

Devoir à la Maison n°14

Exercice 1 : Endomorphisme nilpotent de rang maximal.

Soit E est un espace vectoriel de dimension finie $n > 0$ sur un corps $\mathbb{K}$.

Soit f un endomorphisme de E .

On suppose que f^n est l'endomorphisme nul mais que f^{n-1} ne l'est pas.

1. Justifier qu'il existe un vecteur u de E tel que $f^{n-1}(u)$ est non-nul.

On choisit un tel élément et on le note u_n .

Pour tout $i = 1, \dots, n-1$ on pose $u_i = f^{n-i}(u_n)$.

2. (a) Démontrer par récurrence finie que pour tout $k = 0, \dots, n$ la famille $(u_1, \dots, u_k)$ est libre.

(b) Justifier que la famille $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ est une base de E

3. Démontrer que pour tout $k = 0, \dots, n$:

- $(u_1, \dots, u_k)$ est une base de $\ker f^k$,
- $(u_1, \dots, u_{n-k})$ est une base de $\operatorname{im} f^k$.

4. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Quel est le rang de f ?

5. (a) Soit g un endomorphisme de E commutant avec f .

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ les coordonnées de $g(u_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Démontrer que pour tout $i = 1, \dots, n$:
$$g(u_i) = \sum_{k=1}^n \alpha_k f^{n-k}(u_i).$$

En déduire que g est combinaison linéaire de $f^0, \dots, f^{n-1}$.

(b) Démontrer que l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f est :

$$\operatorname{Vect} \left\{ f^k \mid k = 0, \dots, n-1 \right\}.$$

Exercice 2 : Interpolation de Lagrange.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n un entier naturel.

Dans cet exercice on numérottera les éléments de $\mathbb{K}^{n+1}$ de 0 à n , de même que les indices de ligne et de colonne des matrices de taille $(n+1, n+1)$.

Par exemple la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$ est notée $\mathcal{B}_0 = (e_0, \dots, e_n)$.

La base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ est notée $\mathcal{B}_c = (1, X, \dots, X^n)$.

Soit $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des scalaires distincts. On définit :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{K}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ P &\longmapsto (P(\alpha_0), \dots, P(\alpha_n)). \end{aligned}$$

- (a) Justifier que Φ est un isomorphisme.
- (b) Justifier que pour tous scalaires $\beta_0, \dots, \beta_n$ il existe un et un seul polynôme P de degré au plus n tel que pour tout $i = 0, \dots, n$: $P(\alpha_i) = \beta_i$.
- Déterminer la matrice de Φ dans les bases canoniques de $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}^{n+1}$.
On note $A = (a_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$ cette matrice. Justifier qu'elle est inversible.
- Déterminer, pour tout $j = 0, \dots, n$ la forme factorisée du polynôme $P_j = \Phi^{-1}(e_j)$.
- Pour tout $j = 0, \dots, n$ on note $b_{0,j}, \dots, b_{n,j}$ les coefficients de P_j , si bien que :

$$\forall j = 0, \dots, n \quad P_j = \sum_{i=0}^n b_{i,j} X^i.$$

Justifier que la matrice $B = (b_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$ est une matrice de passage, puis démontrer que c'est la matrice inverse de A .

- À titre d'exemple, expliciter la matrice A^{-1} si $n = 2$.

On donnera une expression sous la forme :

$$A^{-1} = \frac{1}{(\alpha_0 - \alpha_1)(\alpha_0 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_2)} \begin{pmatrix} * & \dots & * \\ \vdots & & \vdots \\ * & \dots & * \end{pmatrix}.$$