Corrigé du T. D. B9
Applications linéaires

1 Démontrer que les applications suivantes sont linéaires puis déterminer leurs noyaux et images.

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x-y, x+2y+z) \end{array} \qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-y, 3x+3y, x+2y) \end{array}$$

- Linéarité de f.
  Soit $u=(x,y,z)$ est $v=(x',y',z')$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$, λ un scalaire. Alors :

$$\begin{aligned} f(\lambda u+v) &= f(\lambda(x,y,z)+(x,y,z)) \\ &= f((\lambda x+x', \lambda y+y', \lambda z+z')) \\ &= (3(\lambda x+x')-(\lambda y+y'), (\lambda x+x')+2(\lambda y+y')+(\lambda z+z')) \\ &= (\lambda(3x-y)+3x'-y', \lambda(x+2y+z)+x'+2y'+z') \\ &= \lambda(3x-y, x+2y+z)+(3x'-y', x'+2y'+z') \\ &= \lambda f(u)+f(v) \end{aligned}$$

  D'après la caractérisation, f est une application linéaire.
- Noyau de f.
  Soit $u=(x,y,z)$ un élément de $\mathbb{R}^3$. Alors :

$$u \in \ker f \iff f(u)=0_{\mathbb{R}^2} \iff (3x-y, x+2y+z)=(0,0)$$

  On obtient un système linéaire que l'on résout par l'algorithme du pivot de Gauss :

$$u \in \ker f \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & & & = & 0 \\ x & + & 2y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} x & & & + & \frac{1}{7}z = 0 \\ & & y & + & \frac{3}{7}z = 0 \end{array}\right.$$

  On en déduit :

$$\ker f = \left\{ \left(-\frac{1}{7}z, -\frac{3}{7}z, z\right) \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\left(-\frac{1}{7}, -\frac{3}{7}, 1\right)\right) = \mathrm{Vect}\left((1,3,-7)\right)$$

- Image de f.
  Par définition :

$$\mathrm{im}\, f = \left\{ f(u) \mid u \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

  On écrit donc :

$$\mathrm{im}\, f = \left\{ (3x-y, x+2y+z) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \mathrm{Vect}\left((3,1),(-1,2),(0,1)\right)$$

On remarque que $(1,0) = \frac{1}{3}((3,1)-(0,1))$, donc le vecteur $(1,0)$ appartient à l'image de f. Or le vecteur $(0,1)$ appartient aussi à cette image.

Ainsi $\operatorname{im} f$ contient la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Or $\operatorname{im} f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, donc il contient tout l'espace engendré par la base canonique, à savoir $\mathbb{R}^2$.

On en déduit : $\quad \operatorname{im} f = \mathbb{R}^2$

- Remarque. On a obtenu $\ker f = \operatorname{Vect}((1,3,-7))$ et $\operatorname{im} f = \mathbb{R}^2$, avec $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ linéaire.

  Effectivement, $\ker f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et $\operatorname{im} f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

- Linéarité de g.

  Soit $u = (x,y)$ est $v = (x',y')$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$, λ un scalaire. Alors :

$$\begin{aligned}
g(\lambda u + v) &= g(\lambda(x,y) + (x,y)) \\
&= g((\lambda x + x', \lambda y + y')) \\
&= ((\lambda x + x') - (\lambda y + y'), 3(\lambda x + x') + 3(\lambda y + y'), (\lambda x + x') + 2(\lambda y + y')) \\
&= (\lambda(x-y) + x' - y', \lambda(3x+3y) + 3x' + 3y', \lambda(x+2y) + x' + 2y') \\
&= \lambda(x-y, 3x+3y, x+2y) + (x'-y', 3x'+3y', x'+2y') \\
&= \lambda g(u) + g(v)
\end{aligned}$$

  D'après la caractérisation, g est une application linéaire.

- Noyau de g.

  Soit $u = (x,y)$ un élément de $\mathbb{R}^2$. Alors :

$$u \in \ker g \iff g(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff (x-y, 3x+3y, x+2y) = (0,0,0)$$

  On résout le système obtenu :

$$u \in \ker g \iff \begin{cases} x - y = 0 \\ 3x + 3y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y = 0 \\ 6y = 0 \\ 3y = 0 \end{cases} \iff x = y = 0$$

  On en déduit :

$$\ker g = \{(0,0)\} = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$$

- Image de g.

  On écrit :

$$\begin{aligned}
\operatorname{im} g &= \left\{ g(u) \mid u \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \left\{ (x-y, 3x+3y, x+2y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \operatorname{Vect}((1,3,1), (-1,3,2))
\end{aligned}$$

  La suite est optionnelle : on peut écrire $(1,3,1) + (-1,3,2) = (0,6,3) = 3(0,2,1)$, donc $\operatorname{im} g = \operatorname{Vect}((1,3,1),(0,2,1))$, puis finalement, comme $(1,3,1) - (0,2,1) = (1,1,0)$:

$$\operatorname{im} g = \operatorname{Vect}((1,1,0),(0,2,1))$$

  Ceci permet de montrer que $\operatorname{im} g$ est le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x - y + 2z = 0$.

- Remarque. On a obtenu $\ker g = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ et $\operatorname{im} g = \operatorname{Vect}((1,3,1),(-1,3,2))$ avec $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ linéaire.

  Conformément à la propriété $\ker g$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ et $\operatorname{im} g$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2 Mêmes questions avec $\begin{aligned} f : \mathbb{K}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{K} \\ P &\longmapsto P(2) \end{aligned}$ et $\begin{aligned} g : \mathbb{K}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{K}_2[X] \\ P &\longmapsto P' \end{aligned}$

- Linéarité.

  La spécialisation est linéaire car :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X] \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad (P+Q)(2) = P(2) + Q(2) \quad \text{et} \quad (\lambda P)(2) = \lambda P(2)$$

  La dérivation est également linéaire :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X] \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad (P+Q)' = P' + Q' \quad \text{et} \quad (\lambda P)' = \lambda P'$$

  La spécialisation est à valeurs dans $\mathbb{K}$, donc f est bien définie et linéaire.

  La dérivation d'un polynôme de degré au plus 2 donne un polynôme de degré au plus 1, donc *a fortiori* un polynôme de degré au plus 2, et donc g est bien définie et linéaire.

- Noyau de f.

  Par définition le noyau de f est l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{K}_2[X]$ tels que $f(P) = 0_{\mathbb{K}}$, *i.e.*, $P(2) = 0$:

$$\ker f = \{P \in \mathbb{K}_2[X] \mid P(2) = 0\}$$

  Cette description de $\ker f$ est satisfaisante, mais on peut aller plus loin : $P(2) = 0$ signifie que 2 est racine de P, donc que P est multiple de $(X-2)$: Il existe un polynôme Q tel que $P = (X-2)Q$. Or P est de degré au plus 2, donc Q est de degré au plus 1. On en déduit :

$$\begin{aligned} \ker f &= \Big\{(aX+b)(X-2) \mid (a,b) \in \mathbb{K}^2\Big\} \\ &= \Big\{aX(X-2) + b(X-2) \mid (a,b) \in \mathbb{K}^2\Big\} \\ &= \operatorname{Vect}(X(X-2), X-2) \end{aligned}$$

  Ceci confirme en particulier que $\ker f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_2[X]$.

- Image de f.

  Par définition : $\operatorname{im} f = \{f(P) \mid P \in \mathbb{K}_2[X]\} = \{P(2) \mid P \in \mathbb{K}_2[X]\}$

  Or tout scalaire est image de 2 par un polynôme de degré au plus 2.

  En effet, si α est un scalaire quelconque, alors $P = X - 2 + \alpha$ appartient à $\mathbb{K}_2[X]$, et $P(2) = \alpha$.

  Ceci montre que : $\operatorname{im} f = \mathbb{K}$

  Il s'agit bien d'un espace vectoriel de $\mathbb{K}$.

  De toutes façons, $\mathbb{K}$ ne contient que deux sous-espace vectoriel : $\{0_{\mathbb{K}}\}$ et $\mathbb{K}$, et ici l'image de f ne peut être réduite au scalaire nul.

- Noyau de g.
  Un polynôme P de $\mathbb{K}_2[X]$ appartient au noyau de g si et seulement si $g(P) = 0_{\mathbb{K}_2[X]}$, donc si et seulement si $P' = 0$, ce qui a lieu si et seulement si P est constant.
  On en déduit : $\ker g = \mathbb{K}_0[X]$.
  Il s'agit bien d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_2[X]$.
- Image de g.
  Par définition : $\operatorname{im} g = \{ g(P) \mid P \in \mathbb{K}_2[X]\} = \{ P' \mid P \in \mathbb{K}_2[X]\}$
  Démontrons que : $\operatorname{im} g = \mathbb{K}_1[X]$
  Méthode 1. Si P est un polynôme de degré au plus 2 alors P' est un polynôme de degré au plus 1, donc $\operatorname{im} g \subseteq \mathbb{K}_1[X]$.
  Si P est un polynôme de degré au plus 1 alors il est le dérivé d'un certain polynôme de degré au plus 2. Par exemple si $P = aX + b$ alors en posant $Q = \frac{a}{2}X^2 + bX$ on a $Q' = P$, ce qui montre que $P = g(Q)$ et donc $P \in \operatorname{im} g$.
  Ceci montre que $\mathbb{K}_1[X] \subseteq \operatorname{im} g$, puis par double inclusion : $\operatorname{im} g = \mathbb{K}_1[X]$.
  Méthode 2. On sait que $\mathbb{K}_2[X] = \{ aX^2 + bX + c \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$. On en déduit :

$$\operatorname{im} g = \left\{ (aX^2 + bX + c)' \;\middle|\; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ 2aX + b \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{Vect}(2X, 1)$$

  Ceci donne : $\operatorname{im} g = \operatorname{Vect}(X, 1) = \mathbb{K}_1[X]$
  Finalement, on a démontré que $\operatorname{im} g = \mathbb{K}_1[X]$.
  Il s'agit bien d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_2[X]$.

3 Parmi les applications linéaires proposées dans les deux exercices précédents, lesquelles sont injectives ? Surjectives ?

On rappelle que si $f : E \to F$ est une application linéaire alors :

$$\begin{aligned} f \text{ injective} &\iff \ker f = \{0_E\} \\ f \text{ surjective} &\iff \operatorname{im} f = F \end{aligned}$$

Dans l'exercice 1 on a obtenu :

$$\ker f = \operatorname{Vect}((1, 3, -7)) \neq \mathbb{R}^3 \qquad \text{et} \qquad \operatorname{im} f = \mathbb{R}^2$$

Donc f n'est pas injective mais est surjective.
Ensuite :

$$\ker g = \{0_{\mathbb{R}^2}\} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{im} g = \operatorname{Vect}((1, 3, 1), (-1, 3, 2)) \neq \mathbb{R}^3$$

Donc g est injective mais n'est pas surjective. Le fait que $\operatorname{im} g$ est différent de $\mathbb{R}^3$ n'est pas prouvé rigoureusement ici. Nous verrons que $\mathbb{R}^3$ ne peut pas être engendré par moins de 3 vecteurs puisqu'il est de dimension 3.
Dans l'exercice 2 on a obtenu :

$$\ker f = \{ P \in \mathbb{K}_2[X] \mid P(2) = 0\} \neq \left\{0_{\mathbb{K}_2[X]}\right\} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{im} f = \mathbb{K}$$

Donc f n'est pas injective mais f est surjective. Le fait que $\ker f$ n'est pas réduit au polynôme nul peut être justifié car par exemple le polynôme $(X-2)$ est dans le noyau de f alors qu'il n'est pas nul.

Ensuite :

$$\ker g = \mathbb{K}_0[X] \neq \mathbb{K}_2[X] \qquad \text{et} \qquad \operatorname{im} g = \mathbb{K}_1[X] \neq \mathbb{K}_2[X]$$

Donc g n'est ni injective ni surjective.

4 Soit p l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x,y,z) \in E \qquad p(x,y,z) = (x+y-z, x+y-z, x+y-z)$$

Démontrer que p est un projecteur et déterminer ses éléments caractéristiques.

On justifie d'abord que p est linéaire.

Les trois composantes de p sont les fonctions $(x,y,z) \mapsto x+y-z$, elles sont de la forme $(x,y,z) \mapsto ax+by+zc$ avec a, b, c scalaires, donc elles sont linéaires.

Comme les trois composantes de p sont linéaires alors p est linéaire.

Pour démontrer que p est un projecteur on vérifie que $p \circ p = p$.

Soit (x,y,z) un vecteur de E. Alors :

$$\begin{aligned}
p \circ p(x,y,z) &= p(x+y-z, x+y-z, x+y-z) \\
&= ((x+y-z)+(x+y-z)-(x+y-z), \\
&\qquad (x+y-z)+(x+y-z)-(x+y-z), \\
&\qquad\qquad (x+y-z)+(x+y-z)-(x+y-z)) \\
&= (x+y-z, x+y-z, x+y-z) \\
&= p(x,y,z)
\end{aligned}$$

Ainsi $p \circ p = p$, donc p est un projecteur.

On sait que p est alors le projecteur sur F parallèlement à G, où $F = \operatorname{im} p$ et $G = \ker p$. On calcule donc :

$$\begin{aligned}
G = \operatorname{im} p &= \left\{ (x+y-z, x+y-z, x+y-z) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
&= \operatorname{Vect}((1,1,1),(1,1,1),(-1,-1,-1)) \\
&= \operatorname{Vect}((1,1,1))
\end{aligned}$$

Ensuite un vecteur (x,y,z) de E appartient au noyau de p si et seulement si $p(x,y,z) = (0,0,0)$, ce qui équivaut à $z = x+y$, donc :

$$\ker p = \left\{ (x,y,x+y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{Vect}((1,0,1),(0,1,1))$$

Nous avons donc démontré que p est le projecteur de E sur $F = \operatorname{Vect}((1,1,1))$ parallèlement à $G = \operatorname{Vect}((1,0,1),(0,1,1))$.

(5) Soit $a = (a_1, \dots, a_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ vérifiant : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 1$

a. Démontrer que l'application

$$p : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right) a$$

est un endomorphisme de $E = \mathbb{R}^n$.

b. Démontrer que p est un projecteur sur une droite vectorielle parallèlement à un hyperplan.

a. L'application p est définie sur $E = \mathbb{R}^n$. Si $x = (x_1, \dots, x_n)$ est un vecteur de E alors $\sum_{k=1}^{n} a_k x_k$ est un scalaire, donc $(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k)a$ est défini et appartient à E car c'est un multiple de a. Ainsi p est définie sur E et à valeurs dans E.

Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$et $y = (y_1, \dots, y_n)$ deux vecteurs de $E = \mathbb{R}^n$ et λ un scalaire. Alors $\lambda x + y = (\lambda x_1 + y_1, \dots, \lambda x_n + y_n)$, puis

$$p(\lambda x + y) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k(\lambda x_k + y_k)\right) a$$

Par linéarité de la somme puis distributivité de la multiplication par un scalaire :

$$p(\lambda x + y) = \left(\lambda \sum_{k=1}^{n} a_k x_k + \sum_{k=1}^{n} a_k y_k\right) a = \lambda \left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right) a + \left(\sum_{k=1}^{n} a_k y_k\right) a = \lambda p(x) + p(y)$$

Ceci étant valable pour tous vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$ et tout scalaire λ, l'application p est linéaire.

Finalement p est une application linéaire de E dans E donc c'est un endomorphisme de E.

b. Tout d'abord, comme $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 1$ alors $p(a) = (\sum_{k=1}^{n} a_k^2)a = a$.

Ensuite, pour tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$ de E, par linéarité de p :

$$p \circ p(x) = p\left(\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right) a\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right) p(a) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right) a = p(x)$$

On a démontré que $p \circ p(x) = p(x)$ pour tout $x \in E$, donc $p \circ p = p$ et p est un projecteur.

Démontrons que p est le projecteur sur $D = \text{Vect}(a)$ parallèlement à H, l'hyperplan d'équation $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$.

Notons φ :
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x = (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k x_k. \end{array}$$

Ainsi pour tout $x \in E$: $p(x) = \varphi(x)a$.

Alors φ est une forme linéaire de E. Comme $\varphi(a) = 1$ alors φ est non-nul. Son noyau $H = \ker \varphi$ est donc un hyperplan de E.

Comme a est non-nul (car $\varphi(a) \neq 0_{\mathbb{K}}$) alors pour tout $x \in E$:

$$x \in \ker p \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(x)a = 0_E \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(x) = 0_{\mathbb{K}}$$

On en déduit que H est aussi le noyau de p : $\ker p = \ker \varphi = H$.
De plus l'image de p est : $\operatorname{im} p = \{\, p(x) \mid x \in E\} = \{\, \varphi(x)a \mid x \in E\}$
Ceci montre que $\operatorname{im} p \subseteq \operatorname{Vect}(a)$.
Réciproquement, si x est un élément de $\operatorname{Vect}(a)$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda a$, donc $p(x) = \lambda p(a) = \lambda a = x$, puis $x \in \operatorname{im} p$.
On a démontré que $\operatorname{im} p = \operatorname{Vect}(a)$. Il s'agit bien d'une droite vectorielle car a n'est pas nul.
Finalement p est le projecteur de E sur $D = \operatorname{Vect}(a)$ parallèlement à $H = \ker \varphi$.

6 Soit s l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^2$ défini par :

$$\forall (x, y) \in E \qquad s(x, y) = (x, -2x - y)$$

Démontrer que s est une symétrie et déterminer ses éléments caractéristiques.

Pour démontrer que s est une symétrie on vérifie que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.
Soit (x, y) un vecteur de E. Alors :

$$s \circ s(x, y) = s(x, -2x - y) = (x, -2x - (-2x - y)) = (x, y)$$

Ainsi $s \circ s = \mathrm{Id}_E$, donc s est une symétrie.
On sait qu'alors s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G, où

$$F = \{\, u \in E \mid s(u) = u\} \qquad \text{et} \qquad G = \{\, u \in E \mid s(u) = -u\}$$

Soit $u = (x, y)$ un vecteur de E. Alors :

$$s(u) = u \quad \Longleftrightarrow \quad (x, -2x - y) = (x, y) \quad \Longleftrightarrow \quad -2x - y = y \quad \Longleftrightarrow \quad y = -x$$

On en déduit :

$$F = \{\, (x, y) \in E \mid y = -x\} = \{\, (x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}((1, -1))$$

Ensuite :

$$s(u) = -u \quad \Longleftrightarrow \quad (x, -2x - y) = (-x, -y) \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0$$

Donc :

$$G = \{\, (0, y) \in E \mid y \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}((0, 1))$$

Autre méthode. Pour déterminer F et G on utilise le projecteur associé $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E)$.
En effet si $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E)$ alors p est le projecteur sur F parallèlement à G. On obtient :

$$\forall (x, y) \in E \qquad p(x, y) = \tfrac{1}{2}\Big((x, -2x - y) + (x, y)\Big) = (x, -x)$$

On obtient ensuite

$$F = \operatorname{im} p = \operatorname{Vect}((1,-1)) \qquad \text{et} \qquad G = \ker p = \operatorname{Vect}((0,1))$$

Finalement on a démontré que s est la symétrie de E par rapport à $F = \operatorname{Vect}((1,-1))$ parallèlement à $G = \operatorname{Vect}((0,1))$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Soit E l'espace vectoriel des suites arithmétiques à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Démontrer que l'application

$$f : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1 - u_0) \end{array}$$

est un isomorphisme.

Le fait que E est un espace vectoriel a été démontré dans la feuille de TD précédente.

- Démontrons que f est linéaire.
  Méthode 1. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de E, donc deux suites arithmétiques, et λ un scalaire. Alors :

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= ((\lambda u + v)_0, (\lambda u + v)_1 - (\lambda u + v)_0) = (\lambda u_0 + v_0, \lambda u_1 + v_1 - \lambda u_0 - v_0) \\ &= \lambda(u_0, u_1 - u_0) + (v_0, v_1 - v_0) = \lambda f(u) + f(v). \end{aligned}$$

  D'après la caractérisation de applications linéaires f est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}^2$.
  Méthode 2. La spécialisation des suites est une forme linéaire, donc les applications $u \mapsto u_0$ et $u \mapsto u_1$ sont des formes linéaires.
  Par combinaison linéaire l'application $u \mapsto u_1 - u_0$ est une forme linéaire.
  Les composantes de f sont des formes linéaires, donc f est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}^2$.
- f est injective.
  On démontre que $\ker f = \{0_E\}$.
  Soit $u \in E$ tel que $f(u) = 0_{\mathbb{K}^2}$. Alors $u_0 = 0$ et $u_1 - u_0 = 0$. Or u est une suite arithmétique, donc sa raison est $r = u_1 - u_0$. Ainsi u est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 0$ et de raison $r = 0$, donc u est la suite nulle.
  Il est évident que la suite nulle est dans le noyau de f, donc $\ker f = \{0_E\}$, et f est injective.
- f est surjective.
  Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = a$ et de raison $r = b$. Alors $f((u_n)) = (a, b)$. Ceci montre que tout élément de $\mathbb{K}^2$ admet un antécédent, donc f est surjective.

Finalement f est linéaire, injective et surjective, donc c'est un isomorphisme.

Nous verrons plus tard qu'un isomorphisme conserve la dimension. Comme $\mathbb{K}^2$ est de dimension 2 nous retrouvons le fait que E est de dimension 2.

$\boxed{2}$ Démontrer que les applications suivantes sont linéaires. Calculer leurs noyaux et leurs images. Déterminer ensuite les dimensions de ces noyaux et images.

$$f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-y, x+y, x+2y) \end{array}$$

$$f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-y, 2x-y) \end{array}$$

$$f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & 3x+y-5z \end{array}$$

$$f_4 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ x & \longmapsto & (4x, 0, -x, x/2) \end{array}$$

$$f_5 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^5 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x_1,\dots,x_5) & \longmapsto & (0,0,x_2,0) \end{array}$$

$$f_6 : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & a+d \end{array}$$

$$f_7 : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_3[X] \\ P & \longmapsto & XP' - 3P \end{array}$$

$$f_8 : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ P & \longmapsto & (P(1), P(2)) \end{array}$$

$$f_9 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ u & \longmapsto & (u_{n+1}) - (u_n) \end{array}$$

- Les composantes de f_1 sont les applications $(x,y) \mapsto x-y$, $(x,y) \mapsto x+y$ et $(x,y) \mapsto x+2y$. Elles sont de la forme $(x,y) \mapsto ax+by$ donc ce sont des formes linéaires.
  En conséquence f_1 est linéaire.

  Son noyau est l'ensemble de vecteurs $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f_1(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$, ce qui s'écrit :
  $$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$
  L'unique solution de ce système est $(x,y) = (0,0)$, ce qui donne : $\ker f_1 = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$
  Ce noyau est de dimension nulle.
  On peut ajouter que f_1 est injective, car son noyau est réduit au vecteur nul.

  L'image de f_1 est l'ensemble des $f_1(u)$ avec u appartenant à $\mathbb{R}^2$:
  $$\operatorname{im} f_1 = \left\{ f(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
  Ceci s'écrit :
  $$\operatorname{im} f_1 = \left\{ (x-y, x+y, x+2y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{Vect}\left((1,1,1), (-1,1,2)\right)$$
  On pose $u_1 = (1,1,1)$ et $u_2 = (-1,1,2)$. La famille (u_1, u_2) est donc génératrice de $\operatorname{im} f_1$. Comme les vecteurs u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires alors la famille (u_1,u_2) est libre. Elle est donc une base de $\operatorname{im} f_1$.
  Cette base contient deux vecteurs, donc $\operatorname{im} f_1$ est de dimension 2.
  On peut démontrer qu'il s'agit du plan vectoriel d'équation $x - 3y + 2z = 0$.
- Les composantes de f_2 sont de la forme $(x,y) \mapsto ax+by$, elles sont linéaires donc f_2 est linéaire.
  Le noyau de f_2 est l'ensemble des vecteurs (x,y) vérifiant :
  $$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

Le vecteur nul de $\mathbb{R}^2$ est l'unique solution de ce système, donc : $\ker f_2 = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$
Ce noyau est de dimension nulle.

L'image de f_2 est :

$$\operatorname{im} f_2 = \left\{ f_2(u) \mid u \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ (x-y, 2x-y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{Vect}\left((1,2),(-1,-1)\right)$$

On peut simplifier cet ensemble, car $(1,2)+(-1,-1)=(0,1)$:

$$\operatorname{im} f_2 = \operatorname{Vect}\left((0,1),(-1,-1)\right) = \operatorname{Vect}\left((0,1),(1,0)\right)$$

On en déduit : $\operatorname{im} f_2 = \mathbb{R}^2$
Cette image est de dimension 2.
Comme $\ker f_2 = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ et $\operatorname{im} f_2 = \mathbb{R}^2$ alors f_2 est injective et surjective, donc f_2 est un isomorphisme.

- L'application f_3 est de la forme $(x,y,z) \mapsto ax+by+cz$: c'est une forme linéaire donc elle est linéaire.
  Son noyau est l'ensemble des vecteurs (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ tels que $3x+y-5z=0$, ce qui s'écrit $y=-3x+5z$ et donc :
  $$\ker f_3 = \left\{ (x,-3x+5z,z) \mid (x,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{Vect}\left((-3,1,0),(0,1,5)\right)$$
  Soit $u_1=(-3,1,0)$ et $u_2=(0,1,5)$. La famille (u_1,u_2) est génératrice de $\ker f_3$. Elle est libre car u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires. C'est donc une base de $\ker f_3$.
  Comme cette base contient deux vecteurs alors $\ker f_3$ est de dimension 2.

  Pour l'image de f_3 on pourrait directement dire que $\operatorname{im} f_3$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$, lequel ne contient que deux sous-espaces vectoriels : $\{0_{\mathbb{R}}\}$ et $\mathbb{R}$. Or f_3 est non-nul donc $\operatorname{im} f_3 = \mathbb{R}$.
  Mais sinon il suffit d'écrire :
  $$\begin{aligned}\operatorname{im} f_3 &= \left\{ f(x,y,z) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ 3x+y-5z \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \operatorname{Vect}(3,1,-5) = \operatorname{Vect}(1) \\ &= \mathbb{R}\end{aligned}$$
  Cette image est de dimension 1, engendrée par le vecteur 1 de $\mathbb{R}$ qui est non-nul.
  On peut en déduire que f_3 est surjective.
- Les composantes de f_4 sont de la forme $x \mapsto ax$ où a est un réel, elles sont donc linéaires et ainsi f_4 est linéaire.
  On obtient $\ker f_4 = \{0_{\mathbb{R}}\}$, de dimension nulle, et $\operatorname{im} f_4 = \operatorname{Vect}\left((4,0,-1,1/2)\right)$, de dimension 1.
  On peut en déduire que f_4 est injective.
- L'application f_5 possède trois composantes nulles (donc linéaires) et la composante $(x_1,\dots,x_5) \mapsto x_2$ qui est aussi linéaire, donc elle est linéaire.
  Son noyau est :
  $$\ker f_5 = \left\{ (x_1,0,x_3,x_4,x_5) \mid (x_1,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^4 \right\} = \operatorname{Vect}(e_1,e_3,e_4,e_5)$$

La famille (e_1, e_3, e_4, e_5) est libre car elle est extraite de la base canonique de $\mathbb{R}^5$, qui est libre. Or elle est aussi génératrice de $\ker f_5$, donc c'est une base de $\ker f_5$.
Elle contient quatre vecteurs, donc $\ker f_5$ est de dimension 4.

L'image de f_5 est : $\operatorname{im} f_5 = \text{Vect}\left((0,0,1,0)\right)$
Comme le vecteur e_3 de $\mathbb{R}^4$ est non-nul alors la famille (e_3) est libre. Elle est génératrice de $\operatorname{im} f_5$, c'en est donc une base, et finalement $\operatorname{im} f_5$ est de dimension 1.

- Pour l'application $f_6 : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ on utilise la caractérisation de applications linéaires.
Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et λ un scalaire. Alors :

$$\begin{aligned} f_6(\lambda M + M') &= f_6\left(\begin{pmatrix} \lambda a + a' & \lambda b + b' \\ \lambda c + c' & \lambda d + d' \end{pmatrix}\right) \\ &= (\lambda a + a') + (\lambda d + d') = \lambda(a+d) + (a'+d') \\ &= \lambda f_6(M) + f_6(M') \end{aligned}$$

On a montré que :

$$\forall (M, M') \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad f_6(\lambda M + M') = \lambda f_6(M) + f_6(M')$$

D'après la caractérisation des applications linéaires, f_6 est linéaire.

Les éléments du noyau de f_6 sont les matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $a + d = 0$, donc :

$$\ker f_6 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \middle| \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

On note : $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
La famille (M_1, M_2, M_3) est génératrice de $\ker f_6$. Démontrons qu'elle est libre.
Soit λ_1, λ_2, λ_3 trois scalaires tels que $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3 = 0_E$. Alors

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & -\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. On a démontré que :

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \qquad \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3 = 0_E \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0_{\mathbb{R}}$$

Ceci montre que la famille (M_1, M_2, M_3) est libre.
La famille (M_1, M_2, M_3) est donc une base de $\ker f_6$, et ce noyau est de dimension 3.

On obtient ensuite :

$$\operatorname{im} f_6 = \left\{ a + d \mid \ (a,d) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathbb{R}$$

Cette image est de dimension 1.
On peut ajouter que f_6 est surjective.

- On explicite f_7 :

$$\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4 \qquad f_7(aX^3+bX^2+cX+d) = -bX^2 - 2cX - 3d$$

On en déduit que $\ker f_7 = \operatorname{Vect}(X^3)$ et $\operatorname{im} f_7 = \mathbb{K}_2[X]$.
Le noyau de f_7 est de dimension 1, son image est de dimension 3.

- Le noyau de f_8 est l'ensemble des polynômes de degré au plus 3 dont 1 et 2 sont racines, donc :

$$\ker f_8 = (X-1)(X-2)\mathbb{K}_1[X] = \operatorname{Vect}\left(X(X-1)(X-2), (X-1)(X-2)\right)$$

La famille $(X(X-1)(X-2), (X-1)(X-2))$ est libre car ses polynômes sont de degrés échelonnés, donc c'est une base de $\ker f_8$, et ainsi ce noyau est de dimension 2.
On démontre ensuite que $\operatorname{im} f_8 = \mathbb{K}^2$, *i.e.,* f_8 est surjective. Ceci est conséquence de l'interpolation de Lagrange. On peut aussi expliciter un antécédent de tout élément (α, β) de $\mathbb{K}^2$, par exemple :

$$P = \beta(X-1) - \alpha(X-2)$$

On constate bien que $f_8(P) = (\alpha, \beta)$.

- Le noyau de f_9 est l'ensemble des suites constantes, il est de dimension 1, engendré par la suite constante égale à 1.
L'image de f_9 est $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, donc f_9 est surjective.
En effet si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite, alors on peut poser, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad v_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$
On obtient $f_9(v) = u$. Ceci montre que f_9 est surjective.

3 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linéaire telle que

$$f(1,0,0) = (1,-1,0)$$
$$f(0,1,0) = (1,1,0)$$
$$f(0,0,1) = (1,1,1)$$

a. Justifier que f est uniquement déterminée et donner $f(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

b. Calculer $\ker f$ et $\operatorname{im} f$.

c. Démontrer que f est un isomorphisme et déterminer f^{-1}.

a. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. D'après l'énoncé, si f existe alors elle vérifie :

$$f(e_1) = (1,-1,0) \qquad f(e_2) = (1,1,0) \qquad f(e_3) = (1,1,1)$$

Soit $u = (x,y,z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Alors $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$, donc par linéarité :

$$f(u) = f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3)$$

Ceci donne :

$$f(x,y,z) = x(1,-1,0) + y(1,1,0) + z(1,1,1) = (x+y+z, -x+y+z, z)$$

Cette application est bien définie. Elle est linéaire car ses composantes sont de la forme $(x, y, z) \mapsto ax + by + cz$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Nous venons de démontrer que cette application est la seule application linéaire vérifiant les trois conditions, donc elle est uniquement déterminée. De plus son expression générale est :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \qquad f(x, y, z) = (x + y + z, -x + y + z, z)$$

b. Un vecteur $u = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ appartient au noyau de f si et seulement si $f(u) = 0$, ce qui équivaut au système :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Son unique solution est $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ donc $\ker f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

Pour l'image on écrit :

$$\operatorname{im} f = \left\{ f(u) \mid u \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ (x + y + z, -x + y + z, z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Ceci donne :

$$\operatorname{im} f = \operatorname{Vect}\left((1, -1, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\right)$$

Démontrons que $\operatorname{im} f$ est égal à $\mathbb{R}^3$ tout entier. Pour ceci on note u_1, u_2, u_3 les trois vecteurs définis ci-dessus. On remarque que :

$$e_1 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \qquad e_2 = \frac{1}{2}(u_2 - u_1) \qquad e_3 = u_3 - u_2$$

Ceci montre que e_1, e_2, e_3 appartiennent au sous-espace vectoriel engendré par u_1, u_2, u_3, donc à $\operatorname{im} f$.

L'image de f est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ contenant la base canonique, il contient donc $\mathbb{R}^3$ tout entier. Par double inclusion : $\operatorname{im} f = \mathbb{R}^3$.

c. Comme $\ker f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et $\operatorname{im} f = \mathbb{R}^3$ alors par propriété f est injective et surjective. Elle est donc bijective.

Comme f est linéaire bijective alors f est un isomorphisme.

Calculons sa réciproque.

Soit $v = (x, y, z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. On veut calculer $u = f^{-1}(v)$. Ceci équivaut à $f(u) = v$. En notant $u = (a, b, c)$, on est amené à résoudre le système suivant, d'inconnues a, b, c :

$$\begin{cases} a + b + c = x \\ -a + b + c = y \\ c = z \end{cases}$$

Ses solutions sont :

$$(a, b, c) = \left(\frac{1}{2}(x - y), \frac{1}{2}(x + y) - z, z\right)$$

On en déduit que :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \qquad f^{-1}(x, y, z) = \frac{1}{2}(x - y, x + y - 2z, 2z)$$

$\boxed{4}$ Pour tout $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ on note :

$$\varphi(y) = y'' - 4y' + 20y$$

a. Justifier que φ est une application linéaire de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

b. Déterminer le noyau de φ et sa dimension.

a. Si y est de classe $\mathcal{C}^2$ alors elle est deux fois dérivable de dérivée seconde continue. Ainsi y' et y'' sont définies et continues. Par combinaison linéaire $y'' - 4y' + 20y$ est définie et continue.
Ceci montre que φ est bien définie sur $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.
L'application de dérivation $D : y \mapsto y'$ est linéaire. Par composition l'application $D \circ D : y \mapsto y''$ est linéaire.
Or $\varphi = D \circ D - 4D + 20\mathrm{Id}$ donc φ est combinaison linéaire d'applications linéaires, et par propriété φ est linéaire.

b. Le noyau de φ est l'ensemble des fonctions y de classe $\mathcal{C}^2$ telles que :

$$y'' - 4y' + 20y = 0$$

Il s'agit donc des solutions de cette équation différentielle.
L'équation caractéristique associée est :

$$\lambda^2 - 4\lambda + 20 = 0$$

Ses solutions sont $2+4i$ et $2-4i$. Par théorème les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions y définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) = e^{2t}(\alpha \cos(4t) + \beta \sin(4t))$$

où α et β sont deux réels. Ceci s'écrit

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) = \alpha e^{2t} \cos(4t) + \beta e^{2t} \sin(4t) \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

De façon équivalente, $y = \alpha y_1 + \beta y_2$ où y_1 et y_2 sont les fonctions définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y_1(t) = e^{2t} \cos(4t) \qquad \text{et} \qquad y_2(t) = e^{2t} \sin(4t)$$

Ainsi les solutions de l'équation différentielle sont les combinaisons linéaires de y_1 et y_2 et donc :

$$\ker \varphi = \mathrm{Vect}\,(y_1, y_2)$$

La famille (y_1, y_2) est génératrice de $\ker \varphi$. Démontrons qu'elle est libre.
Soit λ_1 et λ_2 deux réels tels que $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0_{\mathcal{C}^2(\mathbb{R})}$. Ceci signifie :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \lambda_1 e^{2t} \cos(4t) + \lambda_2 e^{2t} \sin(4t) = 0_{\mathbb{R}}$$

L'exponentielle étant strictement positive :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \lambda_1 \cos(4t) + \lambda_2 \sin(4t) = 0_{\mathbb{R}}$$

Ceci est vrai en particulier pour $t = 0$ et pour $t = \frac{\pi}{8}$, et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0_{\mathbb{R}}$.
On peut donc en conclure que la famille (y_1, y_2) est libre.
Cette famille est libre et génératrice de $\ker \varphi$, donc c'est une base de $\ker \varphi$.
Elle contient deux éléments donc $\ker \varphi$ est de dimension 2.

5 Soit E, F, G trois espaces vectoriels et

$$f : E \to F \qquad g : F \to G$$

deux applications linéaires.

a. Démontrer que l'application $g \circ f$ est nulle si et seulement si $\operatorname{im} f \subseteq \ker g$.

b. Démontrer que :

$$\ker f \subseteq \ker g \circ f \quad \text{et} \quad \operatorname{im} g \circ f \subseteq \operatorname{im} g$$

c. En déduire que si $g \circ f$ est un isomorphisme alors f est injective et g est surjective.

a. Supposons que $g \circ f$ est nulle.
Soit $v \in \operatorname{im} f$. Alors il existe $u \in E$ tel que $v = f(u)$.
Alors $g(v) = g \circ f(u)$, et comme $g \circ f$ est l'application nulle alors $g(v) = 0_G$. Ceci montre que $v \in \ker g$.
On a démontré que $\operatorname{im} f \subseteq \ker g$.

Réciproquement, supposons que $\operatorname{im} f \subseteq \ker g$.
Soit $u \in E$. Alors $f(u) \in \operatorname{im} f$. Donc $f(u) \in \ker g$. Ceci signifie que $g(f(u)) = 0_G$.
Pour tout $u \in E$ on a $g \circ f(u) = 0_G$, donc $g \circ f$ est l'application nulle de E dans G.

Par double implication on a démontré que $g \circ f$ est l'application nulle si et seulement si $\operatorname{im} f \subseteq \ker g$.

b. Soit $u \in \ker f$. Alors $f(u) = 0_F$. Comme g est linéaire alors $g(0_F) = 0_G$, donc $g(f(u)) = 0_G$, ce qui montre que $u \in \ker g \circ f$.
On a démontré que $\ker f \subseteq \ker g \circ f$.

Soit maintenant $w \in \operatorname{im}(g \circ f)$. Alors il existe $u \in E$ tel que $w = g(f(u))$. On pose $v = f(u)$. Alors $w = g(v)$. Ceci montre que $w \in \operatorname{im} g$.
On a démontré que $\operatorname{im}(g \circ f) \subseteq \operatorname{im} g$.

c. Si $g \circ f$ est un isomorphisme alors $g \circ f$ est injective et surjective.
Comme $g \circ f$ est injective alors $\ker(g \circ f) = \{0_E\}$. Comme $g \circ f$ est surjective alors $\operatorname{im}(g \circ f) = G$.
De plus $\ker f$ est un sous-espace vectoriel de E et $\operatorname{im} g$ est un sous-espace vectoriel de G, donc d'après la question précédente :

$$\{0_E\} \subseteq \ker f \subseteq \ker(g \circ f) = \{0_E\} \qquad G = \operatorname{im}(g \circ f) \subseteq \operatorname{im} g \subseteq G$$

Par doubles inclusions on obtient $\ker f = \{0_E\}$, ce qui montre que f est injective, et $\operatorname{im} g = G$, ce qui montre que g est surjective.

6 Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E. On note $f^2 = f \circ f$. Démontrer que :

$$\ker f = \ker f^2 \iff \operatorname{im} f \cap \ker f = \{0_E\}$$
$$\operatorname{im} f = \operatorname{im} f^2 \iff \operatorname{im} f + \ker f = E$$

- Supposons que : $\ker f = \ker f^2$

  Comme f est une application linéaire de E dans E alors $\operatorname{im} f$ et $\ker f$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

  En conséquence ils contiennent son vecteur nul, et ainsi : $\{0_E\} \subseteq \operatorname{im} f \cap \ker f$

  Réciproquement, considérons un vecteur u de $\operatorname{im} f \cap \ker f$.

  Comme $u \in \operatorname{im} f$ alors il existe $v \in E$ tel que $u = f(v)$.

  Comme $u \in \ker f$ alors $f(u) = 0_E$.

  Ceci donne $f(f(v)) = 0_E$, donc $v \in \ker f^2$. Mais comme $\ker f^2 = \ker f$ alors $v \in \ker f$. Ainsi $f(v) = 0_E$, et donc $u = 0_E$.

  On a démontré que : $\operatorname{im} f \cap \ker f \subseteq \{0_E\}$

  Par double inclusion : $\operatorname{im} f \cap \ker f = \{0_E\}$

- Supposons que : $\operatorname{im} f \cap \ker f = \{0_E\}$

  Soit $u \in \ker f$.

  Alors $f(u) = 0_E$, puis $f(f(u)) = f(0_E) = 0_E$ car f est linéaire, donc $u \in \ker f^2$.

  Ceci démontre que : $\ker f \subseteq \ker f^2$

  Réciproquement, considérons un vecteur u de $\ker f^2$.

  Alors $f(f(u)) = 0_E$, ce qui montre que $f(u) \in \ker f$. Mais de plus $f(u) \in \operatorname{im} f$ par définition de l'image. Ainsi $f(u) \in \operatorname{im} f \cap \ker f$, ce qui donne $f(u) = 0_E$ par hypothèse. En conséquence $u \in \ker f$, et nous avons donc démontré que : $\ker f^2 \subseteq \ker f$

  Par double inclusion : $\ker f^2 = \ker f$

Par double implication on a démontré que : $\ker f = \ker f^2 \iff \operatorname{im} f \cap \ker f = \{0_E\}$

- Supposons que : $\operatorname{im} f = \operatorname{im} f^2$

  Comme $\operatorname{im} f$ et $\ker f$ sont des sous-espaces vectoriels de E alors : $\operatorname{im} f + \ker f \subseteq E$

  Réciproquement, considérons un vecteur u de E.

  Alors $f(u) \in \operatorname{im} f$, et comme $\operatorname{im} f = \operatorname{im} f^2$ alors $f(u) \in \operatorname{im} f^2$.

  Ceci signifie qu'il existe $v \in E$ tel que $f(u) = f(f(v))$. Par soustraction $f(u) - f(f(v)) = 0_E$ puis par linéarité $f(u - f(v)) = 0_E$.

  On en déduit que $u - f(v) \in \ker f$. Ainsi $u = f(v) + (u - f(v))$, comme $f(v) \in \operatorname{im} f$et $u - f(v) \in \ker f$ alors $u \in \operatorname{im} f + \ker f$.

  On a démontré que : $E \subseteq \operatorname{im} f + \ker f$

  Par double inclusion : $E = \operatorname{im} f + \ker f$

- Supposons que : $E = \operatorname{im} f + \ker f$

  Soit v un vecteur de $\operatorname{im} f^2$. Alors il existe $u \in E$ tel que $v = f(f(u))$, *i.e.*, v est l'image par f de $f(u)$, et donc $v \in \operatorname{im} f$.

  On a démontré que : $\operatorname{im} f^2 \subseteq \operatorname{im} f$

Réciproquement, considérons un vecteur v de $\operatorname{im} f$. Alors il existe $u \in E$ tel que $v = f(u)$.
Comme $u \in E$ et $E = \operatorname{im} f + \ker f$ alors il existe $u_1 \in \operatorname{im} f$ et $u_2 \in \ker f$ tels que $u = u_1 + u_2$.
Comme $u_1 \in \operatorname{im} f$ alors il existe $w \in E$ tel que $u_1 = f(w)$. Comme $u_2 \in \ker f$ alors $f(u_2) = 0_E$. Par linéarité :

$$v = f(u) = f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) = f(f(w)) + 0_E = f^2(w)$$

Ainsi $v \in \operatorname{im} f^2$. On a démontré que : $\operatorname{im} f \subseteq \operatorname{im} f^2$
Par double inclusion : $\operatorname{im} f = \operatorname{im} f^2$

Par double implication on a démontré que : $\operatorname{im} f = \operatorname{im} f^2 \iff \operatorname{im} f + \ker f = E$

7 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E. Pour tout scalaire λ on note :

$$E_\lambda = \{u \in E \mid f(u) = \lambda u\}$$

a. Démontrer que E_λ est un sous-espace vectoriel de E.

b. Démontrer que si $\lambda \neq \mu$ alors E_λ et E_μ sont en somme directe.

a. Soit $u \in E$. On remarque que :

$$u \in E_\lambda \iff f(u) = \lambda u \iff (f - \lambda \mathrm{id})(u) = 0_E$$

Ceci montre que $E_\lambda = \ker(f - \lambda \mathrm{id})$.
L'application $f - \lambda\mathrm{id}$ est linéaire car elle est combinaison linéaire de deux applications linéaires. Comme E_λ est son noyau alors il est sous-espace vectoriel de E.

b. Un vecteur u appartient à $E_\lambda \cap E_\mu$ si et seulement si $f(u) = \lambda u = \mu u$.
Ceci donne $(\lambda - \mu)u = 0_E$, puis $\lambda - \mu = 0_{\mathbb{K}}$ ou $u = 0_E$.
Comme $\lambda \neq \mu$ alors $u = 0_E$.
On en déduit que $E_\lambda \cap E_\mu = \{0_E\}$, donc E_λ et E_μ sont en somme directe.

8 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E vérifiant :

$$f \circ f = 3f - 2\mathrm{Id}_E$$

a. Démontrer que f est un isomorphisme et exprimer son inverse en fonction de f.

On utilise la définition de E_λ donnée dans l'exercice précédent.

b. Démontrer que :

$$\operatorname{im}(f - \mathrm{Id}_E) \subseteq E_2 \quad \text{et} \quad \operatorname{im}(f - 2\mathrm{Id}_E) \subseteq E_1$$

c. Soit u un vecteur de E. Démontrer que u est combinaison linéaire de $f(u) - u$ et $f(u) - 2u$.

d. Démontrer que : $E_1 \oplus E_2 = E$

a. Deux méthodes sont proposées.

Méthode 1. On calcule le noyau et l'image de f.

Soit $u \in \ker f$. Alors $f(u) = 0_E$. Or $f \circ f = 3f - 2\mathrm{Id}_E$, donc $f(f(u)) = 3f(u) - 2u$.

On sait que $f(u) = 0_E$, et comme f est linéaire alors $f(0_E) = 0_E$, donc $0_E = 0_E - 2u$ d'où $u = 0_E$.

Ceci montre que $\ker f \subseteq \{0_E\}$, l'inclusion réciproque est évidente car $\ker f$ est un sev de E, donc on en déduit : $\ker f = \{0_E\}$

Ceci montre que f est injective.

Pour le calcul de l'image, on sait que :

$$\forall u \in E \qquad f(f(u)) = 3f(u) - 2u$$

Ceci donne $2u = 3f(u) - f(f(u))$, puis comme f est linéaire $2u = f(3u) - f(f(u)) = f(3u - f(u))$. On en déduit :

$$\forall u \in E \qquad u = \tfrac{1}{2}f(3u - f(u)) = f\Big(\tfrac{3}{2}u - \tfrac{1}{2}f(u)\Big)$$

Si on pose $v = \frac{3}{2}u - \frac{1}{2}f(u)$ alors $u = f(v)$. On a démontré que pour $u \in E$ il existe $v \in E$ tel que $u = f(v)$, ce qui signifie $u \in \mathrm{im}\, f$.

On en déduit que $E \subseteq \mathrm{im}\, f$. L'inclusion réciproque est évidente car $\mathrm{im}\, f$ est un sous-espace vectoriel de E, et donc : $\mathrm{im}\, f = E$.

Ceci signifie que f est surjective.

Comme f est injective et surjective alors f est un isomorphisme.

On a vu que l'antécédent de u par f est $v = \frac{3}{2}u - \frac{1}{2}f(u)$, donc :

$$\forall u \in E \qquad f^{-1}(u) = \tfrac{3}{2}u - \tfrac{1}{2}f(u)$$

On peut aussi écrire : $f^{-1} = \frac{3}{2}\mathrm{Id}_E - \frac{1}{2}f$

Méthode 2. On rappelle que si $f : E \to F$ est une application, et s'il existe $g : F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$, alors f est bijective et g est sa réciproque.

Comme $f \circ f = 3f - 2\mathrm{Id}_E$ alors $2\mathrm{Id}_E = 3f - f \circ f$ puis $\frac{3}{2}f - \frac{1}{2}f \circ f = \mathrm{Id}_E$.

On peut donc écrire :

$$\mathrm{Id}_E = \Big(\tfrac{3}{2}\mathrm{Id}_E - \tfrac{1}{2}f\Big) \circ f = f \circ \Big(\tfrac{3}{2}\mathrm{Id}_E - \tfrac{1}{2}f\Big)$$

Ceci montre que f est un isomorphisme, de réciproque $f^{-1} = \frac{3}{2}\mathrm{Id}_E - \frac{1}{2}f$.

b. Démontrons que $\mathrm{im}(f - \mathrm{Id}_E) \subseteq E_2$.

Soit $u \in \mathrm{im}(f - \mathrm{Id}_E)$. Alors il existe $v \in E$ tel que $u = (f - \mathrm{Id}_E)(v) = f(v) - v$.

On calcule alors :

$$f(u) = f(f(v) - v) = f \circ f(v) - f(v)$$

Comme $f \circ f = 3f - 2\mathrm{Id}_E$ alors $f(u) = 2(f(v) - v) = 2u$, ce qui montre que $u \in E_2$.

On en déduit l'inclusion : $\mathrm{im}(f - \mathrm{Id}_E) \subseteq E_2$

On démontre de la même façon l'autre inclusion : $\mathrm{im}(f - 2\mathrm{Id}_E) \subseteq E_1$

c. On remarque que :

$$u = (f(u) - u) - (f(u) - 2u)$$

Ceci montre bien que u est combinaison linéaire de $(f(u) - u)$ et $(f(u) - 2u)$.

d. D'après l'exercice précédent, comme 1 et 2 sont distincts alors : $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.
On démontre que $E \subseteq E_1 + E_2$.
Soit $u \in E$. Alors d'après la question précédente $u = (f(u) - u) - (f(u) - 2u)$.
Or $(f(u) - u) = (f - \mathrm{Id}_E)(u)$ donc $(f(u) - u) \in \mathrm{im}(f - \mathrm{Id}_E)$, et d'après la question c : $(f(u) - u) \in E_2$.
On démontre de même que $(f(u) - 2u) \in E_1$.
On en déduit que $u \in E_1 + E_2$.
Ceci démontre que $E \subseteq E_1 + E_2$. L'inclusion réciproque est évidente car E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de E, donc on obtient : $E = E_1 + E_2$

Comme $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$ alors :

$$E = E_1 \oplus E_2$$

Remarque. Ceci signifie que pour tout $u \in E$ il existe u_1 et u_2 appartenant à E tels que $u = u_1 + u_2$ et $f(u) = u_1 + 2u_2$.
On peut ajouter que $u_1 = 2u - f(u)$ et $u_2 = f(u) - u$.

9 Soit f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ défini par :

$$f(x, y, z) = (2x + y + z, x + 2y + z, x + y + 2z)$$

On utilise encore la définition de E_λ de l'exercice 7.

a. Donner une base de E_1 et de E_4.

b. Démontrer que E_1 et E_4 sont supplémentaires dans E.

c. En déduire que : $f \circ f = 5f - 4\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$

a. Par définition E_1 est le sous-espace vectoriel de E contenant les vecteurs u tels que $f(u) = u$, et E_4 est celui contenant les vecteurs u tels que $f(u) = 4u$.
En posant $u = (x, y, z)$ ces équations sont équivalentes aux systèmes :

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_4 : \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

On obtient :

$$E_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y + z = 0 \right\} = \mathrm{Vect}\left((1, 0, -1), (0, 1, -1)\right)$$
$$E_4 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = y = z \right\} = \mathrm{Vect}\left((1, 1, 1)\right)$$

On note $u_1 = (1, 0, -1)$, $u_2 = (0, 1, -1)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$.
La famille (u_1, u_2) est génératrice de E_1, libre car ses vecteurs ne sont pas colinéaires, donc elle est une base de E_1.
La famille (u_3) est génératrice de E_4, libre car son vecteur n'est pas nul, donc elle est une base de E_4.

b. D'après l'exercice précédent, comme $1 \neq 4$ alors E_1 et E_4 sont en somme directe.
Comme $E_1 = \text{Vect}\,(u_1, u_2)$ et $E_4 = \text{Vect}\,(u_3)$ alors $E_1 + E_4 = \text{Vect}\,(u_1, u_2, u_3)$.
On remarque que $u_3 - u_1 - u_2 = 3e_3$ donc $e_3 \in E_1 + E_4$.
Ensuite $e_1 = u_1 + e_3$ et $e_2 = u_2 + e_3$, donc $e_1 \in E_1 + E_4$ et $e_2 \in E_1 + E_4$.
Ainsi $E_1 + E_4$ contient les vecteurs de la base canonique de E, donc il contient E tout entier, et $E = E_1 + E_4$.
Finalement, comme $E_1 \cap E_4 = \{0_E\}$ et $E_1 + E_4 = E$ alors $E = E_1 \oplus E_4$.

c. Soit u un vecteur de E. D'après la question précédente il existe un et un seul couple de vecteurs $(v, w) \in E_1 \times E_4$ tel que $u = v + w$.
Comme $v \in E_1$ et $w \in E_4$ alors $f(v) = v$ et $f(w) = 4w$.
Comme f est linéaire alors :

$$f(u) = f(v + w) = f(v) + f(w) = v + 4w$$

Ensuite :

$$f \circ f(u) = f(v) + 4f(w) = v + 16w$$

De plus :

$$(5f - 4\text{id})(u) = 5f(u) - 4u = 5(v + 4w) - 4(v + w) = v + 16w$$

On constate que $f \circ f(u) = 5f(u) - 4u$ pour tout $u \in E$, donc $f \circ f = 5f - 4\text{id}$.

$\boxed{\textbf{10}}$ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E. On suppose que pour tout u la famille $(u, f(u))$ est liée.

a. Démontrer que pour tout $u \in E$ non-nul il existe un unique $\lambda_u \in \mathbb{K}$ tel que $f(u) = \lambda_u u$.

b. Soit u et v deux vecteurs linéairement indépendants. Démontrer que $\lambda_u = \lambda_v$.

c. Démontrer que f est une homothétie.

a. Soit $u \in E$ non-nul. Par hypothèse u et $f(u)$ sont liés donc il existe deux scalaires α et β non tous les deux nuls tels que $\alpha u + \beta f(u) = 0_E$. Si $\beta = 0_{\mathbb{K}}$ alors $\alpha u = 0_E$, ce qui donne $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$ car u est supposé non-nul. Or α et β ne peuvent être tous deux nuls. Cette contradiction montre que β n'est pas nul, donc $f(u) = \lambda u$ avec $\lambda = -\frac{\alpha}{\beta}$.
Si λ et μ sont deux scalaires tels que $f(u) = \lambda u$ et $f(u) = \mu u$ alors $(\lambda + \mu)u = 0_E$, ce qui donne $\lambda = \mu$ car u n'est pas le vecteur nul.
On a donc démontré que pour tout vecteur u non-nul il existe un et un seul scalaire λ tel que $f(u) = \lambda u$.

b. Comme u et v sont linéairement indépendants alors ils ne sont pas nuls, et $u + v$ n'est pas nul. Il existe donc trois scalaires λ_u, λ_v et λ_{u+v} tels que $f(u) = \lambda_u u$, $f(v) = \lambda_v v$ et $f(u + v) = \lambda_{u+v}(u + v)$. Comme f est linéaire alors $f(u + v) = f(u) + f(v)$, ce qui donne $(\lambda_{u+v} - \lambda_u)u + (\lambda_{u+v} - \lambda_v)v = 0_E$. Comme u et v sont linéairement indépendants alors $\lambda_{u-v} = \lambda_u = \lambda_v$.

c. Soit u un vecteur non-nul de E, et soit $\alpha = \lambda_u$.
Démontrons que pour tout $v \in E$: $\quad f(v) = \alpha v$
Soit $v \in E$. Si v n'est pas colinéaire à u alors $f(v) = \lambda_v v$ et $\lambda_v = \lambda_u$ d'après la question précédente, donc $f(v) = \alpha v$.
Si v est colinéaire à u alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $v = \lambda u$. On en déduit $f(v) = \lambda f(u) = \lambda \alpha u = \alpha v$.
Pour tout $v \in E$ on a $f(v) = \lambda v$, donc f est l'homothétie de rapport α.

11 Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on pose :

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (-x+2z, -x+y+z, z) \\ g(x,y,z) &= \tfrac{1}{2}(x-z, 2y, -x+z) \\ h(x,y,z) &= \tfrac{1}{3}(-x+4z, 2x-3y+4z, 2x+z) \end{aligned}$$

Démontrer que ces endomorphismes sont des projecteurs ou des symétries, et déterminer leurs éléments caractéristiques.

- On calcule $f \circ f$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned} f \circ f(x,y,z) &= f(-x+2z, -x+y+z, z) \\ &= (-(-x+2z)+2z, -(-x+2z)+(-x+y+z)+z, z) \\ &= (x,y,z) \end{aligned}$$

  Ainsi $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ et donc f est une symétrie.
  Plus précisément f est la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à F parallèlement à G où :

$$F = \left\{ u \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; f(u) = u \right\} \qquad \text{et} \qquad G = \left\{ u \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; f(u) = -u \right\}$$

  Soit $u = (x, y, z)$. Alors :

$$\begin{aligned} & f(u) = u && \iff && (-x+2z, -x+y+z, z) = (x,y,z) && \iff && x = z \\ \text{et} \quad & f(u) = -u && \iff && (-x+2z, -x+y+z, z) = -(x,y,z) && \iff && \begin{cases} z = 0 \\ x = 2y \end{cases} \end{aligned}$$

  Ceci montre que :

$$\begin{aligned} F &= \left\{ (z,y,z) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left((1,0,1),(0,1,0)\right) \\ G &= \{ (2y,y,0) \mid y \in \mathbb{R} \} = \mathrm{Vect}\left((2,1,0)\right) \end{aligned}$$

  En conclusion f est la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à $F = \mathrm{Vect}\left((1,0,1),(0,1,0)\right)$ parallèlement à $G = \mathrm{Vect}\left((2,1,0)\right)$.
- On calcule $g \circ g$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned} g \circ g(x,y,z) &= \tfrac{1}{2} g(x-z, 2y, -x+z) \\ &= \tfrac{1}{4}((x-z)-(-x+z), 2(2y), -(x-z)+(-x+z)) \\ &= \tfrac{1}{2}(x-z, 2y, -x+z) = g(x,y,z) \end{aligned}$$

Ainsi $g \circ g = q$ et donc g est un projecteur.
Plus précisément g est le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur $F = \operatorname{im} g$ parallèlement à $G = \ker g$.
On calcule donc :

$$\begin{aligned}
\operatorname{im} g &= \left\{ \tfrac{1}{2}(x-z, 2y, -x+z) \;\middle|\; (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
&= \operatorname{Vect}\left(\left(\tfrac{1}{2}, 0, -\tfrac{1}{2}\right), (0,1,0), \left(-\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}\right) \right) = \operatorname{Vect}\left((1,0,-1),(0,1,0)\right) \\
\ker g &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \tfrac{1}{2}(x-z, 2y, z-x) = 0_{\mathbb{R}^3} \right\} \\
&= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = z \quad \text{et} \quad y = 0 \right\} \\
&= \left\{ (x,0,x) \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left((1,0,1)\right)
\end{aligned}$$

En conclusion g est le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur $F = \operatorname{Vect}\left((1,0,-1),(0,1,0)\right)$ parallèlement à $G = \operatorname{Vect}\left((1,0,1)\right)$.

- On calcule $h \circ h$. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned}
h \circ h(x,y,z) &= \tfrac{1}{3} h(-x+4z, 2x-3y+4z, 2x+z) \\
&= \tfrac{1}{9}\big(-(-x+4z) + 4(2x+z), 2(-x+4z) - 3(2x-3y+4z) + 4(2x+z), \\
&\qquad\qquad 2(-x+4z) + (2x+z)\big) \\
&= (x,y,z)
\end{aligned}$$

Ainsi $h \circ h = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ et donc h est une symétrie.
Plus précisément h est la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à F parallèlement à G où :

$$F = \left\{ u \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; h(u) = u \right\} \qquad \text{et} \qquad G = \left\{ u \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; h(u) = -u \right\}$$

Soit $u = (x,y,z)$. Alors :

$$\begin{aligned}
h(u) = u &\iff (-x+4z, 2x-3y+4z, 2x+z) = 3(x,y,z) &\iff x = y = z \\
h(u) = -u &\iff (-x+4z, 2x-3y+4z, 2x+z) = -3(x,y,z) &\iff x = -2z
\end{aligned}$$

Ceci montre que :

$$\begin{aligned}
F &= \left\{ (x,x,x) \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left((1,1,1)\right) \\
G &= \left\{ (-2z, y, z) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{Vect}\left((-2,1,0),(0,1,0)\right)
\end{aligned}$$

En conclusion h est la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à $F = \operatorname{Vect}\left((1,1,1)\right)$ parallèlement à $G = \operatorname{Vect}\left((-2,1,0),(0,1,0)\right)$.

12 Donner l'expression de

a. la symétrie de $\mathbb{R}^2$ par rapport à Vect $((1,0))$ parallèlement à Vect $((1,1))$.

b. la symétrie de $\mathbb{R}^2$ par rapport à Vect $((3,-1))$ parallèlement à Vect $((-7,3))$.

a. On note $E = \mathbb{R}^2$, puis $F = \text{Vect}\,((1,0))$ et $G = \text{Vect}\,((1,1))$.
On démontre que F et G sont supplémentaires, ce qui est sous-entendu par l'énoncé, sinon la symétrie par rapport à F parallèlement à G ne serait pas définie.
Soit $u = (x, y)$ un vecteur de E. Alors u est somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G si et seulement si il existe un couple de réels (α, β) tels que $u = \alpha(1,0) + \beta(1,1)$, ce qui donne :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \qquad \beta = y \end{cases}$$

Ce système admet pour unique solution le couple $(\alpha, \beta) = (x - y, y)$.
Ainsi tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. Donc $E = F \oplus G$, c'est exactement la définition des supplémentaires.

Si $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$ alors $s(u) = v - w$.
Or le calcul précédent donne, pour tout $u = (x, y) \in E$:

$$(x, y) = \alpha(1,0) + \beta(1,1) \qquad \text{avec} \qquad \alpha = x - y \quad \text{et} \quad \beta = y$$

En d'autres termes :

$$(x, y) = (x - y, 0) + (y, y) \qquad \text{avec} \qquad (x - y, 0) \in F \quad \text{et} \quad (y, y) \in G$$

On en déduit :

$$s(x, y) = (x - y, 0) - (y, y) = (x - 2y, -y)$$

L'expression générale de s est donc :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad s(x, y) = (x - 2y, -y)$$

On peut vérifier que $s(1,0) = (1,0)$ et $s(1,1) = -(1,1)$.

b. On note $E = \mathbb{R}^2$, puis $F = \text{Vect}\,((3,-1))$ et $G = \text{Vect}\,((-7,3))$.
Pour tout vecteur u de E on souhaite :

- Déterminer deux vecteurs $v \in F$ et $w \in G$ tels que $u = v + w$.
- Calculer $s(u) = v - w$.

Soit $u = (x, y)$ un vecteur de E. Alors u est somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G si et seulement si il existe un couple de réels (α, β) tels que $u = \alpha(3,-1) + \beta(-7,3)$, ce qui donne :

$$\begin{cases} 3\alpha - 7\beta = x \\ -\alpha + 3\beta = y \end{cases}$$

Ce système admet pour unique solution le couple $(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(3x + 7y, x + 3y)$.

La décomposition du vecteur $u = (x, y)$ selon la somme directe $E = F \oplus G$ est donc :

$$u = v + w \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} v = \alpha(3, -1) = \frac{1}{2}(9x + 21y, -3x - 7y) \\ w = \beta(-7, 3) = \frac{1}{2}(-7x - 21y, 3x + 9y) \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} s(u) = v - w &= \tfrac{1}{2}(9x + 21y, -3x - 7y) - \tfrac{1}{2}(-7x - 21y, 3x + 9y) \\ &= (8x + 21y, -3x - 8x) \end{aligned}$$

On a donc démontré que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad s(x, y) = (8x + 21y, -3x - 8x)$$

On peut d'ailleurs vérifier :

$$s(3, -1) = (3, -1) \qquad \text{et} \qquad s(-7, 3) = (7, -3) = -(-7, 3)$$

13 Soit p un endomorphisme d'un espace vectoriel E, et $q = \mathrm{id} - p$.

a. Démontrer que p est un projecteur si et seulement si q est un projecteur.

b. On suppose que p est un projecteur. Démontrer que $\operatorname{im} q = \ker p$ et $\ker q = \operatorname{im} p$.

a. Si $q = \mathrm{id} - p$ alors :

$$q \circ q = (\mathrm{id} - p) \circ (\mathrm{id} - p) = \mathrm{id} - 2p + p \circ p$$

En effet, la linéarité de p donne :

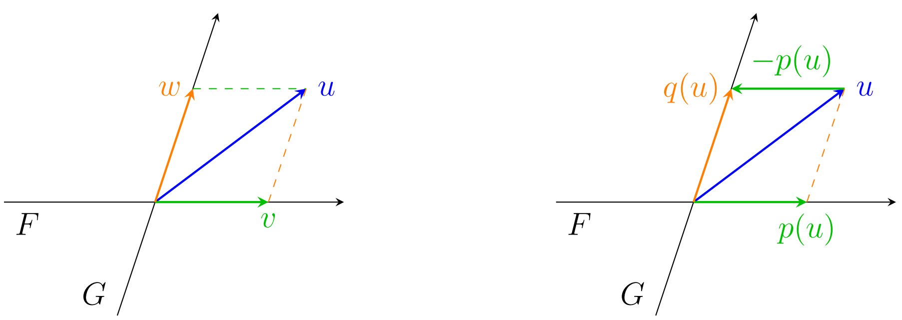
$$p \circ (\mathrm{id} - p) = p \circ \mathrm{id} - p \circ p$$

On peut donc écrire les équivalences suivantes :

$$p \circ p = p \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{id} - 2p + p \circ p = \mathrm{id} - p \qquad \Longleftrightarrow \qquad q \circ q = q$$

Ceci montre bien que p est un projecteur si et seulement si q est un projecteur.

b. On suppose que p est un projecteur.
D'après la question précédente $q = \mathrm{id} - p$ est un projecteur.
On doit démontrer que si p est le projecteur sur F parallèlement à G alors q est le projecteur sur G parallèlement à F.
Ceci peut se voir sur la figure suivante :



En effet, on constate si $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$ alors $p(u) = v$, puis $u - p(u) = u - v = w$, donc $q(u) = w$. Ceci montre bien que $q(u)$ est le projeté de u sur G parallèlement à F.

Pour démontrer ceci on doit se rappeler que si p est un projecteur sur F alors F n'est pas seulement l'image de p, c'est aussi l'ensemble des points fixes de p :

$$\operatorname{im} p = \{u \in E \mid p(u) = u\}$$

En effet : si $u \in \operatorname{im} p$ alors il existe $v \in E$ tel que $u = p(v)$, et alors $p(u) = p \circ p(v) = p(v) = u$.
Réciproquement, si $p(u) = u$ alors $u \in \operatorname{im} p$ car u admet un antécédent (à savoir lui-même) dans E par p, donc $u \in \operatorname{im} p$.

On peut maintenant démontrer nos égalités, par équivalences :

$$\begin{array}{lllllll}
\forall u \in E & u \in \operatorname{im} p & \iff & p(u) = u & \iff & u - p(u) = 0_E & \\
 & & & & \iff & q(u) = 0_E & \iff u \in \ker q \\
\forall u \in E & u \in \ker p & \iff & p(u) = 0_E & \iff & u - p(u) = u & \\
 & & & & \iff & q(u) = u & \iff u \in \operatorname{im} q
\end{array}$$

On a bien démontré que $\operatorname{im} p = \ker q$ est $\ker p = \operatorname{im} q$.

14 Soit p un projecteur d'un espace vectoriel E.
Démontrer qu'un endomorphisme f de E commute avec p si et seulement si $\ker p$ et $\operatorname{im} p$ sont stables par f.

Soit f un endomorphisme de E.

Supposons que f commute avec p : $p \circ f = f \circ p$.
Si $u \in \ker p$ alors $p(u) = 0_E$, donc $f(p(u)) = 0_E$ car f est linéaire, puis $p(f(u)) = 0_E$ car f et p commutent, et donc $f(u) \in \ker p$. Ceci démontre que $\ker p$ est stable par f.
Soit $v \in \operatorname{im} p$. Alors $p(v) = v$ car p est un projecteur, donc $f(p(v)) = f(v)$, puis $p(f(v)) = f(v)$ car f et p commutent, et donc $f(v) \in \operatorname{im} p$. Ceci démontre que $\operatorname{im} p$ est stable par f.

Supposons que $\ker p$ et $\operatorname{im} p$ sont stables par f.
Comme p est un projecteur alors $E = \ker p \oplus \operatorname{im} p$, donc pour tout $u \in E$ il existe $u_1 \in \ker p$ et $u_2 \in \operatorname{im} p$ tels que $u = u_1 + u_2$. Alors $p(u_1) = 0_E$ et $p(u_2) = u_2$.
Comme $\ker p$ et $\operatorname{im} p$ sont stables par f alors $f(u_1) \in \ker p$ et $f(u_2) \in \operatorname{im} p$, donc $p(f(u_1)) = 0_E$ et $p(f(u_2)) = f(u_2)$.
Comme f est linéaire alors $f \circ p(u) = f(p(u_1)) + f(p(u_2)) = f(u_2)$.
De plus $p \circ f(u) = p(f(u_1)) + p(f(u_2)) = f(u_2)$.
Ainsi $f \circ p(u) = p \circ f(u)$, ceci pour tout $u \in E$, donc f et p commutent.

15 Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $H = \ker f$ où :

$$f : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & 3x+y-2z \end{array}$$

On note aussi $D = \text{Vect}\,(u_0)$ avec $u_0 = (1,-1,2)$.

a. Démontrer que $E = H \oplus D$.

b. Soit $u = (x,y,z)$ un vecteur de E. Pour quelle valeur du scalaire λ le vecteur $u - \lambda u_0$ appartient-il à H ?

c. Déduire de la question précédente l'expression du projecteur de E sur H parallèlement à D, et de celui sur D parallèlement à H.

d. Déterminer l'expression de la symétrie de E par rapport à H parallèlement à D.

a. Comme $f(x,y,z)$ est de la forme $(x,y,z) \mapsto ax+by+cz$ avec a, b, c scalaires, f est une forme linéaire de E.

Comme $f(e_1) = 3$ alors f est non-nulle.

Par définition son noyau est un hyperplan, donc H est un hyperplan de E.

Comme $f(u_0) = -2$ alors u_0 n'appartient par à H, donc par propriété $D = \text{Vect}\,(u_0)$ est un supplémentaire de H dans E.

b. Par linéarité de f :

$$f(u-\lambda u_0) = f(u) - \lambda f(u_0) = 3x+y-2z+2\lambda$$

Ainsi $f(u-\lambda u_0)$ est nul si et seulement si $\lambda = -\frac{1}{2}(3x+y-2z)$.

c. Soit p le projecteur de E sur H parallèlement à D et q le projecteur de E sur D parallèlement à F.

Soit $u = (x,y,z) \in E$. Si λ prend la valeur obtenue dans la question précédente alors $u - \lambda u_0 \in H$. De plus $\lambda u_0 \in D$. Ainsi :

$$u = u - \lambda u_0 + \lambda u_0 \qquad \text{avec} \qquad u-\lambda u_0 \in H \quad \text{et} \quad \lambda u_0 \in D$$

On en déduit :

$$p(u) = u - \lambda u_0 \qquad \text{et} \qquad q(u) = \lambda u_0$$

Pour $u = (x,y,z)$ On obtient :

$$\begin{aligned} p(x,y,z) &= \tfrac{1}{2}(5x+y-2z, -3x+y+2z, 6x+2y-2z) \\ q(x,y,z) &= \tfrac{1}{2}(-3x-y+2z, 3x+y-2z, -6x-2y+4z) \end{aligned}$$

On remarque que $p + q = \text{id}$, ce qui est cohérent avec les notations de l'exercice précédent.

d. Soit s la symétrie de E par rapport à H parallèlement à D.

Par propriété, comme p est le projecteur de E sur H parallèlement à D alors $s = 2p - \text{id}$.

Connaissant l'expression de p on déduit, pour tout $(x,y,z) \in E$:

$$s(x,y,z) = (4x+y-2z, -3x+2z, 6x+2y-3z)$$

16 Dans $E = \mathbb{R}^4$ on note :

$$F = \{ (x, y, z, t) \in E \mid x + y + z + t = 0\}$$
$$G = \text{Vect}\left((1, 1, 1, 1)\right)$$

a. Démontrer que F et G sont supplémentaires dans E.

b. Donner l'expression de la symétrie de E par rapport à F parallèlement à G.

a. Soit $u_0 = (1, 1, 1, 1)$. Alors $G = \text{Vect}\,(u_0)$.
Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par $\varphi(x, y, z, t) = x + y + z + t$. Alors F est le noyau de φ. Comme $\varphi(u_0) = 4 \neq 0$ alors φ n'est pas nulle, donc F est un hyperplan de E.
Comme $\varphi(u_0) \neq 0$ alors G n'est pas inclus dans H, donc par théorème F et G sont supplémentaires dans E.

b. Soit $u = (x, y, z, t)$ un vecteur de E. On pose :

$$w = \frac{x + y + z + t}{4} u_0 \qquad \text{et} \qquad v = u - w$$

On calcule par linéarité de φ que $\varphi(v) = \varphi(u) - \frac{\varphi(u)}{4}\varphi(u_0) = 0$, donc $v \in F$.
De plus $w \in G$, donc $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$.
Soit s la symétrie de E par rapport à F parallèlement à G. Alors par définition :

$$s(u) = v - w$$

On en déduit $s(u) = u - \frac{x+y+z+t}{2} u_0$, ce qui donne :

$$s(x, y, z, t) = \tfrac{1}{2}(x - y - z - t, -x + y - z - t, -x - y + z - t, -x - y - z + t)$$

17 Dans $E = \mathbb{R}^4$ on note :

$$F = \{ (x, y, z, t) \in E \mid x + y = z + t = 0\}$$
$$G = \text{Vect}\left((1, 1, 1, 1), (1, 1, -1, -1)\right)$$

Démontrer que $E = F \oplus G$ et donner l'expression du projecteur de E sur F parallèment à G.

- F est un sous-espace vectoriel de E.
  Les applications

$$\varphi_1 : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & x + y \end{array} \qquad \text{et} \qquad \varphi_2 : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & z + t \end{array}$$

  sont des formes linéaires de E.
  On remarque que $F = \ker \varphi_1 \cap \ker \varphi_2$. Le noyau d'une forme linéaire de E est un sous-espace vectoriel de E et l'intersection de plusieurs sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel, donc F est un sous-espace vectoriel de E.

- G est un sous-espace vectoriel de E. C'est immédiat car G est le sous-espace vectoriel de E engendré par deux vecteurs de E.
  On note $u_1 = (1,1,1,1)$ et $u_2 = (1,1,-1,-1)$ ces deux vecteurs.
- $F \cap G = \{0_E\}$.
  Soit $u \in F \cap G$. Alors $u \in G$ donc il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u = \alpha u_1 + \beta u_2$.
  Alors $u = (\alpha+\beta, \alpha+\beta, \alpha-\beta, \alpha-\beta)$. Comme $u \in F$ alors $2(\alpha+\beta) = 2(\alpha-\beta) = 0$, ce qui donne $\alpha = \beta = 0$, et ainsi $u = 0_E$.
  On a démontré que $F \cap G \subseteq \{0_E\}$.
  L'inclusion réciproque est immédiate donc $F \cap G = \{0_E\}$.
- $F + G = E$.
  Soit $u = (x, y, z, t)$ un élément de E.
  On remarque que $F = \{(x, -x, z, -z) \mid (x, z) \in \mathbb{R}^2\}$, donc $F = \operatorname{Vect}(v_1, v_2)$ avec $v_1 = (1, -1, 0, 0)$ et $v_2 = (0, 0, 1, -1)$.
  Démontrons qu'il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $u = av_1 + bv_2 + cu_1 + du_2$.
  Cette dernière égalité équivaut au système :

$$\begin{cases} a \phantom{{}+b} + c + d = x \\ -a \phantom{{}+b} + c + d = y \\ \phantom{a+{}} b + c - d = z \\ - b + c - d = t \end{cases}$$

  Grâce à l'algorithme du pivot de Gauss on montre qu'il admet une unique solution :

$$(a, b, c, d) = \left(\frac{x-y}{2}, \frac{z-t}{2}, \frac{x+y+z+t}{4}, \frac{x+y-z-t}{4}\right) \qquad (1)$$

  Ceci montre que pour ces valeurs de a, b, c, d on a $u = (av_1 + bv_2) + (cu_1 + du_2)$.
  Comme $av_1 + bv_2 \in F$ et $cu_1 + du_2 \in G$ alors $u \in F + G$.
  On a donc démontré que $F + G \subseteq E$.
  L'inclusion réciproque étant immédiate, on obtient $E = F + G$.
- Comme $F \cap G = \{0_E\}$ et $F + G = E$ alors $E = F \oplus G$.
  On peut donc définir p, le projecteur de E sur F parallèlement à G.
- Calculons $p(u)$ pour tout $u = (x, y, z, t) \in E$.
  Nous avons démontré ci-dessus que pour $u = (x, y, z, t) \in E$ on a $u = (av_1 + bv_2) + (cu_1 + du_2)$ avec les valeurs de a, b, c, d données en (1).
  Comme $av_1 + bv_2 \in F$ et $cu_1 + du_2 \in G$ alors par définition de p on a $p(u) = av_1 + bv_2$.
  Ceci donne $p(u) = \frac{x-y}{2}(1, -1, 0, 0) + \frac{z-t}{2}(0, 0, 1, -1)$ soit finalement :

$$\forall (x, y, z, t) \in E \qquad p(x, y, z, t) = \left(\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2}, \frac{z-t}{2}, \frac{t-z}{2}\right).$$

  On peut vérifier que $p(u_1) = u_1$, $p(u_2) = u_2$, $p(v_1) = 0$ et $p(v_2) = 0$.

18 Soit p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E tels que $p \circ q = q \circ p$.

a. Démontrer que $p \circ q$ est un projecteur et que :
$$\operatorname{im}(p \circ q) = \operatorname{im} p \cap \operatorname{im} q$$
$$\ker(p \circ q) = \ker p + \ker q$$

b. Démontrer que si $\operatorname{im} p = \operatorname{im} q$ alors $p = q$.

c. Démontrer que si $p \circ q = 0$ alors $p + q$ est un projecteur.

d. Réciproquement, démontrer que si p, q et $p + q$ sont des projecteurs de E alors :
$$p \circ q = q \circ p = 0$$

e. Démontrer que dans la situation des deux questions précédentes :
$$\operatorname{im}(p + q) = \operatorname{im} p \oplus \operatorname{im} q$$
$$\ker(p + q) = \ker p \cap \ker q.$$

a. On compose $p \circ q$ avec lui-même :

$$\begin{aligned}
(p \circ q) \circ (p \circ q) &= p \circ (q \circ p) \circ q && \text{par associativité de la composition} \\
&= p \circ (p \circ q) \circ q && \text{car } p \circ q = q \circ p \\
&= (p \circ p) \circ (q \circ q) && \text{par associativité de la composition} \\
&= p \circ q && \text{car } p \text{ et } q \text{ sont des projecteurs.}
\end{aligned}$$

Ceci démontre que $p \circ q$ est un projecteur.

Pour démontrer les deux égalités d'ensembles demandées, on démontre quatre inclusions.

- $\operatorname{im}(p \circ q) \subseteq \operatorname{im} p \cap \operatorname{im} q$:
  Soit $u \in \operatorname{im}(p \circ q)$. Alors il existe $v \in E$ tel que $u = p(q(v))$. Ceci montre déjà que $u \in \operatorname{im} p$.
  Comme $p \circ q = q \circ p$ alors $u = q(p(v))$. Ceci montre que $u \in \operatorname{im} q$.
  Comme $u \in \operatorname{im} p$ et $u \in \operatorname{im} q$ alors $u \in \operatorname{im} p \cap \operatorname{im} q$.
  On a donc démontré que : $\operatorname{im}(p \circ q) \subseteq \operatorname{im} p \cap \operatorname{im} q$
- $\operatorname{im} p \cap \operatorname{im} q \subseteq \operatorname{im}(p \circ q)$:
  Soit $u \in \operatorname{im} p \cap \operatorname{im} q$.
  Comme $u \in \operatorname{im} q$ alors $q(u) = u$.
  En effet, comme q est un projecteur alors $\operatorname{im} q = \{u \in E \mid q(u) = u\}$.
  Donc $p(q(u)) = p(u)$, mais comme $u \in \operatorname{im} p$ alors $p(u) = u$. Finalement $p \circ q(u) = u$, et donc $u \in \operatorname{im}(p \circ q)$.
  On a donc démontré que : $\operatorname{im} p \cap \operatorname{im} q \subseteq \operatorname{im}(p \circ q)$
- $\ker(p \circ q) \subseteq \ker p + \ker q$:
  Soit $u \in \ker(p \circ q)$.
  Alors $(p \circ q)(u) = 0_E$, ce qui montre que : $q(u) \in \ker p$.
  Mais d'autre part comme
  $$q(u - q(u)) = q(u) - q \circ q(u) = 0_E$$

alors $u - q(u) \in \ker q$. Ainsi :

$$u = q(u) + (u - q(u)) \quad \text{avec} \quad q(u) \in \ker p \quad \text{et} \quad u - q(u) \in \ker q$$

Ceci montre que $u \in \ker p + \ker q$.
On a donc démontré que : $\ker(p \circ q) \subseteq \ker p + \ker q$

- $\ker p + \ker q \subseteq \ker(p \circ q)$:
  Soit $u \in \ker p + \ker q$.
  Alors il existe $u_1 \in \ker p$ et $u_2 \in \ker q$ tels que $u = u_1 + u_2$.
  Par linéarité de p et q : $p \circ q(u) = p \circ q(u_1) + p \circ q(u_2)$
  Or $p \circ q = q \circ p$ donc : $p \circ q(u) = q \circ p(u_1) + p \circ q(u_2)$
  Comme $u_1 \in \ker p$ et $u_2 \in \ker q$ alors $p(u_1) = 0_E$ et $q(u_2) = 0_E$.
  On en déduit : $p \circ q(u) = q(0_E) + p(0_E) = 0_E$
  Ceci montre que $u \in \ker(p \circ q)$.
  On a donc démontré que : $\ker p + \ker q \subseteq \ker(p \circ q)$

Finalement par doubles inclusions on a bien obtenu :

$$\operatorname{im}(p \circ q) = \operatorname{im} p \cap \operatorname{im} q \qquad \ker(p \circ q) = \ker p + \ker q$$

b. Supposons que $\operatorname{im} p = \operatorname{im} q$, et montrons que $p = q$, *i.e.*, : $\forall u \in E \quad p(u) = q(u)$
Par propriété : $\operatorname{im} p = \{u \in E \mid p(u) = u\}$ et $\operatorname{im} q = \{u \in E \mid q(u) = u\}$
Soit $u \in E$. Alors $p(u) \in \operatorname{im} p$, donc $p(u) \in \operatorname{im} q$, donc $q(p(u)) = p(u)$.
De même, $q(u) \in \operatorname{im} q$ donc $q(u) \in \operatorname{im} p$ et ainsi $p(q(u)) = q(u)$.
Or $p \circ q = q \circ p$ donc $p(u) = q(u)$.
Ceci étant valable pour tout $u \in E$, on a bien $p = q$.

c. Par linéarité de p et q :

$$(p+q) \circ (p+q) = p \circ p + p \circ q + q \circ p + q \circ q$$

Comme p et q sont des projecteurs et $p \circ q = q \circ p$ alors :

$$(p+q) \circ (p+q) = p + 2(p \circ q) + q$$

Si $p \circ q = 0$ alors :

$$(p+q) \circ (p+q) = p + q$$

Ceci montre que $p + q$ est un projecteur.

d. Pour tous endomorphismes p et q de E on a par linéarité :

$$(p+q) \circ (p+q) = p \circ p + p \circ q + q \circ p + q \circ q$$

Si p, q, $p+q$ sont des projecteurs alors cette dernière égalité donne :

$$p + q = p + p \circ q + q \circ q + q$$

Elle implique $p \circ q = -q \circ p$.
En composant par p à gauche puis par p à droite on obtient :

$$p \circ q = -p \circ q \circ p \qquad \text{et} \qquad p \circ q \circ p = -q \circ p$$

On en déduit $p \circ q = q \circ p$, et comme $p \circ q = -q \circ p$ alors $p \circ q = q \circ p = 0$.

e. On démontre trois égalités d'ensembles.

- $\operatorname{im} p \cap \operatorname{im} q = \{0_E\}$:
  D'après la question a : $\operatorname{im} p \cap \operatorname{im} q = \operatorname{im}(p \circ q)$
  D'après la question d : $p \circ q = 0$
  Ainsi $\operatorname{im} p \cap \operatorname{im} q = \operatorname{im} 0 = \{0_E\}$.
- $\operatorname{im}(p+q) \subseteq \operatorname{im} p + \operatorname{im} q$:
  Soit $v \in \operatorname{im}(p+q)$. Alors il existe $u \in E$ tel que $v = (p+q)(u) = p(u) + p(u)$.
  Or $p(u) \in \operatorname{im} p$ et $q(v) \in \operatorname{im} q$, donc $v \in \operatorname{im} p + \operatorname{im} q$.
  On a démontré que $\operatorname{im}(p+q) \subseteq \operatorname{im} p + \operatorname{im} q$.
- $\operatorname{im} p + \operatorname{im} q \subseteq \operatorname{im}(p+q)$:
  Soit $v \in \operatorname{im} p + \operatorname{im} q$. Alors il existe $u_1 \in E$ et $u_2 \in E$ tel que $u = p(u_1) + q(u_2)$. Par linéarité de p, comme $p \circ p = p$ et $p \circ q = 0$ alors $p(u) = p \circ p(u_1) + p \circ q(u_2) = p(u_1)$.
  De même $q(u) = q \circ p(u_1) + q \circ q(u_2) = q(u_2)$.
  On en déduit $p(u) = p(u_1)$ et $q(u) = q(u_2)$, donc $u = p(u) + q(u) = (p+q)(u)$ et donc $v \in \operatorname{im}(p+q)$.
  On a démontré que $\operatorname{im} p + \operatorname{im} q \subseteq \operatorname{im}(p+q)$.
- $\ker(p+q) \subseteq \ker p \cap \ker q$:
  Soit $u \in \ker(p+q)$. Alors $(p+q)(u) = 0_E$, donc $p(u) + q(u) = 0$.
  Par linéarité de p on obtient $p \circ p(u) + p \circ q(u) = 0$. Comme $p \circ p = p$ et $p \circ q = 0$ alors $p(u) = 0$, donc $u \in \ker p$.
  De même on obtient $u \in \ker q$, donc $u \in \ker p \cap \ker q$.
  On a démontré que $\ker(p+q) \subseteq \ker p \cap \ker q$.
- $\ker p \cap \ker q \subseteq \ker(p+q)$:
  Soit $u \in \ker p \cap \ker q$. Alors $p(u) = q(u) = 0$, donc $(p+q)(u) = p(u) + q(u) = 0$, et ainsi $u \in \ker(p+q)$.
  On a démontré que $\ker p \cap \ker q \subseteq \ker(p+q)$.

Par doubles inclusions on obtient :

$$\operatorname{im} p \cap \operatorname{im} q = \{0_E\} \qquad \operatorname{im} p + \operatorname{im} q = \operatorname{im}(p+q) \qquad \ker(p+q) = \ker p \cap \ker q$$

Les deux premières montrent que $\operatorname{im} p \oplus \operatorname{im} q = \operatorname{im}(p+q)$, donc les égalités demandées sont démontrées.