

Corrigé du T. D. B9

Applications linéaires

① Démontrer que les applications suivantes sont linéaires puis déterminer leurs noyaux et images.

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \longmapsto (3x - y, x + 2y + z) \qquad (x, y) \longmapsto (x - y, 3x + 3y, x + 2y)$$

- Linéarité de f .

Soit $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$ deux éléments de \mathbb{R}^3 , λ un scalaire. Alors :

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= f(\lambda(x, y, z) + (x', y', z')) \\ &= f((\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')) \\ &= (3(\lambda x + x') - (\lambda y + y'), (\lambda x + x') + 2(\lambda y + y') + (\lambda z + z')) \\ &= (\lambda(3x - y) + 3x' - y', \lambda(x + 2y + z) + x' + 2y' + z') \\ &= \lambda(3x - y, x + 2y + z) + (3x' - y', x' + 2y' + z') \\ &= \lambda f(u) + f(v) \end{aligned}$$

D'après la caractérisation, f est une application linéaire.

- Noyau de f .

Soit $u = (x, y, z)$ un élément de \mathbb{R}^3 . Alors :

$$u \in \ker f \iff f(u) = 0_{\mathbb{R}^2} \iff (3x - y, x + 2y + z) = (0, 0)$$

On obtient un système linéaire que l'on résout par l'algorithme du pivot de Gauss :

$$u \in \ker f \iff \begin{cases} 3x - y = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + \frac{1}{7}z = 0 \\ y + \frac{3}{7}z = 0 \end{cases}$$

On en déduit :

$$\ker f = \left\{ \left(-\frac{1}{7}z, -\frac{3}{7}z, z \right) \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\left(-\frac{1}{7}, -\frac{3}{7}, 1 \right) \right) = \text{Vect}((1, 3, -7))$$

- Image de f .

Par définition :

$$\text{im } f = \{ f(u) \mid u \in \mathbb{R}^3 \}$$

On écrit donc :

$$\text{im } f = \{ (3x - y, x + 2y + z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \} = \text{Vect}((3, 1), (-1, 2), (0, 1))$$

On remarque que $(1, 0) = \frac{1}{3}((3, 1) - (0, 1))$, donc le vecteur $(1, 0)$ appartient à l'image de f . Or le vecteur $(0, 1)$ appartient aussi à cette image.

Ainsi $\text{im } f$ contient la base canonique de \mathbb{R}^2 . Or $\text{im } f$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 , donc il contient tout l'espace engendré par la base canonique, à savoir \mathbb{R}^2 .

On en déduit : $\text{im } f = \mathbb{R}^2$

- Remarque. On a obtenu $\ker f = \text{Vect}((1, 3, -7))$ et $\text{im } f = \mathbb{R}^2$, avec $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ linéaire.

Effectivement, $\ker f$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 et $\text{im } f$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .

- Linéarité de g .

Soit $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ deux éléments de \mathbb{R}^2 , λ un scalaire. Alors :

$$\begin{aligned} g(\lambda u + v) &= g(\lambda(x, y) + (x', y')) \\ &= g((\lambda x + x', \lambda y + y')) \\ &= ((\lambda x + x') - (\lambda y + y'), 3(\lambda x + x') + 3(\lambda y + y'), (\lambda x + x') + 2(\lambda y + y')) \\ &= (\lambda(x - y) + x' - y', \lambda(3x + 3y) + 3x' + 3y', \lambda(x + 2y) + x' + 2y') \\ &= \lambda(x - y, 3x + 3y, x + 2y) + (x' - y', 3x' + 3y', x' + 2y') \\ &= \lambda g(u) + g(v) \end{aligned}$$

D'après la caractérisation, g est une application linéaire.

- Noyau de g .

Soit $u = (x, y)$ un élément de \mathbb{R}^2 . Alors :

$$u \in \ker g \iff g(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff (x - y, 3x + 3y, x + 2y) = (0, 0, 0)$$

On résout le système obtenu :

$$u \in \ker g \iff \begin{cases} x - y = 0 \\ 3x + 3y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y = 0 \\ 6y = 0 \\ 3y = 0 \end{cases} \iff x = y = 0$$

On en déduit :

$$\ker g = \{(0, 0)\} = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$$

- Image de g .

On écrit :

$$\begin{aligned} \text{im } g &= \{g(u) \mid u \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(x - y, 3x + 3y, x + 2y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{Vect}((1, 3, 1), (-1, 3, 2)) \end{aligned}$$

La suite est optionnelle : on peut écrire $(1, 3, 1) + (-1, 3, 2) = (0, 6, 3) = 3(0, 2, 1)$, donc $\text{im } g = \text{Vect}((1, 3, 1), (0, 2, 1))$, puis finalement, comme $(1, 3, 1) - (0, 2, 1) = (1, 1, 0)$:

$$\text{im } g = \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 2, 1))$$

Ceci permet de montrer que $\text{im } g$ est le plan de \mathbb{R}^3 d'équation $x - y + 2z = 0$.

- Remarque. On a obtenu $\ker g = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ et $\text{im } g = \text{Vect}((1, 3, 1), (-1, 3, 2))$ avec $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ linéaire.

Conformément à la propriété $\ker g$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 et $\text{im } g$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

② Mêmes questions avec $f : \mathbb{K}_2[X] \longrightarrow \mathbb{K}$ et $g : \mathbb{K}_2[X] \longrightarrow \mathbb{K}_2[X]$
 $P \longmapsto P(2)$ $P \longmapsto P'$

- Linéarité.

La spécialisation est linéaire car :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad (P + Q)(2) = P(2) + Q(2) \quad \text{et} \quad (\lambda P)(2) = \lambda P(2)$$

La dérivation est également linéaire :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad (P + Q)' = P' + Q' \quad \text{et} \quad (\lambda P)' = \lambda P'$$

La spécialisation est à valeurs dans \mathbb{K} , donc f est bien définie et linéaire.

La dérivation d'un polynôme de degré au plus 2 donne un polynôme de degré au plus 1, donc *a fortiori* un polynôme de degré au plus 2, et donc g est bien définie et linéaire.

- Noyau de f .

Par définition le noyau de f est l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{K}_2[X]$ tels que $f(P) = 0_{\mathbb{K}}$, *i.e.*, $P(2) = 0$:

$$\ker f = \{P \in \mathbb{K}_2[X] \mid P(2) = 0\}$$

Cette description de $\ker f$ est satisfaisante, mais on peut aller plus loin : $P(2) = 0$ signifie que 2 est racine de P , donc que P est multiple de $(X - 2)$: Il existe un polynôme Q tel que $P = (X - 2)Q$. Or P est de degré au plus 2, donc Q est de degré au plus 1. On en déduit :

$$\begin{aligned} \ker f &= \{(aX + b)(X - 2) \mid (a, b) \in \mathbb{K}^2\} \\ &= \{aX(X - 2) + b(X - 2) \mid (a, b) \in \mathbb{K}^2\} \\ &= \text{Vect}(X(X - 2), X - 2) \end{aligned}$$

Ceci confirme en particulier que $\ker f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_2[X]$.

- Image de f .

Par définition : $\text{im } f = \{f(P) \mid P \in \mathbb{K}_2[X]\} = \{P(2) \mid P \in \mathbb{K}_2[X]\}$

Or tout scalaire est image de 2 par un polynôme de degré au plus 2.

En effet, si α est un scalaire quelconque, alors $P = X - 2 + \alpha$ appartient à $\mathbb{K}_2[X]$, et $P(2) = \alpha$.

Ceci montre que : $\text{im } f = \mathbb{K}$

Il s'agit bien d'un espace vectoriel de \mathbb{K} .

De toutes façons, \mathbb{K} ne contient que deux sous-espace vectoriel : $\{0_{\mathbb{K}}\}$ et \mathbb{K} , et ici l'image de f ne peut être réduite au scalaire nul.

- Noyau de g .

Un polynôme P de $\mathbb{K}_2[X]$ appartient au noyau de g si et seulement si $g(P) = 0_{\mathbb{K}_2[X]}$, donc si et seulement si $P' = 0$, ce qui a lieu si et seulement si P est constant.

On en déduit : $\ker g = \mathbb{K}_0[X]$.

Il s'agit bien d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_2[X]$.

- Image de g .

Par définition : $\operatorname{im} g = \{g(P) \mid P \in \mathbb{K}_2[X]\} = \{P' \mid P \in \mathbb{K}_2[X]\}$

Démontrons que : $\operatorname{im} g = \mathbb{K}_1[X]$

Méthode 1. Si P est un polynôme de degré au plus 2 alors P' est un polynôme de degré au plus 1, donc $\operatorname{im} g \subseteq \mathbb{K}_1[X]$.

Si P est un polynôme de degré au plus 1 alors il est le dérivé d'un certain polynôme de degré au plus 2. Par exemple si $P = aX + b$ alors en posant $Q = \frac{a}{2}X^2 + bX$ on a $Q' = P$, ce qui montre que $P = g(Q)$ et donc $P \in \operatorname{im} g$.

Ceci montre que $\mathbb{K}_1[X] \subseteq \operatorname{im} g$, puis par double inclusion : $\operatorname{im} g = \mathbb{K}_1[X]$.

Méthode 2. On sait que $\mathbb{K}_2[X] = \{aX^2 + bX + c \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$. On en déduit :

$$\operatorname{im} g = \{(aX^2 + bX + c)' \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\} = \{2aX + b \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \operatorname{Vect}(2X, 1)$$

Ceci donne : $\operatorname{im} g = \operatorname{Vect}(X, 1) = \mathbb{K}_1[X]$

Finalement, on a démontré que $\operatorname{im} g = \mathbb{K}_1[X]$.

Il s'agit bien d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_2[X]$.

③ Parmi les applications linéaires proposées dans les deux exercices précédents, lesquelles sont injectives ? Surjectives ?

On rappelle que si $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire alors :

$$\begin{aligned} f \text{ injective} &\iff \ker f = \{0_E\} \\ f \text{ surjective} &\iff \operatorname{im} f = F \end{aligned}$$

Dans l'exercice 1 on a obtenu :

$$\ker f = \operatorname{Vect}((1, 3, -7)) \neq \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad \operatorname{im} f = \mathbb{R}^2$$

Donc f n'est pas injective mais est surjective.

Ensuite :

$$\ker g = \{0_{\mathbb{R}^2}\} \quad \text{et} \quad \operatorname{im} g = \operatorname{Vect}((1, 3, 1), (-1, 3, 2)) \neq \mathbb{R}^3$$

Donc g est injective mais n'est pas surjective. Le fait que $\operatorname{im} g$ est différent de \mathbb{R}^3 n'est pas prouvé rigoureusement ici. Nous verrons que \mathbb{R}^3 ne peut pas être engendré par moins de 3 vecteurs puisqu'il est de dimension 3.

Dans l'exercice 2 on a obtenu :

$$\ker f = \{P \in \mathbb{K}_2[X] \mid P(2) = 0\} \neq \{0_{\mathbb{K}_2[X]}\} \quad \text{et} \quad \operatorname{im} f = \mathbb{K}$$

Donc f n'est pas injective mais f est surjective. Le fait que $\ker f$ n'est pas réduit au polynôme nul peut être justifié car par exemple le polynôme $(X - 2)$ est dans le noyau de f alors qu'il n'est pas nul.

Ensuite :

$$\ker g = \mathbb{K}_0[X] \neq \mathbb{K}_2[X] \quad \text{et} \quad \text{im } g = \mathbb{K}_1[X] \neq \mathbb{K}_2[X]$$

Donc g n'est ni injective ni surjective.

④ Soit p l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in E \quad p(x, y, z) = (x + y - z, x + y - z, x + y - z)$$

Démontrer que p est un projecteur et déterminer ses éléments caractéristiques.

On justifie d'abord que p est linéaire.

Les trois composantes de p sont les fonctions $(x, y, z) \mapsto x + y - z$, elles sont de la forme $(x, y, z) \mapsto ax + by + cz$ avec a, b, c scalaires, donc elles sont linéaires.

Comme les trois composantes de p sont linéaires alors p est linéaire.

Pour démontrer que p est un projecteur on vérifie que $p \circ p = p$.

Soit (x, y, z) un vecteur de E . Alors :

$$\begin{aligned} p \circ p(x, y, z) &= p(x + y - z, x + y - z, x + y - z) \\ &= ((x + y - z) + (x + y - z) - (x + y - z), \\ &\quad (x + y - z) + (x + y - z) - (x + y - z), \\ &\quad (x + y - z) + (x + y - z) - (x + y - z)) \\ &= (x + y - z, x + y - z, x + y - z) \\ &= p(x, y, z) \end{aligned}$$

Ainsi $p \circ p = p$, donc p est un projecteur.

On sait que p est alors le projecteur sur F parallèlement à G , où $F = \text{im } p$ et $G = \ker p$.

On calcule donc :

$$\begin{aligned} G &= \text{im } p = \{(x + y - z, x + y - z, x + y - z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \text{Vect}((1, 1, 1), (1, 1, 1), (-1, -1, -1)) \\ &= \text{Vect}((1, 1, 1)) \end{aligned}$$

Ensuite un vecteur (x, y, z) de E appartient au noyau de p si et seulement si $p(x, y, z) = (0, 0, 0)$, ce qui équivaut à $z = x + y$, donc :

$$\ker p = \{(x, y, x + y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 1))$$

Nous avons donc démontré que p est le projecteur de E sur $F = \text{Vect}((1, 1, 1))$ parallèlement à $G = \text{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 1))$.

⑤ Soit $a = (a_1, \dots, a_n)$ un vecteur de \mathbb{R}^n vérifiant : $\sum_{k=1}^n a_k^2 = 1$

a. Démontrer que l'application

$$p : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(\sum_{k=1}^n a_k x_k \right) a$$

est un endomorphisme de $E = \mathbb{R}^n$.

b. Démontrer que p est un projecteur sur une droite vectorielle parallèlement à un hyperplan.

a. L'application p est définie sur $E = \mathbb{R}^n$. Si $x = (x_1, \dots, x_n)$ est un vecteur de E alors $\sum_{k=1}^n a_k x_k$ est un scalaire, donc $(\sum_{k=1}^n a_k x_k)a$ est défini et appartient à E car c'est un multiple de a . Ainsi p est définie sur E et à valeurs dans E .

Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ deux vecteurs de $E = \mathbb{R}^n$ et λ un scalaire. Alors $\lambda x + y = (\lambda x_1 + y_1, \dots, \lambda x_n + y_n)$, puis

$$p(\lambda x + y) = \left(\sum_{k=1}^n a_k (\lambda x_k + y_k) \right) a$$

Par linéarité de la somme puis distributivité de la multiplication par un scalaire :

$$p(\lambda x + y) = \left(\lambda \sum_{k=1}^n a_k x_k + \sum_{k=1}^n a_k y_k \right) a = \lambda \left(\sum_{k=1}^n a_k x_k \right) a + \left(\sum_{k=1}^n a_k y_k \right) a = \lambda p(x) + p(y)$$

Ceci étant valable pour tous vecteurs x et y de \mathbb{R}^n et tout scalaire λ , l'application p est linéaire.

Finalement p est une application linéaire de E dans E donc c'est un endomorphisme de E .

b. Tout d'abord, comme $\sum_{k=1}^n a_k^2 = 1$ alors $p(a) = (\sum_{k=1}^n a_k^2)a = a$.

Ensuite, pour tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$ de E , par linéarité de p :

$$p \circ p(x) = p \left(\left(\sum_{k=1}^n a_k x_k \right) a \right) = \left(\sum_{k=1}^n a_k x_k \right) p(a) = \left(\sum_{k=1}^n a_k x_k \right) a = p(x)$$

On a démontré que $p \circ p(x) = p(x)$ pour tout $x \in E$, donc $p \circ p = p$ et p est un projecteur.

Démontrons que p est le projecteur sur $D = \text{Vect}(a)$ parallèlement à H , l'hyperplan d'équation $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$.

Notons $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sum_{k=1}^n a_k x_k$.

Ainsi pour tout $x \in E$: $p(x) = \varphi(x)a$.

Alors φ est une forme linéaire de E . Comme $\varphi(a) = 1$ alors φ est non-nul. Son noyau $H = \ker \varphi$ est donc un hyperplan de E .

Comme a est non-nul (car $\varphi(a) \neq 0_{\mathbb{K}}$) alors pour tout $x \in E$:

$$x \in \ker p \iff \varphi(x)a = 0_E \iff \varphi(x) = 0_{\mathbb{K}}$$

On en déduit que H est aussi le noyau de p : $\ker p = \ker \varphi = H$.

De plus l'image de p est : $\operatorname{im} p = \{p(x) \mid x \in E\} = \{\varphi(x)a \mid x \in E\}$

Ceci montre que $\operatorname{im} p \subseteq \operatorname{Vect}(a)$.

Réciproquement, si x est un élément de $\operatorname{Vect}(a)$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda a$, donc $p(x) = \lambda p(a) = \lambda a = x$, puis $x \in \operatorname{im} p$.

On a démontré que $\operatorname{im} p = \operatorname{Vect}(a)$. Il s'agit bien d'une droite vectorielle car a n'est pas nul.

Finalement p est le projecteur de E sur $D = \operatorname{Vect}(a)$ parallèlement à $H = \ker \varphi$.

⑥ Soit s l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^2$ défini par :

$$\forall (x, y) \in E \quad s(x, y) = (x, -2x - y)$$

Démontrer que s est une symétrie et déterminer ses éléments caractéristiques.

Pour démontrer que s est une symétrie on vérifie que $s \circ s = \operatorname{Id}_E$.

Soit (x, y) un vecteur de E . Alors :

$$s \circ s(x, y) = s(x, -2x - y) = (x, -2x - (-2x - y)) = (x, y)$$

Ainsi $s \circ s = \operatorname{Id}_E$, donc s est une symétrie.

On sait qu'alors s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G , où

$$F = \{u \in E \mid s(u) = u\} \quad \text{et} \quad G = \{u \in E \mid s(u) = -u\}$$

Soit $u = (x, y)$ un vecteur de E . Alors :

$$s(u) = u \iff (x, -2x - y) = (x, y) \iff -2x - y = y \iff y = -x$$

On en déduit :

$$F = \{(x, y) \in E \mid y = -x\} = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}((1, -1))$$

Ensuite :

$$s(u) = -u \iff (x, -2x - y) = (-x, -y) \iff x = 0$$

Donc :

$$G = \{(0, y) \in E \mid y \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}((0, 1))$$

Autre méthode. Pour déterminer F et G on utilise le projecteur associé $p = \frac{1}{2}(s + \operatorname{Id}_E)$.

En effet si $p = \frac{1}{2}(s + \operatorname{Id}_E)$ alors p est le projecteur sur F parallèlement à G . On obtient :

$$\forall (x, y) \in E \quad p(x, y) = \frac{1}{2}((x, -2x - y) + (x, y)) = (x, -x)$$

On obtient ensuite

$$F = \text{im } p = \text{Vect}((1, -1)) \quad \text{et} \quad G = \text{ker } p = \text{Vect}((0, 1))$$

Finalement on a démontré que s est la symétrie de E par rapport à $F = \text{Vect}((1, -1))$ parallèlement à $G = \text{Vect}((0, 1))$.

1 Soit E l'espace vectoriel des suites arithmétiques à valeurs dans \mathbb{K} .

Démontrer que l'application

$$f : \quad E \longrightarrow \mathbb{K}^2 \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto (u_0, u_1 - u_0)$$

est un isomorphisme.

Le fait que E est un espace vectoriel a été démontré dans la feuille de TD précédente.

- Démontrons que f est linéaire.

Méthode 1. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux éléments de E , donc deux suites arithmétiques, et λ un scalaire. Alors :

$$f(\lambda u + v) = ((\lambda u + v)_0, (\lambda u + v)_1 - (\lambda u + v)_0) = (\lambda u_0 + v_0, \lambda u_1 + v_1 - \lambda u_0 - v_0) \\ = \lambda(u_0, u_1 - u_0) + (v_0, v_1 - v_0) = \lambda f(u) + f(v).$$

D'après la caractérisation de applications linéaires f est une application linéaire de E dans \mathbb{K}^2 .

Méthode 2. La spécialisation des suites est une forme linéaire, donc les applications $u \mapsto u_0$ et $u \mapsto u_1$ sont des formes linéaires.

Par combinaison linéaire l'application $u \mapsto u_1 - u_0$ est une forme linéaire.

Les composantes de f sont des formes linéaires, donc f est une application linéaire de E dans \mathbb{K}^2 .

- f est injective.

On démontre que $\text{ker } f = \{0_E\}$.

Soit $u \in E$ tel que $f(u) = 0_{\mathbb{K}^2}$. Alors $u_0 = 0$ et $u_1 - u_0 = 0$. Or u est une suite arithmétique, donc sa raison est $r = u_1 - u_0$. Ainsi u est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 0$ et de raison $r = 0$, donc u est la suite nulle.

Il est évident que la suite nulle est dans le noyau de f , donc $\text{ker } f = \{0_E\}$, et f est injective.

- f est surjective.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = a$ et de raison $r = b$. Alors $f((u_n)) = (a, b)$. Ceci montre que tout élément de \mathbb{K}^2 admet un antécédent, donc f est surjective.

Finalement f est linéaire, injective et surjective, donc c'est un isomorphisme.

Nous verrons plus tard qu'un isomorphisme conserve la dimension. Comme \mathbb{K}^2 est de dimension 2 nous retrouvons le fait que E est de dimension 2.

2 Démontrer que les applications suivantes sont linéaires. Calculer leurs noyaux et leurs images. Déterminer ensuite les dimensions de ces noyaux et images.

$$\begin{array}{ll}
 f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 & f_6 : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\
 (x, y) \longmapsto (x - y, x + y, x + 2y) & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto a + d \\
 f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & \\
 (x, y) \longmapsto (x - y, 2x - y) & f_7 : \mathbb{K}_3[X] \longrightarrow \mathbb{K}_3[X] \\
 f_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} & P \longmapsto XP' - 3P \\
 (x, y, z) \longmapsto 3x + y - 5z & \\
 f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^4 & f_8 : \mathbb{K}_3[X] \longrightarrow \mathbb{K}^2 \\
 x \longmapsto (4x, 0, -x, x/2) & P \longmapsto (P(1), P(2)) \\
 f_5 : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4 & f_9 : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\
 (x_1, \dots, x_5) \longmapsto (0, 0, x_2, 0) & u \longmapsto (u_{n+1}) - (u_n)
 \end{array}$$

- Les composantes de f_1 sont les applications $(x, y) \mapsto x - y$, $(x, y) \mapsto x + y$ et $(x, y) \mapsto x + 2y$. Elles sont de la forme $(x, y) \mapsto ax + by$ donc ce sont des formes linéaires.

En conséquence f_1 est linéaire.

Son noyau est l'ensemble de vecteurs $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f_1(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$, ce qui s'écrit :

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

L'unique solution de ce système est $(x, y) = (0, 0)$, ce qui donne : $\ker f_1 = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$

Ce noyau est de dimension nulle.

On peut ajouter que f_1 est injective, car son noyau est réduit au vecteur nul.

L'image de f_1 est l'ensemble des $f_1(u)$ avec u appartenant à \mathbb{R}^2 :

$$\text{im } f_1 = \{f(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

Ceci s'écrit :

$$\text{im } f_1 = \{(x - y, x + y, x + 2y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, 1, 1), (-1, 1, 2))$$

On pose $u_1 = (1, 1, 1)$ et $u_2 = (-1, 1, 2)$. La famille (u_1, u_2) est donc génératrice de $\text{im } f_1$. Comme les vecteurs u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires alors la famille (u_1, u_2) est libre. Elle est donc une base de $\text{im } f_1$.

Cette base contient deux vecteurs, donc $\text{im } f_1$ est de dimension 2.

On peut démontrer qu'il s'agit du plan vectoriel d'équation $x - 3y + 2z = 0$.

- Les composantes de f_2 sont de la forme $(x, y) \mapsto ax + by$, elles sont linéaires donc f_2 est linéaire.

Le noyau de f_2 est l'ensemble des vecteurs (x, y) vérifiant :

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

Le vecteur nul de \mathbb{R}^2 est l'unique solution de ce système, donc : $\ker f_2 = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$

Ce noyau est de dimension nulle.

L'image de f_2 est :

$$\operatorname{im} f_2 = \{f_2(u) \mid u \in \mathbb{R}^2\} = \{(x - y, 2x - y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \operatorname{Vect}((1, 2), (-1, -1))$$

On peut simplifier cet ensemble, car $(1, 2) + (-1, -1) = (0, 1)$:

$$\operatorname{im} f_2 = \operatorname{Vect}((0, 1), (-1, -1)) = \operatorname{Vect}((0, 1), (1, 0))$$

On en déduit : $\operatorname{im} f_2 = \mathbb{R}^2$

Cette image est de dimension 2.

Comme $\ker f_2 = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ et $\operatorname{im} f_2 = \mathbb{R}^2$ alors f_2 est injective et surjective, donc f_2 est un isomorphisme.

- L'application f_3 est de la forme $(x, y, z) \mapsto ax + by + cz$: c'est une forme linéaire donc elle est linéaire.

Son noyau est l'ensemble des vecteurs (x, y, z) de \mathbb{R}^3 tels que $3x + y - 5z = 0$, ce qui s'écrit $y = -3x + 5z$ et donc :

$$\ker f_3 = \{(x, -3x + 5z, z) \mid (x, z) \in \mathbb{R}^2\} = \operatorname{Vect}((-3, 1, 0), (0, 1, 5))$$

Soit $u_1 = (-3, 1, 0)$ et $u_2 = (0, 1, 5)$. La famille (u_1, u_2) est génératrice de $\ker f_3$. Elle est libre car u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires. C'est donc une base de $\ker f_3$.

Comme cette base contient deux vecteurs alors $\ker f_3$ est de dimension 2.

Pour l'image de f_3 on pourrait directement dire que $\operatorname{im} f_3$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R} , lequel ne contient que deux sous-espaces vectoriels : $\{0_{\mathbb{R}}\}$ et \mathbb{R} . Or f_3 est non-nul donc $\operatorname{im} f_3 = \mathbb{R}$.

Mais sinon il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned} \operatorname{im} f_3 &= \{f(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \{3x + y - 5z \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \operatorname{Vect}(3, 1, -5) = \operatorname{Vect}(1) \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

Cette image est de dimension 1, engendrée par le vecteur 1 de \mathbb{R} qui est non-nul.

On peut en déduire que f_3 est surjective.

- Les composantes de f_4 sont de la forme $x \mapsto ax$ où a est un réel, elles sont donc linéaires et ainsi f_4 est linéaire.

On obtient $\ker f_4 = \{0_{\mathbb{R}}\}$, de dimension nulle, et $\operatorname{im} f_4 = \operatorname{Vect}((4, 0, -1, 1/2))$, de dimension 1.

On peut en déduire que f_4 est injective.

- L'application f_5 possède trois composantes nulles (donc linéaires) et la composante $(x_1, \dots, x_5) \mapsto x_2$ qui est aussi linéaire, donc elle est linéaire.

Son noyau est :

$$\ker f_5 = \{(x_1, 0, x_3, x_4, x_5) \mid (x_1, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^4\} = \operatorname{Vect}(e_1, e_3, e_4, e_5)$$

La famille (e_1, e_3, e_4, e_5) est libre car elle est extraite de la base canonique de \mathbb{R}^5 , qui est libre. Or elle est aussi génératrice de $\ker f_5$, donc c'est une base de $\ker f_5$.

Elle contient quatre vecteurs, donc $\ker f_5$ est de dimension 4.

L'image de f_5 est : $\text{im } f_5 = \text{Vect}((0, 0, 1, 0))$

Comme le vecteur e_3 de \mathbb{R}^4 est non-nul alors la famille (e_3) est libre. Elle est génératrice de $\text{im } f_5$, c'en est donc une base, et finalement $\text{im } f_5$ est de dimension 1.

- Pour l'application $f_6 : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ on utilise la caractérisation de applications linéaires.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et λ un scalaire. Alors :

$$\begin{aligned} f_6(\lambda M + M') &= f_6\left(\begin{pmatrix} \lambda a + a' & \lambda b + b' \\ \lambda c + c' & \lambda d + d' \end{pmatrix}\right) \\ &= (\lambda a + a') + (\lambda d + d') = \lambda(a + d) + (a' + d') \\ &= \lambda f_6(M) + f_6(M') \end{aligned}$$

On a montré que :

$$\forall (M, M') \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad f_6(\lambda M + M') = \lambda f_6(M) + f_6(M')$$

D'après la caractérisation des applications linéaires, f_6 est linéaire.

Les éléments du noyau de f_6 sont les matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $a + d = 0$, donc :

$$\ker f_6 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{On note : } M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La famille (M_1, M_2, M_3) est génératrice de $\ker f_6$. Démontrons qu'elle est libre.

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ trois scalaires tels que $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3 = 0_E$. Alors

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & -\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. On a démontré que :

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \quad \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3 = 0_E \quad \implies \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0_{\mathbb{R}}$$

Ceci montre que la famille (M_1, M_2, M_3) est libre.

La famille (M_1, M_2, M_3) est donc une base de $\ker f_6$, et ce noyau est de dimension 3.

On obtient ensuite :

$$\text{im } f_6 = \{ a + d \mid (a, d) \in \mathbb{R}^2 \} = \mathbb{R}$$

Cette image est de dimension 1.

On peut ajouter que f_6 est surjective.

- On explicite f_7 :

$$\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4 \quad f_7(aX^3 + bX^2 + cX + d) = -bX^2 - 2cX - 3d$$

On en déduit que $\ker f_7 = \text{Vect}(X^3)$ et $\text{im } f_7 = \mathbb{K}_2[X]$.

Le noyau de f_7 est de dimension 1, son image est de dimension 3.

- Le noyau de f_8 est l'ensemble des polynômes de degré au plus 3 dont 1 et 2 sont racines, donc :

$$\ker f_8 = (X - 1)(X - 2)\mathbb{K}_1[X] = \text{Vect}(X(X - 1)(X - 2), (X - 1)(X - 2))$$

La famille $(X(X - 1)(X - 2), (X - 1)(X - 2))$ est libre car ses polynômes sont de degrés échelonnés, donc c'est une base de $\ker f_8$, et ainsi ce noyau est de dimension 2.

On démontre ensuite que $\text{im } f_8 = \mathbb{K}^2$, *i.e.*, f_8 est surjective. Ceci est conséquence de l'interpolation de Lagrange. On peut aussi expliciter un antécédent de tout élément (α, β) de \mathbb{K}^2 , par exemple :

$$P = \beta(X - 1) - \alpha(X - 2)$$

On constate bien que $f_8(P) = (\alpha, \beta)$.

- Le noyau de f_9 est l'ensemble des suites constantes, il est de dimension 1, engendré par la suite constante égale à 1.

L'image de f_9 est $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, donc f_9 est surjective.

En effet si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite, alors on peut poser, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$

On obtient $f_9(v) = u$. Ceci montre que f_9 est surjective.

3 Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ linéaire telle que

$$f(1, 0, 0) = (1, -1, 0)$$

$$f(0, 1, 0) = (1, 1, 0)$$

$$f(0, 0, 1) = (1, 1, 1)$$

- Justifier que f est uniquement déterminée et donner $f(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
- Calculer $\ker f$ et $\text{im } f$.
- Démontrer que f est un isomorphisme et déterminer f^{-1} .

- On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 . D'après l'énoncé, si f existe alors elle vérifie :

$$f(e_1) = (1, -1, 0) \quad f(e_2) = (1, 1, 0) \quad f(e_3) = (1, 1, 1)$$

Soit $u = (x, y, z)$ un vecteur de \mathbb{R}^3 . Alors $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$, donc par linéarité :

$$f(u) = f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3)$$

Ceci donne :

$$f(x, y, z) = x(1, -1, 0) + y(1, 1, 0) + z(1, 1, 1) = (x + y + z, -x + y + z, z)$$

Cette application est bien définie. Elle est linéaire car ses composantes sont de la forme $(x, y, z) \mapsto ax + by + cz$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Nous venons de démontrer que cette application est la seule application linéaire vérifiant les trois conditions, donc elle est uniquement déterminée. De plus son expression générale est :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad f(x, y, z) = (x + y + z, -x + y + z, z)$$

- b. Un vecteur $u = (x, y, z)$ de \mathbb{R}^3 appartient au noyau de f si et seulement si $f(u) = 0$, ce qui équivaut au système :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Son unique solution est $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ donc $\ker f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

Pour l'image on écrit :

$$\operatorname{im} f = \{f(u) \mid u \in \mathbb{R}^3\} = \{(x + y + z, -x + y + z, z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$$

Ceci donne :

$$\operatorname{im} f = \operatorname{Vect}((1, -1, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$$

Démontrons que $\operatorname{im} f$ est égal à \mathbb{R}^3 tout entier. Pour ceci on note u_1, u_2, u_3 les trois vecteurs définis ci-dessus. On remarque que :

$$e_1 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \quad e_2 = \frac{1}{2}(u_2 - u_1) \quad e_3 = u_3 - u_2$$

Ceci montre que e_1, e_2, e_3 appartiennent au sous-espace vectoriel engendré par u_1, u_2, u_3 , donc à $\operatorname{im} f$.

L'image de f est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 contenant la base canonique, il contient donc \mathbb{R}^3 tout entier. Par double inclusion : $\operatorname{im} f = \mathbb{R}^3$.

- c. Comme $\ker f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et $\operatorname{im} f = \mathbb{R}^3$ alors par propriété f est injective et surjective. Elle est donc bijective.

Comme f est linéaire bijective alors f est un isomorphisme.

Calculons sa réciproque.

Soit $v = (x, y, z)$ un vecteur de \mathbb{R}^3 . On veut calculer $u = f^{-1}(v)$. Ceci équivaut à $f(u) = v$. En notant $u = (a, b, c)$, on est amené à résoudre le système suivant, d'inconnues a, b, c :

$$\begin{cases} a + b + c = x \\ -a + b + c = y \\ c = z \end{cases}$$

Ses solutions sont :

$$(a, b, c) = \left(\frac{1}{2}(x - y), \frac{1}{2}(x + y) - z, z\right)$$

On en déduit que :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad f^{-1}(x, y, z) = \frac{1}{2}(x - y, x + y - 2z, 2z)$$

4 Pour tout $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ on note :

$$\varphi(y) = y'' - 4y' + 20y$$

- Justifier que φ est une application linéaire de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.
- Déterminer le noyau de φ et sa dimension.

- a. Si y est de classe \mathcal{C}^2 alors elle est deux fois dérivable de dérivée seconde continue. Ainsi y' et y'' sont définies et continues. Par combinaison linéaire $y'' - 4y' + 20y$ est définie et continue.

Ceci montre que φ est bien définie sur $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

L'application de dérivation $D : y \mapsto y'$ est linéaire. Par composition l'application $D \circ D : y \mapsto y''$ est linéaire.

Or $\varphi = D \circ D - 4D + 20\text{Id}$ donc φ est combinaison linéaire d'applications linéaires, et par propriété φ est linéaire.

- b. Le noyau de φ est l'ensemble des fonctions y de classe \mathcal{C}^2 telles que :

$$y'' - 4y' + 20y = 0$$

Il s'agit donc des solutions de cette équation différentielle.

L'équation caractéristique associée est :

$$\lambda^2 - 4\lambda + 20 = 0$$

Ses solutions sont $2 + 4i$ et $2 - 4i$. Par théorème les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions y définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) = e^{2t}(\alpha \cos(4t) + \beta \sin(4t))$$

où α et β sont deux réels. Ceci s'écrit

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) = \alpha e^{2t} \cos(4t) + \beta e^{2t} \sin(4t) \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

De façon équivalente, $y = \alpha y_1 + \beta y_2$ où y_1 et y_2 sont les fonctions définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y_1(t) = e^{2t} \cos(4t) \quad \text{et} \quad y_2(t) = e^{2t} \sin(4t)$$

Ainsi les solutions de l'équation différentielle sont les combinaisons linéaires de y_1 et y_2 et donc :

$$\ker \varphi = \text{Vect}(y_1, y_2)$$

La famille (y_1, y_2) est génératrice de $\ker \varphi$. Démontrons qu'elle est libre.

Soit λ_1 et λ_2 deux réels tels que $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0_{\mathcal{C}^2(\mathbb{R})}$. Ceci signifie :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \lambda_1 e^{2t} \cos(4t) + \lambda_2 e^{2t} \sin(4t) = 0_{\mathbb{R}}$$

L'exponentielle étant strictement positive :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \lambda_1 \cos(4t) + \lambda_2 \sin(4t) = 0_{\mathbb{R}}$$

Ceci est vrai en particulier pour $t = 0$ et pour $t = \frac{\pi}{8}$, et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0_{\mathbb{R}}$.

On peut donc en conclure que la famille (y_1, y_2) est libre.

Cette famille est libre et génératrice de $\ker \varphi$, donc c'est une base de $\ker \varphi$.

Elle contient deux éléments donc $\ker \varphi$ est de dimension 2.

5 Soit E, F, G trois espaces vectoriels et

$$f : E \rightarrow F \quad g : F \rightarrow G$$

deux applications linéaires.

- a. Démontrer que l'application $g \circ f$ est nulle si et seulement si $\text{im } f \subseteq \ker g$.
 b. Démontrer que :

$$\ker f \subseteq \ker g \circ f \quad \text{et} \quad \text{im } g \circ f \subseteq \text{im } g$$

- c. En déduire que si $g \circ f$ est un isomorphisme alors f est injective et g est surjective.

- a. Supposons que $g \circ f$ est nulle.

Soit $v \in \text{im } f$. Alors il existe $u \in E$ tel que $v = f(u)$.

Alors $g(v) = g \circ f(u)$, et comme $g \circ f$ est l'application nulle alors $g(v) = 0_G$. Ceci montre que $v \in \ker g$.

On a démontré que $\text{im } f \subseteq \ker g$.

Réciproquement, supposons que $\text{im } f \subseteq \ker g$.

Soit $u \in E$. Alors $f(u) \in \text{im } f$. Donc $f(u) \in \ker g$. Ceci signifie que $g(f(u)) = 0_G$.

Pour tout $u \in E$ on a $g \circ f(u) = 0_G$, donc $g \circ f$ est l'application nulle de E dans G .

Par double implication on a démontré que $g \circ f$ est l'application nulle si et seulement si $\text{im } f \subseteq \ker g$.

- b. Soit $u \in \ker f$. Alors $f(u) = 0_F$. Comme g est linéaire alors $g(0_F) = 0_G$, donc $g(f(u)) = 0_G$, ce qui montre que $u \in \ker g \circ f$.

On a démontré que $\ker f \subseteq \ker g \circ f$.

Soit maintenant $w \in \text{im}(g \circ f)$. Alors il existe $u \in E$ tel que $w = g(f(u))$. On pose $v = f(u)$. Alors $w = g(v)$. Ceci montre que $w \in \text{im } g$.

On a démontré que $\text{im}(g \circ f) \subseteq \text{im } g$.

- c. Si $g \circ f$ est un isomorphisme alors $g \circ f$ est injective et surjective.

Comme $g \circ f$ est injective alors $\ker(g \circ f) = \{0_E\}$. Comme $g \circ f$ est surjective alors $\text{im}(g \circ f) = G$.

De plus $\ker f$ est un sous-espace vectoriel de E et $\text{im } g$ est un sous-espace vectoriel de G , donc d'après la question précédente :

$$\{0_E\} \subseteq \ker f \subseteq \ker(g \circ f) = \{0_E\} \quad G = \text{im}(g \circ f) \subseteq \text{im } g \subseteq G$$

Par doubles inclusions on obtient $\ker f = \{0_E\}$, ce qui montre que f est injective, et $\text{im } g = G$, ce qui montre que g est surjective.

6 Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E . On note $f^2 = f \circ f$. Démontrer que :

$$\begin{aligned} \ker f = \ker f^2 &\iff \operatorname{im} f \cap \ker f = \{0_E\} \\ \operatorname{im} f = \operatorname{im} f^2 &\iff \operatorname{im} f + \ker f = E \end{aligned}$$

- Supposons que : $\ker f = \ker f^2$

Comme f est une application linéaire de E dans E alors $\operatorname{im} f$ et $\ker f$ sont des sous-espaces vectoriels de E .

En conséquence ils contiennent son vecteur nul, et ainsi : $\{0_E\} \subseteq \operatorname{im} f \cap \ker f$

Réciproquement, considérons un vecteur u de $\operatorname{im} f \cap \ker f$.

Comme $u \in \operatorname{im} f$ alors il existe $v \in E$ tel que $u = f(v)$.

Comme $u \in \ker f$ alors $f(u) = 0_E$.

Ceci donne $f(f(v)) = 0_E$, donc $v \in \ker f^2$. Mais comme $\ker f^2 = \ker f$ alors $v \in \ker f$. Ainsi $f(v) = 0_E$, et donc $u = 0_E$.

On a démontré que : $\operatorname{im} f \cap \ker f \subseteq \{0_E\}$

Par double inclusion : $\operatorname{im} f \cap \ker f = \{0_E\}$

- Supposons que : $\operatorname{im} f \cap \ker f = \{0_E\}$

Soit $u \in \ker f$.

Alors $f(u) = 0_E$, puis $f(f(u)) = f(0_E) = 0_E$ car f est linéaire, donc $u \in \ker f^2$.

Ceci démontre que : $\ker f \subseteq \ker f^2$

Réciproquement, considérons un vecteur u de $\ker f^2$.

Alors $f(f(u)) = 0_E$, ce qui montre que $f(u) \in \ker f$. Mais de plus $f(u) \in \operatorname{im} f$ par définition de l'image. Ainsi $f(u) \in \operatorname{im} f \cap \ker f$, ce qui donne $f(u) = 0_E$ par hypothèse.

En conséquence $u \in \ker f$, et nous avons donc démontré que : $\ker f^2 \subseteq \ker f$

Par double inclusion : $\ker f^2 = \ker f$

Par double implication on a démontré que : $\ker f = \ker f^2 \iff \operatorname{im} f \cap \ker f = \{0_E\}$

- Supposons que : $\operatorname{im} f = \operatorname{im} f^2$

Comme $\operatorname{im} f$ et $\ker f$ sont des sous-espaces vectoriels de E alors : $\operatorname{im} f + \ker f \subseteq E$

Réciproquement, considérons un vecteur u de E .

Alors $f(u) \in \operatorname{im} f$, et comme $\operatorname{im} f = \operatorname{im} f^2$ alors $f(u) \in \operatorname{im} f^2$.

Ceci signifie qu'il existe $v \in E$ tel que $f(u) = f(f(v))$. Par soustraction $f(u) - f(f(v)) = 0_E$ puis par linéarité $f(u - f(v)) = 0_E$.

On en déduit que $u - f(v) \in \ker f$. Ainsi $u = f(v) + (u - f(v))$, comme $f(v) \in \operatorname{im} f$ et $u - f(v) \in \ker f$ alors $u \in \operatorname{im} f + \ker f$.

On a démontré que : $E \subseteq \operatorname{im} f + \ker f$

Par double inclusion : $E = \operatorname{im} f + \ker f$

- Supposons que : $E = \operatorname{im} f + \ker f$

Soit v un vecteur de $\operatorname{im} f^2$. Alors il existe $u \in E$ tel que $v = f(f(u))$, *i.e.*, v est l'image par f de $f(u)$, et donc $v \in \operatorname{im} f$.

On a démontré que : $\operatorname{im} f^2 \subseteq \operatorname{im} f$

Réciproquement, considérons un vecteur v de $\text{im } f$. Alors il existe $u \in E$ tel que $v = f(u)$.

Comme $u \in E$ et $E = \text{im } f + \ker f$ alors il existe $u_1 \in \text{im } f$ et $u_2 \in \ker f$ tels que $u = u_1 + u_2$.

Comme $u_1 \in \text{im } f$ alors il existe $w \in E$ tel que $u_1 = f(w)$. Comme $u_2 \in \ker f$ alors $f(u_2) = 0_E$. Par linéarité :

$$v = f(u) = f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) = f(f(w)) + 0_E = f^2(w)$$

Ainsi $v \in \text{im } f^2$. On a démontré que : $\text{im } f \subseteq \text{im } f^2$

Par double inclusion : $\text{im } f = \text{im } f^2$

Par double implication on a démontré que : $\text{im } f = \text{im } f^2 \iff \text{im } f + \ker f = E$

7 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et f un endomorphisme de E . Pour tout scalaire λ on note :

$$E_\lambda = \{u \in E \mid f(u) = \lambda u\}$$

- Démontrer que E_λ est un sous-espace vectoriel de E .
- Démontrer que si $\lambda \neq \mu$ alors E_λ et E_μ sont en somme directe.

a. Soit $u \in E$. On remarque que :

$$u \in E_\lambda \iff f(u) = \lambda u \iff (f - \lambda \text{id})(u) = 0_E$$

Ceci montre que $E_\lambda = \ker(f - \lambda \text{id})$.

L'application $f - \lambda \text{id}$ est linéaire car elle est combinaison linéaire de deux applications linéaires. Comme E_λ est son noyau alors il est sous-espace vectoriel de E .

b. Un vecteur u appartient à $E_\lambda \cap E_\mu$ si et seulement si $f(u) = \lambda u = \mu u$.

Ceci donne $(\lambda - \mu)u = 0_E$, puis $\lambda - \mu = 0_{\mathbb{K}}$ ou $u = 0_E$.

Comme $\lambda \neq \mu$ alors $u = 0_E$.

On en déduit que $E_\lambda \cap E_\mu = \{0_E\}$, donc E_λ et E_μ sont en somme directe.

8 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et f un endomorphisme de E vérifiant :

$$f \circ f = 3f - 2\text{Id}_E$$

a. Démontrer que f est un isomorphisme et exprimer son inverse en fonction de f .

On utilise la définition de E_λ donnée dans l'exercice précédent.

b. Démontrer que :

$$\text{im}(f - \text{Id}_E) \subseteq E_2 \quad \text{et} \quad \text{im}(f - 2\text{Id}_E) \subseteq E_1$$

c. Soit u un vecteur de E . Démontrer que u est combinaison linéaire de $f(u) - u$ et $f(u) - 2u$.

d. Démontrer que : $E_1 \oplus E_2 = E$

a. Deux méthodes sont proposées.

Méthode 1. On calcule le noyau et l'image de f .

Soit $u \in \ker f$. Alors $f(u) = 0_E$. Or $f \circ f = 3f - 2\text{Id}_E$, donc $f(f(u)) = 3f(u) - 2u$.

On sait que $f(u) = 0_E$, et comme f est linéaire alors $f(0_E) = 0_E$, donc $0_E = 0_E - 2u$ d'où $u = 0_E$.

Ceci montre que $\ker f \subseteq \{0_E\}$, l'inclusion réciproque est évidente car $\ker f$ est un sev de E , donc on en déduit : $\ker f = \{0_E\}$

Ceci montre que f est injective.

Pour le calcul de l'image, on sait que :

$$\forall u \in E \quad f(f(u)) = 3f(u) - 2u$$

Ceci donne $2u = 3f(u) - f(f(u))$, puis comme f est linéaire $2u = f(3u) - f(f(u)) = f(3u - f(u))$. On en déduit :

$$\forall u \in E \quad u = \frac{1}{2}f(3u - f(u)) = f\left(\frac{3}{2}u - \frac{1}{2}f(u)\right)$$

Si on pose $v = \frac{3}{2}u - \frac{1}{2}f(u)$ alors $u = f(v)$. On a démontré que pour $u \in E$ il existe $v \in E$ tel que $u = f(v)$, ce qui signifie $u \in \text{im } f$.

On en déduit que $E \subseteq \text{im } f$. L'inclusion réciproque est évidente car $\text{im } f$ est un sous-espace vectoriel de E , et donc : $\text{im } f = E$.

Ceci signifie que f est surjective.

Comme f est injective et surjective alors f est un isomorphisme.

On a vu que l'antécédent de u par f est $v = \frac{3}{2}u - \frac{1}{2}f(u)$, donc :

$$\forall u \in E \quad f^{-1}(u) = \frac{3}{2}u - \frac{1}{2}f(u)$$

On peut aussi écrire : $f^{-1} = \frac{3}{2}\text{Id}_E - \frac{1}{2}f$

Méthode 2. On rappelle que si $f : E \rightarrow F$ est une application, et s'il existe $g : F \rightarrow E$ telle que $f \circ g = \text{Id}_F$ et $g \circ f = \text{Id}_E$, alors f est bijective et g est sa réciproque.

Comme $f \circ f = 3f - 2\text{Id}_E$ alors $2\text{Id}_E = 3f - f \circ f$ puis $\frac{3}{2}f - \frac{1}{2}f \circ f = \text{Id}_E$.

On peut donc écrire :

$$\text{Id}_E = \left(\frac{3}{2}\text{Id}_E - \frac{1}{2}f\right) \circ f = f \circ \left(\frac{3}{2}\text{Id}_E - \frac{1}{2}f\right)$$

Ceci montre que f est un isomorphisme, de réciproque $f^{-1} = \frac{3}{2}\text{Id}_E - \frac{1}{2}f$.

b. Démontrons que $\text{im}(f - \text{Id}_E) \subseteq E_2$.

Soit $u \in \text{im}(f - \text{Id}_E)$. Alors il existe $v \in E$ tel que $u = (f - \text{Id}_E)(v) = f(v) - v$.

On calcule alors :

$$f(u) = f(f(v) - v) = f \circ f(v) - f(v)$$

Comme $f \circ f = 3f - 2\text{Id}_E$ alors $f(u) = 2(f(v) - v) = 2u$, ce qui montre que $u \in E_2$.

On en déduit l'inclusion : $\text{im}(f - \text{Id}_E) \subseteq E_2$

On démontre de la même façon l'autre inclusion : $\text{im}(f - 2\text{Id}_E) \subseteq E_1$

c. On remarque que :

$$u = (f(u) - u) - (f(u) - 2u)$$

Ceci montre bien que u est combinaison linéaire de $(f(u) - u)$ et $(f(u) - 2u)$.

d. D'après l'exercice précédent, comme 1 et 2 sont distincts alors : $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.

On démontre que $E \subseteq E_1 + E_2$.

Soit $u \in E$. Alors d'après la question précédente $u = (f(u) - u) - (f(u) - 2u)$.

Or $(f(u) - u) = (f - \text{Id}_E)(u)$ donc $(f(u) - u) \in \text{im}(f - \text{Id}_E)$, et d'après la question c : $(f(u) - u) \in E_2$.

On démontre de même que $(f(u) - 2u) \in E_1$.

On en déduit que $u \in E_1 + E_2$.

Ceci démontre que $E \subseteq E_1 + E_2$. L'inclusion réciproque est évidente car E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de E , donc on obtient : $E = E_1 + E_2$

Comme $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$ alors :

$$E = E_1 \oplus E_2$$

Remarque. Ceci signifie que pour tout $u \in E$ il existe u_1 et u_2 appartenant à E tels que $u = u_1 + u_2$ et $f(u) = u_1 + 2u_2$.

On peut ajouter que $u_1 = 2u - f(u)$ et $u_2 = f(u) - u$.

9 Soit f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ défini par :

$$f(x, y, z) = (2x + y + z, x + 2y + z, x + y + 2z)$$

On utilise encore la définition de E_λ de l'exercice 7.

a. Donner une base de E_1 et de E_4 .

b. Démontrer que E_1 et E_4 sont supplémentaires dans E .

c. En déduire que : $f \circ f = 5f - 4\text{Id}_{\mathbb{R}^3}$

a. Par définition E_1 est le sous-espace vectoriel de E contenant les vecteurs u tels que $f(u) = u$, et E_4 est celui contenant les vecteurs u tels que $f(u) = 4u$.

En posant $u = (x, y, z)$ ces équations sont équivalentes aux systèmes :

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_4 : \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

On obtient :

$$E_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \right\} = \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, -1))$$

$$E_4 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z \right\} = \text{Vect}((1, 1, 1))$$

On note $u_1 = (1, 0, -1)$, $u_2 = (0, 1, -1)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$.

La famille (u_1, u_2) est génératrice de E_1 , libre car ses vecteurs ne sont pas colinéaires, donc elle est une base de E_1 .

La famille (u_3) est génératrice de E_4 , libre car son vecteur n'est pas nul, donc elle est une base de E_4 .

b. D'après l'exercice précédent, comme $1 \neq 4$ alors E_1 et E_4 sont en somme directe.

Comme $E_1 = \text{Vect}(u_1, u_2)$ et $E_4 = \text{Vect}(u_3)$ alors $E_1 + E_4 = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.

On remarque que $u_3 - u_1 - u_2 = 3e_3$ donc $e_3 \in E_1 + E_4$.

Ensuite $e_1 = u_1 + e_3$ et $e_2 = u_2 + e_3$, donc $e_1 \in E_1 + E_4$ et $e_2 \in E_1 + E_4$.

Ainsi $E_1 + E_4$ contient les vecteurs de la base canonique de E , donc il contient E tout entier, et $E = E_1 + E_4$.

Finalement, comme $E_1 \cap E_4 = \{0_E\}$ et $E_1 + E_4 = E$ alors $E = E_1 \oplus E_4$.

c. Soit u un vecteur de E . D'après la question précédente il existe un et un seul couple de vecteurs $(v, w) \in E_1 \times E_4$ tel que $u = v + w$.

Comme $v \in E_1$ et $w \in E_4$ alors $f(v) = v$ et $f(w) = 4w$.

Comme f est linéaire alors :

$$f(u) = f(v + w) = f(v) + f(w) = v + 4w$$

Ensuite :

$$f \circ f(u) = f(v) + 4f(w) = v + 16w$$

De plus :

$$(5f - 4\text{id})(u) = 5f(u) - 4u = 5(v + 4w) - 4(v + w) = v + 16w$$

On constate que $f \circ f(u) = 5f(u) - 4u$ pour tout $u \in E$, donc $f \circ f = 5f - 4\text{id}$.

10 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, et f un endomorphisme de E . On suppose que pour tout u la famille $(u, f(u))$ est liée.

a. Démontrer que pour tout $u \in E$ non-nul il existe un unique $\lambda_u \in \mathbb{K}$ tel que $f(u) = \lambda_u u$.

b. Soit u et v deux vecteurs linéairement indépendants. Démontrer que $\lambda_u = \lambda_v$.

c. Démontrer que f est une homothétie.

a. Soit $u \in E$ non-nul. Par hypothèse u et $f(u)$ sont liés donc il existe deux scalaires α et β non tous les deux nuls tels que $\alpha u + \beta f(u) = 0_E$. Si $\beta = 0_{\mathbb{K}}$ alors $\alpha u = 0_E$, ce qui donne $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$ car u est supposé non-nul. Or α et β ne peuvent être tous deux nuls. Cette contradiction montre que β n'est pas nul, donc $f(u) = \lambda u$ avec $\lambda = -\frac{\alpha}{\beta}$.

Si λ et μ sont deux scalaires tels que $f(u) = \lambda u$ et $f(u) = \mu u$ alors $(\lambda - \mu)u = 0_E$, ce qui donne $\lambda = \mu$ car u n'est pas le vecteur nul.

On a donc démontré que pour tout vecteur u non-nul il existe un et un seul scalaire λ tel que $f(u) = \lambda u$.

b. Comme u et v sont linéairement indépendants alors ils ne sont pas nuls, et $u + v$ n'est pas nul. Il existe donc trois scalaires λ_u, λ_v et λ_{u+v} tels que $f(u) = \lambda_u u$, $f(v) = \lambda_v v$ et $f(u + v) = \lambda_{u+v}(u + v)$. Comme f est linéaire alors $f(u + v) = f(u) + f(v)$, ce qui donne $(\lambda_{u+v} - \lambda_u)u + (\lambda_{u+v} - \lambda_v)v = 0_E$. Comme u et v sont linéairement indépendants alors $\lambda_{u+v} = \lambda_u = \lambda_v$.

c. Soit u un vecteur non-nul de E , et soit $\alpha = \lambda_u$.

Démontrons que pour tout $v \in E$: $f(v) = \alpha v$

Soit $v \in E$. Si v n'est pas colinéaire à u alors $f(v) = \lambda_v v$ et $\lambda_v = \lambda_u$ d'après la question précédente, donc $f(v) = \alpha v$.

Si v est colinéaire à u alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $v = \lambda u$. On en déduit $f(v) = \lambda f(u) = \lambda \alpha u = \alpha v$.

Pour tout $v \in E$ on a $f(v) = \lambda v$, donc f est l'homothétie de rapport α .

11 Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on pose :

$$f(x, y, z) = (-x + 2z, -x + y + z, z)$$

$$g(x, y, z) = \frac{1}{2}(x - z, 2y, -x + z)$$

$$h(x, y, z) = \frac{1}{3}(-x + 4z, 2x - 3y + 4z, 2x + z)$$

Démontrer que ces endomorphismes sont des projecteurs ou des symétries, et déterminer leurs éléments caractéristiques.

• On calcule $f \circ f$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned} f \circ f(x, y, z) &= f(-x + 2z, -x + y + z, z) \\ &= (-(-x + 2z) + 2z, -(-x + 2z) + (-x + y + z) + z, z) \\ &= (x, y, z) \end{aligned}$$

Ainsi $f \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ et donc f est une symétrie.

Plus précisément f est la symétrie de \mathbb{R}^3 par rapport à F parallèlement à G où :

$$F = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = u\} \quad \text{et} \quad G = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = -u\}$$

Soit $u = (x, y, z)$. Alors :

$$\begin{aligned} f(u) = u &\iff (-x + 2z, -x + y + z, z) = (x, y, z) \iff x = z \\ \text{et } f(u) = -u &\iff (-x + 2z, -x + y + z, z) = -(x, y, z) \iff \begin{cases} z = 0 \\ x = 2y \end{cases} \end{aligned}$$

Ceci montre que :

$$\begin{aligned} F &= \{(z, y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 0)) \\ G &= \{(2y, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((2, 1, 0)) \end{aligned}$$

En conclusion f est la symétrie de \mathbb{R}^3 par rapport à $F = \text{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 0))$ parallèlement à $G = \text{Vect}((2, 1, 0))$.

• On calcule $g \circ g$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned} g \circ g(x, y, z) &= \frac{1}{2}g(x - z, 2y, -x + z) \\ &= \frac{1}{4}((x - z) - (-x + z), 2(2y), -(x - z) + (-x + z)) \\ &= \frac{1}{2}(x - z, 2y, -x + z) = g(x, y, z) \end{aligned}$$

Ainsi $g \circ g = g$ et donc g est un projecteur.

Plus précisément g est le projecteur de \mathbb{R}^3 sur $F = \text{im } g$ parallèlement à $G = \text{ker } g$.

On calcule donc :

$$\begin{aligned} \text{im } g &= \left\{ \frac{1}{2}(x - z, 2y, -x + z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2} \right), (0, 1, 0), \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right) \right) = \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, 0)) \\ \text{ker } g &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{1}{2}(x - z, 2y, z - x) = 0_{\mathbb{R}^3} \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z \text{ et } y = 0 \right\} \\ &= \{(x, 0, x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 0, 1)) \end{aligned}$$

En conclusion g est le projecteur de \mathbb{R}^3 sur $F = \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, 0))$ parallèlement à $G = \text{Vect}((1, 0, 1))$.

- On calcule $h \circ h$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned} h \circ h(x, y, z) &= \frac{1}{3}h(-x + 4z, 2x - 3y + 4z, 2x + z) \\ &= \frac{1}{9}(-(-x + 4z) + 4(2x + z), 2(-x + 4z) - 3(2x - 3y + 4z) + 4(2x + z), \\ &\quad 2(-x + 4z) + (2x + z)) \\ &= (x, y, z) \end{aligned}$$

Ainsi $h \circ h = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ et donc h est une symétrie.

Plus précisément h est la symétrie de \mathbb{R}^3 par rapport à F parallèlement à G où :

$$F = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid h(u) = u\} \quad \text{et} \quad G = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid h(u) = -u\}$$

Soit $u = (x, y, z)$. Alors :

$$\begin{aligned} h(u) = u &\iff (-x + 4z, 2x - 3y + 4z, 2x + z) = 3(x, y, z) &\iff x = y = z \\ h(u) = -u &\iff (-x + 4z, 2x - 3y + 4z, 2x + z) = -3(x, y, z) &\iff x = -2z \end{aligned}$$

Ceci montre que :

$$\begin{aligned} F &= \{(x, x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 1, 1)) \\ G &= \{(-2z, y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((-2, 1, 0), (0, 1, 0)) \end{aligned}$$

En conclusion h est la symétrie de \mathbb{R}^3 par rapport à $F = \text{Vect}((1, 1, 1))$ parallèlement à $G = \text{Vect}((-2, 1, 0), (0, 1, 0))$.

12 Donner l'expression de

- a. la symétrie de \mathbb{R}^2 par rapport à $\text{Vect}((1, 0))$ parallèlement à $\text{Vect}((1, 1))$.
 b. la symétrie de \mathbb{R}^2 par rapport à $\text{Vect}((3, -1))$ parallèlement à $\text{Vect}((-7, 3))$.

- a. On note $E = \mathbb{R}^2$, puis $F = \text{Vect}((1, 0))$ et $G = \text{Vect}((1, 1))$.

On démontre que F et G sont supplémentaires, ce qui est sous-entendu par l'énoncé, sinon la symétrie par rapport à F parallèlement à G ne serait pas définie.

Soit $u = (x, y)$ un vecteur de E . Alors u est somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G si et seulement si il existe un couple de réels (α, β) tels que $u = \alpha(1, 0) + \beta(1, 1)$, ce qui donne :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \beta = y \end{cases}$$

Ce système admet pour unique solution le couple $(\alpha, \beta) = (x - y, y)$.

Ainsi tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G . Donc $E = F \oplus G$, c'est exactement la définition des supplémentaires.

Si $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$ alors $s(u) = v - w$.

Or le calcul précédent donne, pour tout $u = (x, y) \in E$:

$$(x, y) = \alpha(1, 0) + \beta(1, 1) \quad \text{avec} \quad \alpha = x - y \quad \text{et} \quad \beta = y$$

En d'autres termes :

$$(x, y) = (x - y, 0) + (y, y) \quad \text{avec} \quad (x - y, 0) \in F \quad \text{et} \quad (y, y) \in G$$

On en déduit :

$$s(x, y) = (x - y, 0) - (y, y) = (x - 2y, -y)$$

L'expression générale de s est donc :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad s(x, y) = (x - 2y, -y)$$

On peut vérifier que $s(1, 0) = (1, 0)$ et $s(1, 1) = -(1, 1)$.

- b. On note $E = \mathbb{R}^2$, puis $F = \text{Vect}((3, -1))$ et $G = \text{Vect}((-7, 3))$.

Pour tout vecteur u de E on souhaite :

- Déterminer deux vecteurs $v \in F$ et $w \in G$ tels que $u = v + w$.
- Calculer $s(u) = v - w$.

Soit $u = (x, y)$ un vecteur de E . Alors u est somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G si et seulement si il existe un couple de réels (α, β) tels que $u = \alpha(3, -1) + \beta(-7, 3)$, ce qui donne :

$$\begin{cases} 3\alpha - 7\beta = x \\ -\alpha + 3\beta = y \end{cases}$$

Ce système admet pour unique solution le couple $(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(3x + 7y, x + 3y)$.

La décomposition du vecteur $u = (x, y)$ selon la somme directe $E = F \oplus G$ est donc :

$$u = v + w \quad \text{avec} \quad \begin{cases} v = \alpha(3, -1) = \frac{1}{2}(9x + 21y, -3x - 7y) \\ w = \beta(-7, 3) = \frac{1}{2}(-7x - 21y, 3x + 9y) \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} s(u) = v - w &= \frac{1}{2}(9x + 21y, -3x - 7y) - \frac{1}{2}(-7x - 21y, 3x + 9y) \\ &= (8x + 21y, -3x - 8y) \end{aligned}$$

On a donc démontré que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad s(x, y) = (8x + 21y, -3x - 8y)$$

On peut d'ailleurs vérifier :

$$s(3, -1) = (3, -1) \quad \text{et} \quad s(-7, 3) = (7, -3) = -(-7, 3)$$

13 Soit p un endomorphisme d'un espace vectoriel E , et $q = \text{id} - p$.

- Démontrer que p est un projecteur si et seulement si q est un projecteur.
- On suppose que p est un projecteur. Démontrer que $\text{im } q = \ker p$ et $\ker q = \text{im } p$.

a. Si $q = \text{id} - p$ alors :

$$q \circ q = (\text{id} - p) \circ (\text{id} - p) = \text{id} - 2p + p \circ p$$

En effet, la linéarité de p donne :

$$p \circ (\text{id} - p) = p \circ \text{id} - p \circ p$$

On peut donc écrire les équivalences suivantes :

$$p \circ p = p \quad \iff \quad \text{id} - 2p + p \circ p = \text{id} - p \quad \iff \quad q \circ q = q$$

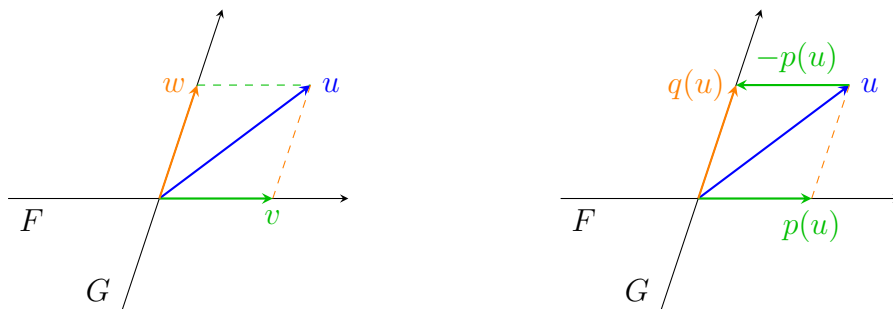
Ceci montre bien que p est un projecteur si et seulement si q est un projecteur.

b. On suppose que p est un projecteur.

D'après la question précédente $q = \text{id} - p$ est un projecteur.

On doit démontrer que si p est le projecteur sur F parallèlement à G alors q est le projecteur sur G parallèlement à F .

Ceci peut se voir sur la figure suivante :



En effet, on constate si $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$ alors $p(u) = v$, puis $u - p(u) = u - v = w$, donc $q(u) = w$. Ceci montre bien que $q(u)$ est le projeté de u sur G parallèlement à F .

Pour démontrer ceci on doit se rappeler que si p est un projecteur sur F alors F n'est pas seulement l'image de p , c'est aussi l'ensemble des points fixes de p :

$$\text{im } p = \{u \in E \mid p(u) = u\}$$

En effet : si $u \in \text{im } p$ alors il existe $v \in E$ tel que $u = p(v)$, et alors $p(u) = p \circ p(v) = p(v) = u$.

Réciproquement, si $p(u) = u$ alors $u \in \text{im } p$ car u admet un antécédent (à savoir lui-même) dans E par p , donc $u \in \text{im } p$.

On peut maintenant démontrer nos égalités, par équivalences :

$$\begin{aligned} \forall u \in E \quad u \in \text{im } p &\iff p(u) = u &\iff u - p(u) = 0_E \\ & &\iff q(u) = 0_E &\iff u \in \ker q \\ \forall u \in E \quad u \in \ker p &\iff p(u) = 0_E &\iff u - p(u) = u \\ & &\iff q(u) = u &\iff u \in \text{im } q \end{aligned}$$

On a bien démontré que $\text{im } p = \ker q$ et $\ker p = \text{im } q$.

14 Soit p un projecteur d'un espace vectoriel E .

Démontrer qu'un endomorphisme f de E commute avec p si et seulement si $\ker p$ et $\text{im } p$ sont stables par f .

Soit f un endomorphisme de E .

Supposons que f commute avec p : $p \circ f = f \circ p$.

Si $u \in \ker p$ alors $p(u) = 0_E$, donc $f(p(u)) = 0_E$ car f est linéaire, puis $p(f(u)) = 0_E$ car f et p commutent, et donc $f(u) \in \ker p$. Ceci démontre que $\ker p$ est stable par f .

Soit $v \in \text{im } p$. Alors $p(v) = v$ car p est un projecteur, donc $f(p(v)) = f(v)$, puis $p(f(v)) = f(v)$ car f et p commutent, et donc $f(v) \in \text{im } p$. Ceci démontre que $\text{im } p$ est stable par f .

Supposons que $\ker p$ et $\text{im } p$ sont stables par f .

Comme p est un projecteur alors $E = \ker p \oplus \text{im } p$, donc pour tout $u \in E$ il existe $u_1 \in \ker p$ et $u_2 \in \text{im } p$ tels que $u = u_1 + u_2$. Alors $p(u_1) = 0_E$ et $p(u_2) = u_2$.

Comme $\ker p$ et $\text{im } p$ sont stables par f alors $f(u_1) \in \ker p$ et $f(u_2) \in \text{im } p$, donc $p(f(u_1)) = 0_E$ et $p(f(u_2)) = f(u_2)$.

Comme f est linéaire alors $f \circ p(u) = f(p(u_1)) + f(p(u_2)) = f(u_2)$.

De plus $p \circ f(u) = p(f(u_1)) + p(f(u_2)) = f(u_2)$.

Ainsi $f \circ p(u) = p \circ f(u)$, ceci pour tout $u \in E$, donc f et p commutent.

15 Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $H = \ker f$ où :

$$f : \quad E \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \longmapsto 3x + y - 2z$$

On note aussi $D = \text{Vect}(u_0)$ avec $u_0 = (1, -1, 2)$.

- Démontrer que $E = H \oplus D$.
- Soit $u = (x, y, z)$ un vecteur de E . Pour quelle valeur du scalaire λ le vecteur $u - \lambda u_0$ appartient-il à H ?
- Déduire de la question précédente l'expression du projecteur de E sur H parallèlement à D , et de celui sur D parallèlement à H .
- Déterminer l'expression de la symétrie de E par rapport à H parallèlement à D .

- a. Comme $f(x, y, z)$ est de la forme $(x, y, z) \mapsto ax + by + cz$ avec a, b, c scalaires, f est une forme linéaire de E .

Comme $f(e_1) = 3$ alors f est non-nulle.

Par définition son noyau est un hyperplan, donc H est un hyperplan de E .

Comme $f(u_0) = -2$ alors u_0 n'appartient pas à H , donc par propriété $D = \text{Vect}(u_0)$ est un supplémentaire de H dans E .

- b. Par linéarité de f :

$$f(u - \lambda u_0) = f(u) - \lambda f(u_0) = 3x + y - 2z + 2\lambda$$

Ainsi $f(u - \lambda u_0)$ est nul si et seulement si $\lambda = -\frac{1}{2}(3x + y - 2z)$.

- c. Soit p le projecteur de E sur H parallèlement à D et q le projecteur de E sur D parallèlement à H .

Soit $u = (x, y, z) \in E$. Si λ prend la valeur obtenue dans la question précédente alors $u - \lambda u_0 \in H$. De plus $\lambda u_0 \in D$. Ainsi :

$$u = u - \lambda u_0 + \lambda u_0 \quad \text{avec} \quad u - \lambda u_0 \in H \quad \text{et} \quad \lambda u_0 \in D$$

On en déduit :

$$p(u) = u - \lambda u_0 \quad \text{et} \quad q(u) = \lambda u_0$$

Pour $u = (x, y, z)$ On obtient :

$$p(x, y, z) = \frac{1}{2}(5x + y - 2z, -3x + y + 2z, 6x + 2y - 2z) \\ q(x, y, z) = \frac{1}{2}(-3x - y + 2z, 3x + y - 2z, -6x - 2y + 4z)$$

On remarque que $p + q = \text{id}$, ce qui est cohérent avec les notations de l'exercice précédent.

- d. Soit s la symétrie de E par rapport à H parallèlement à D .

Par propriété, comme p est le projecteur de E sur H parallèlement à D alors $s = 2p - \text{id}$.

Connaissant l'expression de p on déduit, pour tout $(x, y, z) \in E$:

$$s(x, y, z) = (4x + y - 2z, -3x + 2z, 6x + 2y - 3z)$$

16 Dans $E = \mathbb{R}^4$ on note :

$$F = \{(x, y, z, t) \in E \mid x + y + z + t = 0\}$$

$$G = \text{Vect}((1, 1, 1, 1))$$

- Démontrer que F et G sont supplémentaires dans E .
- Donner l'expression de la symétrie de E par rapport à F parallèlement à G .

a. Soit $u_0 = (1, 1, 1, 1)$. Alors $G = \text{Vect}(u_0)$.

Soit $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par $\varphi(x, y, z, t) = x + y + z + t$. Alors F est le noyau de φ . Comme $\varphi(u_0) = 4 \neq 0$ alors φ n'est pas nulle, donc F est un hyperplan de E .

Comme $\varphi(u_0) \neq 0$ alors G n'est pas inclus dans F , donc par théorème F et G sont supplémentaires dans E .

b. Soit $u = (x, y, z, t)$ un vecteur de E . On pose :

$$w = \frac{x + y + z + t}{4}u_0 \quad \text{et} \quad v = u - w$$

On calcule par linéarité de φ que $\varphi(v) = \varphi(u) - \frac{\varphi(u)}{4}\varphi(u_0) = 0$, donc $v \in F$.

De plus $w \in G$, donc $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$.

Soit s la symétrie de E par rapport à F parallèlement à G . Alors par définition :

$$s(u) = v - w$$

On en déduit $s(u) = u - \frac{x+y+z+t}{2}u_0$, ce qui donne :

$$s(x, y, z, t) = \frac{1}{2}(x - y - z - t, -x + y - z - t, -x - y + z - t, -x - y - z + t)$$

17 Dans $E = \mathbb{R}^4$ on note :

$$F = \{(x, y, z, t) \in E \mid x + y = z + t = 0\}$$

$$G = \text{Vect}((1, 1, 1, 1), (1, 1, -1, -1))$$

Démontrer que $E = F \oplus G$ et donner l'expression du projecteur de E sur F parallèlement à G .

- F est un sous-espace vectoriel de E .

Les applications

$$\varphi_1 : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z, t) \longmapsto x + y \end{array} \quad \text{et} \quad \varphi_2 : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z, t) \longmapsto z + t \end{array}$$

sont des formes linéaires de E .

On remarque que $F = \ker \varphi_1 \cap \ker \varphi_2$. Le noyau d'une forme linéaire de E est un sous-espace vectoriel de E et l'intersection de plusieurs sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel, donc F est un sous-espace vectoriel de E .

- G est un sous-espace vectoriel de E . C'est immédiat car G est le sous-espace vectoriel de E engendré par deux vecteurs de E .

On note $u_1 = (1, 1, 1, 1)$ et $u_2 = (1, 1, -1, -1)$ ces deux vecteurs.

- $F \cap G = \{0_E\}$.

Soit $u \in F \cap G$. Alors $u \in G$ donc il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u = \alpha u_1 + \beta u_2$.

Alors $u = (\alpha + \beta, \alpha + \beta, \alpha - \beta, \alpha - \beta)$. Comme $u \in F$ alors $2(\alpha + \beta) = 2(\alpha - \beta) = 0$, ce qui donne $\alpha = \beta = 0$, et ainsi $u = 0_E$.

On a démontré que $F \cap G \subseteq \{0_E\}$.

L'inclusion réciproque est immédiate donc $F \cap G = \{0_E\}$.

- $F + G = E$.

Soit $u = (x, y, z, t)$ un élément de E .

On remarque que $F = \{(x, -x, z, -z) \mid (x, z) \in \mathbb{R}^2\}$, donc $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$ avec $v_1 = (1, -1, 0, 0)$ et $v_2 = (0, 0, 1, -1)$.

Démontrons qu'il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $u = av_1 + bv_2 + cu_1 + du_2$.

Cette dernière égalité équivaut au système :

$$\begin{cases} a & + c + d = x \\ -a & + c + d = y \\ & b + c - d = z \\ & -b + c - d = t \end{cases}$$

Grâce à l'algorithme du pivot de Gauss on montre qu'il admet une unique solution :

$$(a, b, c, d) = \left(\frac{x-y}{2}, \frac{z-t}{2}, \frac{x+y+z+t}{4}, \frac{x+y-z-t}{4} \right) \quad (1)$$

Ceci montre que pour ces valeurs de a, b, c, d on a $u = (av_1 + bv_2) + (cu_1 + du_2)$.

Comme $av_1 + bv_2 \in F$ et $cu_1 + du_2 \in G$ alors $u \in F + G$.

On a donc démontré que $F + G \subseteq E$.

L'inclusion réciproque étant immédiate, on obtient $E = F + G$.

- Comme $F \cap G = \{0_E\}$ et $F + G = E$ alors $E = F \oplus G$.

On peut donc définir p , le projecteur de E sur F parallèlement à G .

- Calculons $p(u)$ pour tout $u = (x, y, z, t) \in E$.

Nous avons démontré ci-dessus que pour $u = (x, y, z, t) \in E$ on a $u = (av_1 + bv_2) + (cu_1 + du_2)$ avec les valeurs de a, b, c, d données en (1).

Comme $av_1 + bv_2 \in F$ et $cu_1 + du_2 \in G$ alors par définition de p on a $p(u) = av_1 + bv_2$.

Ceci donne $p(u) = \frac{x-y}{2}(1, -1, 0, 0) + \frac{z-t}{2}(0, 0, 1, -1)$ soit finalement :

$$\forall (x, y, z, t) \in E \quad p(x, y, z, t) = \left(\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2}, \frac{z-t}{2}, \frac{t-z}{2} \right).$$

On peut vérifier que $p(u_1) = u_1$, $p(u_2) = u_2$, $p(v_1) = 0$ et $p(v_2) = 0$.

18 Soit p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E tels que $p \circ q = q \circ p$.

a. Démontrer que $p \circ q$ est un projecteur et que :

$$\text{im}(p \circ q) = \text{im } p \cap \text{im } q$$

$$\ker(p \circ q) = \ker p + \ker q$$

b. Démontrer que si $\text{im } p = \text{im } q$ alors $p = q$.

c. Démontrer que si $p \circ q = 0$ alors $p + q$ est un projecteur.

d. Réciproquement, démontrer que si p, q et $p + q$ sont des projecteurs de E alors :

$$p \circ q = q \circ p = 0$$

e. Démontrer que dans la situation des deux questions précédentes :

$$\text{im}(p + q) = \text{im } p \oplus \text{im } q$$

$$\ker(p + q) = \ker p \cap \ker q.$$

a. On compose $p \circ q$ avec lui-même :

$$\begin{aligned} (p \circ q) \circ (p \circ q) &= p \circ (q \circ p) \circ q && \text{par associativité de la composition} \\ &= p \circ (p \circ q) \circ q && \text{car } p \circ q = q \circ p \\ &= (p \circ p) \circ (q \circ q) && \text{par associativité de la composition} \\ &= p \circ q && \text{car } p \text{ et } q \text{ sont des projecteurs.} \end{aligned}$$

Ceci démontre que $p \circ q$ est un projecteur.

Pour démontrer les deux égalités d'ensembles demandées, on démontre quatre inclusions.

- $\text{im}(p \circ q) \subseteq \text{im } p \cap \text{im } q$:

Soit $u \in \text{im}(p \circ q)$. Alors il existe $v \in E$ tel que $u = p(q(v))$. Ceci montre déjà que $u \in \text{im } p$.

Comme $p \circ q = q \circ p$ alors $u = q(p(v))$. Ceci montre que $u \in \text{im } q$.

Comme $u \in \text{im } p$ et $u \in \text{im } q$ alors $u \in \text{im } p \cap \text{im } q$.

On a donc démontré que : $\text{im}(p \circ q) \subseteq \text{im } p \cap \text{im } q$

- $\text{im } p \cap \text{im } q \subseteq \text{im}(p \circ q)$:

Soit $u \in \text{im } p \cap \text{im } q$.

Comme $u \in \text{im } q$ alors $q(u) = u$.

En effet, comme q est un projecteur alors $\text{im } q = \{u \in E \mid q(u) = u\}$.

Donc $p(q(u)) = p(u)$, mais comme $u \in \text{im } p$ alors $p(u) = u$. Finalement $p \circ q(u) = u$, et donc $u \in \text{im}(p \circ q)$.

On a donc démontré que : $\text{im } p \cap \text{im } q \subseteq \text{im}(p \circ q)$

- $\ker(p \circ q) \subseteq \ker p + \ker q$:

Soit $u \in \ker(p \circ q)$.

Alors $(p \circ q)(u) = 0_E$, ce qui montre que : $q(u) \in \ker p$.

Mais d'autre part comme

$$q(u - q(u)) = q(u) - q \circ q(u) = 0_E$$

alors $u - q(u) \in \ker q$. Ainsi :

$$u = q(u) + (u - q(u)) \quad \text{avec} \quad q(u) \in \ker p \quad \text{et} \quad u - q(u) \in \ker q$$

Ceci montre que $u \in \ker p + \ker q$.

On a donc démontré que : $\ker(p \circ q) \subseteq \ker p + \ker q$

- $\ker p + \ker q \subseteq \ker(p \circ q)$:

Soit $u \in \ker p + \ker q$.

Alors il existe $u_1 \in \ker p$ et $u_2 \in \ker q$ tels que $u = u_1 + u_2$.

Par linéarité de p et q : $p \circ q(u) = p \circ q(u_1) + p \circ q(u_2)$

Or $p \circ q = q \circ p$ donc : $p \circ q(u) = q \circ p(u_1) + p \circ q(u_2)$

Comme $u_1 \in \ker p$ et $u_2 \in \ker q$ alors $p(u_1) = 0_E$ et $q(u_2) = 0_E$.

On en déduit : $p \circ q(u) = q(0_E) + p(0_E) = 0_E$

Ceci montre que $u \in \ker(p \circ q)$.

On a donc démontré que : $\ker p + \ker q \subseteq \ker(p \circ q)$

Finalement par doubles inclusions on a bien obtenu :

$$\operatorname{im}(p \circ q) = \operatorname{im} p \cap \operatorname{im} q \quad \ker(p \circ q) = \ker p + \ker q$$

- b. Supposons que $\operatorname{im} p = \operatorname{im} q$, et montrons que $p = q$, *i.e.*, : $\forall u \in E \quad p(u) = q(u)$

Par propriété : $\operatorname{im} p = \{u \in E \mid p(u) = u\}$ et $\operatorname{im} q = \{u \in E \mid q(u) = u\}$

Soit $u \in E$. Alors $p(u) \in \operatorname{im} p$, donc $p(u) \in \operatorname{im} q$, donc $q(p(u)) = p(u)$.

De même, $q(u) \in \operatorname{im} q$ donc $q(u) \in \operatorname{im} p$ et ainsi $p(q(u)) = q(u)$.

Or $p \circ q = q \circ p$ donc $p(u) = q(u)$.

Ceci étant valable pour tout $u \in E$, on a bien $p = q$.

- c. Par linéarité de p et q :

$$(p + q) \circ (p + q) = p \circ p + p \circ q + q \circ p + q \circ q$$

Comme p et q sont des projecteurs et $p \circ q = q \circ p$ alors :

$$(p + q) \circ (p + q) = p + 2(p \circ q) + q$$

Si $p \circ q = 0$ alors :

$$(p + q) \circ (p + q) = p + q$$

Ceci montre que $p + q$ est un projecteur.

- d. Pour tous endomorphismes p et q de E on a par linéarité :

$$(p + q) \circ (p + q) = p \circ p + p \circ q + q \circ p + q \circ q$$

Si $p, q, p + q$ sont des projecteurs alors cette dernière égalité donne :

$$p + q = p + p \circ q + q \circ p + q$$

Elle implique $p \circ q = -q \circ p$.

En composant par p à gauche puis par p à droite on obtient :

$$p \circ q = -p \circ q \circ p \quad \text{et} \quad p \circ q \circ p = -q \circ p$$

On en déduit $p \circ q = q \circ p$, et comme $p \circ q = -q \circ p$ alors $p \circ q = q \circ p = 0$.

e. On démontre trois égalités d'ensembles.

- $\text{im } p \cap \text{im } q = \{0_E\}$:

D'après la question a : $\text{im } p \cap \text{im } q = \text{im}(p \circ q)$

D'après la question d : $p \circ q = 0$

Ainsi $\text{im } p \cap \text{im } q = \text{im } 0 = \{0_E\}$.

- $\text{im}(p + q) \subseteq \text{im } p + \text{im } q$:

Soit $v \in \text{im}(p + q)$. Alors il existe $u \in E$ tel que $v = (p + q)(u) = p(u) + q(u)$.

Or $p(u) \in \text{im } p$ et $q(u) \in \text{im } q$, donc $v \in \text{im } p + \text{im } q$.

On a démontré que $\text{im}(p + q) \subseteq \text{im } p + \text{im } q$.

- $\text{im } p + \text{im } q \subseteq \text{im}(p + q)$:

Soit $v \in \text{im } p + \text{im } q$. Alors il existe $u_1 \in E$ et $u_2 \in E$ tel que $v = p(u_1) + q(u_2)$. Par linéarité de p , comme $p \circ p = p$ et $p \circ q = 0$ alors $p(v) = p \circ p(u_1) + p \circ q(u_2) = p(u_1)$.

De même $q(v) = q \circ p(u_1) + q \circ q(u_2) = q(u_2)$.

On en déduit $p(v) = p(u_1)$ et $q(v) = q(u_2)$, donc $v = p(v) + q(v) = (p + q)(v)$ et donc $v \in \text{im}(p + q)$.

On a démontré que $\text{im } p + \text{im } q \subseteq \text{im}(p + q)$.

- $\ker(p + q) \subseteq \ker p \cap \ker q$:

Soit $u \in \ker(p + q)$. Alors $(p + q)(u) = 0_E$, donc $p(u) + q(u) = 0$.

Par linéarité de p on obtient $p \circ p(u) + p \circ q(u) = 0$. Comme $p \circ p = p$ et $p \circ q = 0$ alors $p(u) = 0$, donc $u \in \ker p$.

De même on obtient $u \in \ker q$, donc $u \in \ker p \cap \ker q$.

On a démontré que $\ker(p + q) \subseteq \ker p \cap \ker q$.

- $\ker p \cap \ker q \subseteq \ker(p + q)$:

Soit $u \in \ker p \cap \ker q$. Alors $p(u) = q(u) = 0$, donc $(p + q)(u) = p(u) + q(u) = 0$, et ainsi $u \in \ker(p + q)$.

On a démontré que $\ker p \cap \ker q \subseteq \ker(p + q)$.

Par doubles inclusions on obtient :

$$\text{im } p \cap \text{im } q = \{0_E\} \quad \text{im } p + \text{im } q = \text{im}(p + q) \quad \ker(p + q) = \ker p \cap \ker q$$

Les deux premières montrent que $\text{im } p \oplus \text{im } q = \text{im}(p + q)$, donc les égalités demandées sont démontrées.