^2$$

Définissons deux suites (a_n) et (b_n) par :

$$(a_n) = (1)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1, 1, \ldots) \qquad (b_n) = (n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, 1, 2, \ldots)$$

On remarque que si (u_n) est arithmétique de premier terme u_0 et de raison r alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = u_0 \times a_n + r \times b_n \tag{$\star$}$$

On en déduit que $(u_n) = u_0(a_n) + r(b_n)$, *i.e.*, (u_n) est combinaison linéaire des suites (a_n) et (b_n).
Réciproquement, toute suite de la forme $(\star)$ est arithmétique, donc l'ensemble des suites arithmétiques est :

$$F = \text{Vect}\left((a_n), (b_n)\right)$$

Comme (a_n) est (b_n) sont deux suites de E alors F est un sous-espace vectoriel de E.

De plus la famille $((a_n), (b_n))$ est génératrice de F.
On démontre qu'elle est libre. Soit α et β deux scalaires tels que $\alpha(a_n) + \beta(b_n) = 0_E$. Ceci donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \alpha + \beta n = 0$$

En particulier pour $n = 0$ on obtient $\alpha = 0$, puis pour $n = 1$ on obtient $\beta = 0$.
On a donc démontré que :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \qquad \alpha(a_n) + \beta(b_n) = 0_E \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta = 0_{\mathbb{R}}$$

Ceci signifie que la famille (a_n, b_n) est libre.
Elle est libre et génératrice de F, donc c'est une base de F.
Le sous-espace vectoriel F est donc de dimension 2.

21 Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivables.

a. Démontrer que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et donner sa dimension.

b. Même question avec l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ où ω est un réel non-nul fixé.

a. On note F l'ensemble des solutions de l'équation différentielle :

$$\mathcal{E} : \qquad y'' + 2y' + y = 0$$

Pour démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E on pourrait utiliser la caractérisation des sous-espaces vectoriels, mais elle ne nous donnera pas de base de F.
On explicite plutôt F. L'équation caractéristique de $\mathcal{E}$ est : $\quad \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$
Elle admet $\lambda_0 = -1$ pour unique solution, donc les solutions de l'équation $\mathcal{E}$ sont les fonctions définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) = (\alpha t + \beta)e^{-t} \qquad \text{où} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

On définit deux fonctions y_1 et y_2 par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y_1(t) = e^{-t} \qquad \text{et} \qquad y_2(t) = te^{-t}$$

Alors les solutions de l'équation $\mathcal{E}$ sont les fonctions $y = \alpha y_1 + \beta y_2$ où α et β sont deux scalaires, ce sont donc les combinaisons linéaires de y_1 et y_2 :

$$F = \text{Vect}\,(y_1, y_2)$$

Comme f_1 et f_2 sont deux fonctions deux fois dérivables alors elles appartiennent à E, donc F est un sous-espace vectoriel de E.
Comme il est engendré par une famille finie de vecteurs alors il est de dimension finie.
La famille (f_1, f_2) est génératrice de F, montrons qu'elle est libre.
Soit (λ_1, λ_2) un couple de scalaires tel que $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0_E$. Ceci donne :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \lambda_1 e^{-t} + \lambda_2 te^{-t} = 0$$

Comme e^{-t} est non-nul alors on obtient : $\quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \lambda_1 + \lambda_2 t = 0$.
En particulier pour $t = 0$ on obtient $\lambda_1 = 0$, puis pour $t = 1$ on obtient $\lambda_2 = 0$.
On en déduit :

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \qquad \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0_E \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0_{\mathbb{R}}$$

Ceci montre que la famille (y_1, y_2) est libre.
Or elle est génératrice de F, donc c'est une base de F.
En conséquence, F est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2.

b. On obtient $F = \text{Vect}\,(y_1, y_2)$ avec :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y_1(t) = \cos(\omega t) \qquad y_2(t) = \sin(\omega t)$$

On démontre que la famille (y_1, y_2) est libre, donc c'est une base de F, et ainsi F est de dimension 2.

22 Démontrer que l'ensemble des fonctions sinusoïdales de période 2π :

$$f : x \mapsto A\sin(x+\varphi) + K \quad \text{avec} \quad (A, \varphi, K) \in \mathbb{R}^3$$

est un espace vectoriel de dimension finie et donner sa dimension.

Notons F l'ensemble des fonctions sinusoïdales de période 2π :

$$F = \left\{ \begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & A\sin(x+\varphi) + K \end{array} \;\middle|\; (A, \varphi, K) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

On peut écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad A\sin(x+\varphi) + K = A\cos\varphi \sin x + A\sin\varphi\cos x + K$$

En posant $\alpha = A\cos\varphi$ et $\beta = A\sin\varphi$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad A\sin(x+\varphi) + K = \alpha\sin x + \beta\cos x + K$$

Ceci montre que tout élément de F est combinaison linéaire des fonctions sin, cos et 1 :

$$F \subseteq \left\{ \begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \alpha\sin x + \beta\cos x + K \end{array} \;\middle|\; (\alpha, \beta, K) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \operatorname{Vect}(\sin, \cos, 1)$$

Réciproquement, grâce à la transformation de Fresnel on sait que toute fonction $x \mapsto \alpha\sin x + \beta\cos x$ s'écrit $A\sin(x+\varphi)$. Il faut poser pour ceci $A = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, puis choisir un réel φ tel que :

$$\cos\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \qquad \text{et} \qquad \sin\varphi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

On en déduit par double inclusion que :

$$F = \operatorname{Vect}(\sin, \cos, 1)$$

Ainsi F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc un espace vectoriel.

La famille $(\sin, \cos, 1)$ est une famille génératrice de F. Démontrons qu'elle est libre.

Soit λ_1, λ_2, λ_3 trois réels tels que :

$$\lambda_1 \sin + \lambda_2 \cos + \lambda_3 = 0_F$$

Ceci signifie que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \lambda_1 \sin x + \lambda_2 \cos x + \lambda_3 = 0_{\mathbb{R}}$$

Cette égalité est vraie en particulier pour $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = \pi$, donc :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 & = & 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Ceci implique que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0_{\mathbb{R}}$. Ainsi la famille $(\sin, \cos, 1)$ est libre.

Cette famille est donc une base de F, ce qui montre que F est de dimension 3.

23 Soit α un scalaire.

a. Démontrer que la famille $((X-\alpha)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre.

b. Démontrer que cette famille est une base de $\mathbb{K}[X]$, et donner les coordonnées d'un polynôme quelconque P dans cette base.

a. Par définition la famille $((X-\alpha)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre si et seulement si toutes ses sous-familles finies sont libres.

Une sous-famille finie est incluse dans une sous-famille $((X-\alpha)^k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ pour un certain $n\in\mathbb{N}$. Il suffit de donc de démontrer que toutes les familles $((X-\alpha)^k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ sont libres.

Or les polynômes $(X-\alpha)^k$ sont de degrés distincts, donc par propriété pour tout $n\in\mathbb{N}$ la famille $((X-\alpha)^k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre.

Ceci montre que la famille $((X-\alpha)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre.

b. Soit P un polynôme, et soit n son degré. Alors d'après la formule de Taylor :

$$\begin{aligned}P &= \sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k\\ &= P(\alpha)+P'(\alpha)(X-\alpha)+\frac{P''(\alpha)}{2}(X-\alpha)^2+\cdots+\frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}(X-\alpha)^n\end{aligned}$$

Ceci montre que les coordonnées de P dans la base $((X-\alpha)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont $\left(\frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

Il s'agit bien d'une suite presque nulle de réels, c'est-à-dire d'une suite nulle à partir d'un certain rang, car les $P^{(k)}$ sont nuls dès que k est strictement supérieur à n.

24 Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$ on définit la fonction :

$$f_\alpha : \begin{array}{rcl}\mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \frac{1}{1+x^\alpha}\end{array}$$

a. Démontrer que la partie $\mathcal{E}=\{\,f_\alpha \mid \alpha\in\mathbb{R}\}$ est liée.

b. Démontrer que la partie $\mathcal{F}=\{\,f_\alpha \mid \alpha\in\mathbb{R}_+\}$ est libre.

c. La partie $\mathcal{F}$ est-elle génératrice ?

a. Pour $\alpha=1$, $\alpha=-1$ et $\alpha=0$ on obtient :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^* \qquad f_1(x)=\frac{1}{1+x} \qquad f_{-1}(x)=\frac{x}{1+x} \qquad f_0(x)=\frac{1}{2}$$

On remarque que $f_1+f_{-1}=2f_0$, donc la famille $\mathcal{E}$ est liée.

b. On considère une famille finie $(f_{\alpha_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'éléments de $\mathcal{F}$. Quitte à intervertir ses éléments on peut supposer la suite $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ strictement croissante.

Soit $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ des scalaires tels que :

$$\lambda_1 f_{\alpha_1}+\lambda_2 f_{\alpha_2}+\cdots+\lambda_n f_{\alpha_n}=0_E$$

On suppose qu'au moins l'un des λ_i est non-nul. Quitte à réduire la taille de la famille on peut supposer que le coefficient λ_1 est non-nul.
En multipliant par x^{α_1}, qui n'est pas nul, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \lambda_1 x^{\alpha_1} f_{\alpha_1}(x) + \cdots + \lambda_n x^{\alpha_1} f_{\alpha_n}(x) = 0$$

Pour tout $i = 1, \ldots, n$:

$$x^{\alpha_1} f_{\alpha_i}(x) = \frac{x^{\alpha_1}}{1 + x^{\alpha_i}}$$

Si $i > 1$ alors $\alpha_i > \alpha_1$ donc $\alpha_i > 0$ alors ainsi $f_{\alpha_i}(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{x^{\alpha_i}}$, puis $x^{\alpha_1} f_{\alpha_i}(x) \underset{(+\infty)}{\sim} x^{\alpha_1 - \alpha_i}$.
Comme $\alpha_1 < \alpha_i$ alors $x^{\alpha_1 - \alpha_i}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^{\alpha_1} f_{\alpha_i}(x) \right) = \lim_{x \to +\infty} \lambda_1 x^{\alpha_1} f_{\alpha_1}(x_1)$$

Si $\alpha_1 = 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha_1} f_{\alpha_1}(x) = \frac{1}{2}$, si $\alpha_1 > 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha_1} f_{\alpha_1}(x) = 1$.
On en déduit :

$$\lim_{x \to +\infty} \lambda_1 x^{\alpha_1} f_{\alpha_1}(x_1) = \begin{cases} \frac{\lambda_1}{2} & \text{si } \alpha_1 = 0 \\ \lambda_1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a supposé que λ_1 est non-nul, donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^{\alpha_1} f_{\alpha_i}(x) \right) \neq 0 \qquad \text{alors que :} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^{\alpha_1} f_{\alpha_i}(x) = 0$$

Cette contradiction montre que tous les λ_i sont nuls, et ainsi la famille $\mathcal{F}$ est libre.

c. La limite de f_α en $+\infty$ est :

$$\lim_{x \to +\infty} f_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } \alpha = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi toute combinaison linéaire des f_α admet une limite finie en $+\infty$.
Or $\mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$ contient des fonctions n'admettant pas de limite finie en $+\infty$, comme par exemple la fonction $x \mapsto x$, et donc la famille $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice de $\mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$.

$\boxed{\textbf{25}}$ Soit $E = \mathbb{R}^4$, et :

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y,z,t) \in E \mid x+y-2t=2\} \\ B &= \{(x,y,z,t) \in E \mid 2x-2z+3t=3\} \\ C &= A \cap B. \end{aligned}$$

Justifier que A, B, C sont des sous-espaces affines de E.

Donner un point et la direction de chacun d'entre eux.

On écrit :

$$\begin{aligned} A &= \Big\{(2-y+2t,y,z,t) \mid (y,z,t) \in \mathbb{R}^3\Big\} \\ &= (2,0,0,0) + \mathrm{Vect}\left((-1,1,0,0),(0,0,1,0),(2,0,0,1)\right) \\ B &= \Big\{\left(\tfrac{3}{2}+z-\tfrac{3}{2}t,y,z,t\right) \;\Big|\; (y,z,t) \in \mathbb{R}^3\Big\} \\ &= \left(\tfrac{3}{2},0,0,0\right) + \mathrm{Vect}\Big((0,1,0,0),(1,0,1,0),\left(-\tfrac{3}{2},0,0,1\right)\Big). \end{aligned}$$

On remarque que le vecteur $(0,0,0,1)$ appartient à B et donc on peut modifier l'écriture :

$$B = (0,0,0,1) + \mathrm{Vect}\left((0,1,0,0),(1,0,1,0),(-3,0,0,2)\right).$$

Ces deux écritures montrent que A et B sont des sous-espaces affines, et comme C est leur intersection alors C est aussi un sous-espace affine s'il n'est pas vide.

L'intersection $C = A \cap B$ est l'ensemble des solutions du système :

$$\begin{cases} x + y \phantom{{}-2z} - 2t = 2 \\ 2x \phantom{{}+y} - 2z + 3t = 3. \end{cases}$$

On obtient :

$$C = \left(\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2},0,0\right) + \mathrm{Vect}\Big((1,-1,1,0),\left(-\tfrac{3}{2},\tfrac{7}{2},0,1\right)\Big)$$

On remarque que $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},0,0\right)+\left(-\frac{3}{2},\frac{7}{2},0,1\right)=(0,4,0,1)$ donc ce dernier vecteur appartient à C et :

$$C = (0,4,0,1) + \mathrm{Vect}\left((1,-1,1,0),(-3,7,0,2)\right).$$

$\boxed{\mathbf{26}}$ Soit $E = \mathbb{K}[X]$ et :

$$A = \left\{ P \in E \;\middle|\; \begin{array}{l} P(1) = P'(0) = 0 \\ P(0) = P'(1) = 1 \end{array} \right\}$$

a. Déterminer un polynôme P_0 de degré minimal appartenant à A.

b. Décrire l'ensemble $\{ P - P_0 \mid P \in A \}$.

c. En déduire que A est un sous-espace affine de E et décrire ses éléments.

a. On obtient $P_0 = 3X^3 - 4X^2 + 1$.

b. On démontre par double inclusion que l'ensemble considéré est l'ensemble des multiples du polynôme $X^2(X-1)^2$.
En effet le polynôme $Q = P - P_0$ vérifie $Q(0) = Q(1) = Q'(0) = Q'(1) = 0$.
Il est multiple de $X^2(X-1)^2$.

c. On en déduit :
$$A = P_0 + X^2(X-1)^2 E.$$
Il s'agit bien d'un sous-espace affine.