Lycée Bellevue – Toulouse **pour le 16 juin 2025**
MPSI – Mathématiques

Devoir à la Maison n°14

Exercice 1. La dure loi de la jungle

Un troupeau de n gnous fuit un feu de brousse. Sur son passage se trouve une rivière. Chaque gnou, indépendamment des autres, peut se noyer avec la probabilité p. Sur l'autre rive une troupe de lionnes les attend, et là chaque gnou peut se faire attraper avec la probabilité r, indépendamment des autres.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de gnous qui réussissent à passer la rivière, et Y le nombre de gnous qui ensuite échappent aux lionnes.

1. Déterminer la loi de X.
2. Pour tout $k \in X(\Omega)$, déterminer la loi de Y sachant $X = k$.
3. En déduire la loi de Y.
4. Vérifier qu'il s'agit d'une loi usuelle et expliquer ceci.

Exercice 2. Fléchettes

À chaque partie de fléchettes un joueur réalise un score entier compris entre 0 et n ($n \in \mathbb{N}^*$ fixé). Au moment de noter son score, le joueur triche parfois en ajoutant 1 point.

Soit X la variable aléatoire égale au score réel et Y la variable aléatoire égale au score noté.

Soit T la variable aléatoire égale à 1 si le joueur triche et à 0 sinon. On note $t = E(T)$.

Pour tout $k = 0, \ldots, n$ soit a_k la probabilité que le joueur triche si son score est égal à k.

1. Donner une relation entre X, Y et T, puis exprimer l'espérance de Y en fonction de celle de X et de t.
2. Donner la loi de Y en fonction de celle de X et des a_k.
3. Exprimer la covariance du couple (X, Y) en fonction des variances de X et de Y et de t.

On suppose dorénavant que : $\forall k \in \{0, \ldots, n\} \quad a_k = 1 - \frac{k}{n}$.

C'est-à-dire que la probabilité que le joueur triche est inversement proportionnelle à son score.

4. Exprimer la valeur de t en fonction de l'espérance de X et de n.
5. Justifier que $Y(\Omega) \subseteq \{1, \ldots, n\}$.
6. On suppose que X suit une loi uniforme sur $\{0, \ldots, n\}$.
   (a) Déterminer la loi de Y.
   (b) Calculer la valeur de t et vérifier la formule de la question 4.
   (c) Calculer la covariance du couple (X, Y) ainsi que son coefficient de corrélation linéaire.
7. On suppose que X suit une loi binomiale de paramètres n et $p \in]0, 1[$.
   (a) Déterminer la loi de Y.
   (b) Reconnaître la loi de $Y - 1$.
   (c) En déduire la valeur de t.
   (d) Calculer la covariance du couple (X, Y) ainsi que son coefficient de corrélation linéaire.